

Wykład 2 (3 godz.)

Przekonaliśmy się, że dzięki dostrzeżeniu, iż równania Newtona dla układu punktów materialnych z siłami potencjalnymi są faktycznie równaniami Eulera Lagrange'a dla funkcjonału działania, możliwe było, aż nieprzyzwoicie proste przejście od $3N$ kartezjańskich współrzędnych naszych punktów do dowolnych innych $3N$ wielkości (o rozmaitym sensie geometrycznym), nazwanych współrzędnymi uogólnionymi. Istotne jest, by te nowe wielkości wyznaczały jednoznacznie konfigurację układu:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad (2.1)$$

Te nowe równania, to oczywiście:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} \quad \text{gdzie} \quad \tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(\dot{q}, q, t), t) \quad (2.2)$$

Liczy się nie tylko łatwość wypisania nowych równań, ale i łatwość zidentyfikowania charakterystycznych całek ruchu (praw zachowania), o ile takie występują. Jeśli potencjał nie zależy od pewnych zmian konfiguracji opisywanych pewnymi parametrami, wystarczy sprytnie wprowadzić te parametry jako nowe współrzędne (i uzupełnić do $3N$ jakimiś innymi), a lagranżian będzie miał współrzędne **cykliczne** i wypisanie całek ruchu będzie kwestią jednej chwili. Czasami, nawet gdy nie ma całek ruchu, nowe współrzędne mogą doprowadzić do lagranżianu będącego sumą kawałków zależnych od pojedynczych zmiennych (czy grup zmiennych) co prowadzi do układu niezależnych równań, dużo łatwiejszych do rozwiązywania niż jeden duży układ równań różniczkowych sprzężonych.

Więzy.

Największym (praktycznym) „bonusem” ze sformułowania praw ruchu w formie zasady najmniejszego działania¹ jest **oszałamiająca** łatwość, z jaką pozwala ona „zaatakować” problem ruchu układu ciał z **więzami**.

Ruch z więzami rozpatruje się w fizyce elementarnej, np. wahadło matematyczne, spadkownica Atwooda, staczanie się walca po równi, czy szerzej, jakiegokolwiek ruchy bryły sztywnej. Wszak bryła sztywna to zbiór atomów (w liczbie rzędu liczby Avogadro!)

¹ Zasada najmniejszego działania z całką $\int L dt$ nosi (dość nieoczekiwanie) zasady najmniejszego działania Hamiltona (a nie Lagrange'a). Funkcję Lagrange'a $L = T - V$ i równania (2.2) znalazł Lagrange na żmudnej drodze bezpośrednich przeliczeń wprost z równań Newtona. Hamilton odkrył zasadę najmniejszego działania kilkadziesiąt lat później.

spełniających regułę pozostawania każdej wybranej pary atomów w **stałej** odległości wzajemnej.

Najprostsze z takich zagadnień daje się analizować przez wprowadzenie (obok poszukiwanych w czasie ruchu położenia, traktowanych jako **niewiadome funkcje czasu**), dodatkowych niewiadomych, tzw. **sił reakcji** więzów, które musimy dodać do **znanych** (jako funkcje położenia) sił takich jak grawitacyjna, sprężysta, czy elektryczna, pisząc:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (2.3)$$

$3N$ równań Newtona + w równań więzów stanowi $3N+w$ równań na tyle samo niewiadomych ($3N$ współrzędnych i w sił reakcji). Gdy N jest rzędu liczby Avogadro, takie podejście byłoby absurdem do 23 potęgi! Ale nawet, gdy mamy tylko trzy punkty połączone trzema nieważkimi prętami (niezły model cząsteczki wody, na przykład), niechętnie zajmujemy się układem 12 równań, (z których 9 to równania różniczkowe, a 3 algebraiczne).

Jak dotąd, nie określiłem wyraźnie, co to są więzy, ograniczając się do paru konkretnych sytuacji. W mechanice więzami nazywa się każdy warunek narzucony na położenia i prędkości, który musi być spełniony tożsamościowo dla wszystkich chwil i dla wszystkich ruchów tego układu (niezależnie od warunków początkowych). Zarówno warunek pozostawania punktu materialnego w **zadanej z góry** odległości od ustalonego punktu (np. początku układu) : $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ (wahadło sferyczne), jak i warunek toczenia się walca po płaszczyźnie **bez poślizgu**: $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$, jak i warunek toczenia się **kuli** bez poślizgu po tej samej płaszczyźnie: $\dot{\vec{r}} + R\vec{\omega} \times \vec{n} = 0$ są przykładami więzów z jakimi pospolicie spotykamy się w praktyce. W tym ostatnim przykładzie R to promień kuli, $\vec{\omega}$, jej **chwilowa** prędkość kątowa $\dot{\vec{r}}$, równoległa do płaszczyzny prędkość środka kuli, a \vec{n} wektor skierowany pionowo w dół.

Pierwszy przykład zawiera wyłącznie współrzędne i jest niewątpliwie najprostszy. Drugi przykład tylko pozornie różni się od drugiego. Całkując stronami dostaniemy $x + R\varphi = \text{const}$, co też zawiera tylko współrzędne. Równanie to wyklucza pewne konfiguracje, które możemy sobie wyobrazić, ale które mogą powstać tylko przez naruszenie warunku przemieszczania się bez poślizgu. W przestrzeni zmiennych x, φ więzy wybierają tylko jedną prostą.

Inna sytuacja jest z kulą. Warunek znikania prędkości punktu styku z płaszczyzną jest podobny jak dla walca, ale napisanego równania **nie da** się zapisać jako pochodnej po czasie pewnego równania z samymi współrzędnymi. Skąd to wiadomo?

No cóż, są metody zbadania czy liniowe wyrażenie różniczkowe: $\sum_i a_i(q_1, q_2, \dots, q_f) dq_i$ może być zapisane jako:

$$\sum_i a_i(q_1, q_2, \dots, q_f) dq_i = \frac{1}{\tau(q_1, q_2, \dots, q_f)} \sum_i \frac{\partial f(q_1, q_2, \dots, q_f)}{\partial q_i} dq_i \quad (2.4)$$

co pozwalało by równanie więzów $\sum_i a_i(q_1, q_2, \dots, q_f) \dot{q}_i = 0$, po pomnożeniu przez „czynnik całkujący” τ , sprowadzić do postaci: $\frac{d}{dt} f = 0$, i ostatecznie do równania na same współrzędne: $f = \text{const}$.

Nie będę drażył tu tego ciekawego tematu, bo i tak (na razie) nie umiemy wyrazić prędkości kątowej przez pochodne jakichś wielkości charakteryzujących orientację bryły w przestrzeni. Dla obrotów wokół stałej osi, wektor prędkości kątowej to iloczyn stałego wektora i pochodnej po czasie kąta obrotu. Dla obrotów dowolnych (ze zmiennym kierunkiem $\vec{\omega}$) jest to nieco bardziej zawile.

Można jednak podać dowód pośredni. Gdyby warunek toczenia kuli bez poślizgu był „całkowalny”, na 5 wielkości charakteryzujących konfigurację nałożony byłby warunek zabraniający kuli przyjmować większość z nich (4 wymiarowa podprzestrzeń byłaby dopuszczalna) Tak jest w przypadku walca. Z 2 a priori parametrów, dowolny jest tylko kąt. Przecież, gdy wiem o ile obróciły się koła, wiem jak daleko odczytał się samochód!

Tymczasem można jawnie podać sposób „przetoczenia” kuli po płaszczyźnie tak, by środek znalazł się w zadanym z góry miejscu (2 parametry), by zadany punkt kuli (dalsze dwa parametry) znalazł się w najniższym położeniu i by jeszcze można obrócić kulę o dowolny kąt wokół osi pionowej.

Rozważmy dwie pary punktów: na płaszczyźnie początkowy i końcowy punkt styczności oraz na sferze początkowy i końcowy punkt styczności. Jeśli (najprostsza) odległość na sferze jest dłuższa niż na płaszczyźnie, to bez kłopotu znajdziemy na płaszczyźnie drogę z paroma zawijasami, „sztucznie” wydłużoną do wartości drogi łączącej punkty na sferze. Tocząc kulę tak, by cały czas stykały się punkty należące do narysowanych dróg (o równej długości) doprowadzimy i środek kuli do wybranego miejsca i wybrany punkt sfery do najniższego położenia. Na końcu bez poślizgu zakręcimy kulę wokół pionowej osi i już.

Więzy na **same współrzędne**, lub więzy na prędkości, ale **całkowalne**, nazywamy więzami **holonomicznymi**. Więzy, które nieodwołalnie muszą zawierać prędkości są więzami nieholonomicznymi. Dalsze rozważania odnosić się będą tylko do więzów holonomicznych.

Współrzędne uogólnione zgodne z więzami.

Rozważmy sytuację N punktów, których $3N$ współrzędnych spełnia w równań więzów:

$$f_a(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad a = 1, 2, \dots, w \quad (2.5)$$

Na wiele sposobów wybrać można $3N - w \equiv f$ wielkości q , zbudowanych ze współrzędnych x_i , niezależnych, (tj. takich, że wartość żadnej z nich nie może być wyrażona przez $f-1$ pozostałych):

$$q_m = q_m(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t), \quad (2.6)$$

takich by układ $3N$ równań (2.5) \vee (2.6), dał się rozwiązać względem współrzędnych kartezyjskich x_i .

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \quad (2.7)$$

Ponieważ wyrażenia (2.7) stanowią rozwiązanie układu równań (2.5) \vee (2.6), których częścią są wszystkie równania więzów, i w których wszystkie q_i są dowolne, równania (2.7) są parametrycznym równaniem f wymiarowej podprzestrzeni wszystkich położań wyznaczonej przez więzy. Współrzędne uogólnione q są **zgodne z więzami**.

Wróćmy do warunku koniecznego by funkcjonał $\int L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ miał ekstremum. W pierwszym podejściu do tego zagadnienia sprowadziłem badanie tego warunku do badania funkcji jednej zmiennej ϵ . Wtedy jeszcze nie znaliście pojęcia różniczki funkcji wielu zmiennych. Teraz wiecie doskonale, że dla funkcji dowolnej liczby zmiennych można wydzielić z jej przyrostu wokół jakiegoś punktu część liniową i resztę. Część liniowa nosi nazwę różniczki:

$$F(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2, \dots, y_f + dy_f) = F(y_1, y_2, \dots, y_f) + dF + R \quad (2.8)$$

gdzie

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i$$

Funkcjonał, to graniczne pojęcie funkcji **bardzo wielu** zmiennych (w ujęciu numerycznym, dyskretnym, gdy zależności (w ujęciu numerycznym, dyskretnym, gdy zależności $x(t)$ opisujemy podając wartości x w skończonej liczbie punktów, jest to liczba skończona, dopiero w granicy ciągłej nieskończona), dlatego i dla niego istnieje rozkład przyrostu funkcjonału na część liniową i resztę. Tradycyjnie funkcja $\delta x_i(t)$ będąca **dowolną** różnicą między jakąś funkcją porównawczą, a funkcją wokół której badamy zmiany (w szczególności wokół przebiegu będącego ekstremalą), nosi nazwę **wariacji** zmiennej. Odpowiada ona (a przy wielu zmiennych w funkcjonale kolekcja wszystkich takich wariacji dla różnych i) dokładnie pojęciu różniczki zmiennych niezależnych w problemie funkcji wielu

zmiennych. Przyrostowi funkcji x_i odpowiada przyrost funkcjonału. Gdy z tego przyrostu wydzielimy część liniową dostaniemy **wariację funkcjonału**:

$$\int L(x(t) + \delta x, \dot{x}(t) + \delta \dot{x}, t) dt = \int L(x(t), \dot{x}(t), t) dt + \delta \int L(x(t), \dot{x}(t), t) dt + R \quad (2.9)$$

Zgodnie z naszymi wcześniejszymi, nieznacznie mniej ogólnymi rachunkami, owa wariacja wynosi:

$$\delta \int L(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \int \sum \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt = \int \sum \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt \quad (2.10)$$

Obliczmy wariację działania $\int T - V$ dla naszego układu N cząstek z więzami:

$$\delta \int \left(\sum \frac{1}{2} m^A (\dot{\vec{r}}^A)^2 - V \right) dt = \int \sum \left(m^A \dot{\vec{r}}^A \delta \dot{\vec{r}}^A - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}^A} \delta \vec{r}^A \right) dt = - \int \sum \left(m^A \ddot{\vec{r}}^A + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}^A} \right) \delta \vec{r}^A dt \quad (2.11)$$

Gdyby nie było żadnych więzów, jedyne siły, jakie by działały na poszczególne cząstki, to gradienty potencjału, więc wariacja działania znikałaby (jako funkcjonał liniowy), właśnie dla ruchu rzeczywistego spełniającego równania Newtona.

Ale teraz mamy siły reakcji, zatem

$$m^A \ddot{\vec{r}}^A + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}^A} = \vec{R}^A \quad (2.12)$$

Zatem wariacja działania **jakby** nie chciała znikać?

$$\delta \int \left(\sum \frac{1}{2} m^A (\dot{\vec{r}}^A)^2 - V \right) dt = \int \sum (\vec{R}^A) \delta \vec{r}^A dt \quad (2.13)$$

Nie martwmy się!!!

Więzy, a w zasadzie tzw. więzy idealne (którymi zajmuje się mechanika analityczna), wytwarzają siły reakcji wyłącznie prostopadłe do zgodnych z tymi więzami przesunięć wirtualnych. Wariacja we wzorze (2.13) **jest więc równa zero.!**

Jeśli wyrazimy współrzędne kartezjańskie wszystkich cząstek przez f współrzędnych uogólnionych, to wariacje $\delta \vec{r}^A = \sum_{n=1}^f \frac{\partial \vec{r}^A}{\partial q_n} \delta q_n$ są automatycznie zgodne z więzami, dla dowolnych wariacji współrzędnych uogólnionych.

Tym samym funkcjonał działania:

$$\int \left(\sum \frac{1}{2} m^A (\dot{\vec{r}}^A)^2 - V \right) dt = \int \left(\sum \frac{1}{2} m^A \left(\sum_{n=1}^f \frac{\partial \vec{r}^A}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}^A}{\partial t} \right)^2 - V(x(q, t), t) \right) dt \equiv \int \tilde{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.14)$$

jest **stacjonarny** względem dowolnych wariacji δq .

Równania różniczkowe na współrzędne uogólnione q (w liczbie f) są znów równaniami E-L . Jeśli mamy za sobą przeliczenia lagranżianu, to żadne więzy, ani siły reakcji **nas nie obchodzą!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

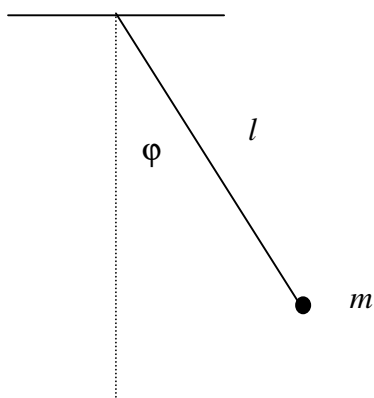
W stosunku do metody z siłami reakcji, równania Lagrange'a (zwane też równaniami Lagrange'a II rodzaju) stanowią $3N - (3N - f)$ równań zamiast $3N + (3N - f)$ równań.

W przypadku, np. bryły z jednego mola pierwiastka, daje to 6 równań, zamiast podwojonej liczby Avogadro minus 6!!!

Przykłady

Procedura wprowadzania współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami, nie musi bynajmniej sprowadzać się do rozwiązywania równań więzów wraz z równaniami wyrażającymi nowe współrzędne przez stare. Często sama definicja zmiennych q pozwala wprost wyrazić T i V przez te współrzędne.

Weźmy wahadło matematyczne o długości l . Oczywistym kandydatem na współrzędną uogólnioną jest kąt wychylenia φ



Energie: kinetyczną

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 \quad (2.15)$$

i potencjalną:

$$-mgl \cos \varphi \quad (2.16)$$

po prostu „widzimy”. Równanie Lagrange'a wypisujemy „z marszu”;

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad (2.17)$$

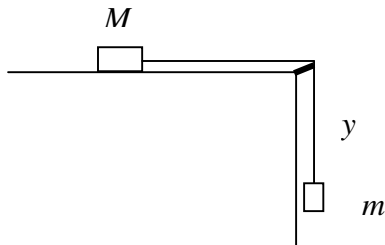
Jeśli wolimy, możemy skorzystać z całki energii:

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 - mgl \cos \varphi = \text{const} \quad (2.18)$$

Równanie (2.17) jest wygodne do zbadania małych drgań. Zastępujemy sinus kąta samym kątem uzyskując prześwietnie znane równanie oscylatora harmonicznego.

Równanie (2.18) z kolei jest użyteczne, gdy chcemy wyznaczyć **dokładnie** okres wahań. Pewną ciekawostką związaną z badaniem tego okresu zajmiemy się na ćwiczeniach.

Weźmy inny elementarny przykład, klocek ściąający ze stołu inny klocek:



Jako wielkość określającą położenie **obu** klocków możemy wybrać, np. y . Odległość dużego klocka od krawędzi to będzie $l-y$, jeśli l to długość nierozciągliwej nici. Sam stół też jest rodzajem wiązu, oczywiście.

$$L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{y}^2 + mgy \quad (2.19)$$

Równaniem ruchu jest

$$(m + M)\ddot{y} = mg \quad (2.20)$$

Wynik raczej banalny.

Powyższy „problemik” spotyka się często w najelementarniejszych podręcznikach, dla najmłodszych adeptów fizyki. Jest rzeczą zdumiewającą, jak często spotyka się „rozwiązania” w których „siła mg ” ciągnie masę M nadając jej przyspieszenie mg/M . Spotyka się polecenie wykonania pomiarów i ustalenia odwrotnej proporcjonalności przyspieszenia do masy M .

Inne, tym razem dające poprawny wynik, polegają na stwierdzeniu, że siła mg przyspiesza łączną masę $(m + M)$, więc przyspieszenie jest jak w (2.20). Pozornie jest to odwołanie wprost do prawa Newtona, pomija się jednak taki „drobiazg”, że równania Newtona są wektorowe, a przyspieszenia obu mas są ortogonalne.

Na poziomie lagranżianu powyższe stwierdzenie brzmi: energia kinetyczna jest proporcjonalna do sumy mas (energije są skalarami – ich proste dodawanie jest dozwolone), a potencjalna tylko do m . Stąd wynik.

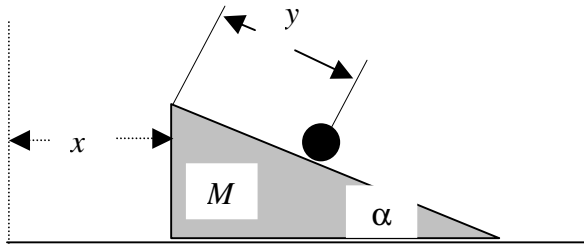
Nieco subtelniejsza wersja tego zadania zawiera bloczek o promieniu R i momencie bezwładności B . Metoda elementarna wymaga wprowadzania dwóch napięć (po dwóch stronach boczka) i prawa dynamiki dla boczka. Metodą Lagrange’a wystarczy do energii kinetycznej dodać energię kinetyczną boczka o prędkości kątowej \dot{y}/R , wynoszącą:

$$\frac{1}{2} \frac{B}{R^2} \dot{y}^2 \quad (2.21)$$

Pozwala to natychmiast zmodyfikować wynik – trzeba powiększyć sumę mas w wyrażeniu energii kinetycznej o B/R^2

$$(m + M + B / R^2) \ddot{y} = mg \quad (2.22)$$

I jeszcze jeden elementarny przykład, tym razem z dwoma stopniami swobody:



Po równi pochyłej (w kształcie ruchomego klocka o masie M), ślizgającej się bez tarcia po płaszczyźnie stacza się bez poślizgu kula o masie m . Z jakim przyspieszeniem porusza się równia?

Położenie obu ciał w przestrzeni określają w zupełności zmienne oznaczone na rysunku jako x i y . Współrzędne kartezjańskie kuli są:

$$\{x + y \cos \alpha, -y \sin \alpha\}$$

Energia kinetyczna środka masy kuli to

$$\frac{1}{2} m ((\dot{x} + \dot{y} \cos \alpha)^2 + \dot{y}^2 \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y} \cos \alpha)$$

a energia ruchu obrotowego:

$$\frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 (\dot{y} / R)^2 = \frac{1}{5} m \dot{y}^2$$

Łącznie z energią kinetyczną klina

$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2 \text{ daje to:}$$

$$T = \frac{1}{2} \left((M + m) \dot{x}^2 + \frac{7}{5} m \dot{y}^2 + 2m \dot{x}\dot{y} \cos \alpha \right)$$

$$V = -mgy \sin \alpha$$

Równanie Lagrange'a :

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{y} \cos \alpha = 0$$

$$\frac{7}{5}m\ddot{y} + m\ddot{x} \cos \alpha = mg \sin \alpha$$

Łatwo znajdujemy

$$\ddot{x} = -g \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{7}{5}M + \frac{2}{5}m + m \sin^2 \alpha}$$

Może wynik nie jest specjalnie znaczący, ale prościej tego przyspieszenia wyznaczyć na pewno się nie da!

W jednym z przykładów w ostatni czwartek pojawiło się wahadło matematyczne. Zajmowaliśmy się wahadłem już rok temu, ale tylko numerycznie. Teraz jest okazja by zająć się wahadłem jeszcze raz, posługując się jednak analizą matematyczną, a nie brutalną numeryką. Całka energii prowadzi do równania:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = const = -mgl \cos \alpha \quad (2.30)$$

gdzie literą α oznaczyłem kąt maksymalnego wychylenia (czyli amplitudę).

Jak wiadomo, tylko w przybliżeniu małych drgań, ruch wahadła jest harmoniczny, a okres wahań niezależny od amplitudy. Gdy się chce być dokładnym, albo gdy amplituda nie jest mała, trzeba umieć wyznaczyć zależność okresu wahań od tejże amplitudy.

Rozdzielenie zmiennych prowadzi do całki:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} \quad (2.31)$$

Okres wahań to jest 4-krotność czasu jaki zajmuje ciało przemieszczenie się od położenia 0 do α . Dlatego:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} \quad (2.32)$$

Powyższa postać nie jest zbyt wygodna do badania, choćby dlatego, że funkcja podcałkowa dąży do nieskończoności w punkcie zwrotu. Łatwo jest znaleźć postać dużo wygodniejszą. W tym celu wyrażamy najpierw cosinus pełnego kąta przez kwadrat sinusów połowy kąta dostając:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{2 \sin^2 \alpha / 2 - 2 \sin^2 \varphi / 2}} \quad (2.33)$$

a następnie wprowadzając nową zmienną kątową wzorem:

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi / 2}{\sin \alpha / 2}, \quad \cos \psi d\psi = \frac{\cos \varphi / 2}{2 \sin \alpha / 2} d\varphi \quad (2.34)$$

Dostajemy:

$$\begin{aligned} T &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(\alpha/2) \cos \psi d\psi}{\cos(\varphi/2) \sqrt{\sin^2 \alpha/2 - \sin^2 \psi \sin^2 \alpha/2}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\cos(\varphi/2)} = \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \psi}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Teraz całkowanie jest po stałym przedziale o długości $\pi/2$, a funkcja podcałkowa dla małych amplitud jest bliska 1.

Najprostszy sposób oceny odstępstwa od izochronizmu polega na rozwinięciu odwrotności pierwiastka w szereg Taylora

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \psi}} \approx \\ &\approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \psi\right) d\psi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\alpha/2)\right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dla amplitudy 1/10 radiana (niecałe 6 stopni), połowa amplitudy to będzie 1/20, po podniesieniu do kwadratu 1/400, a po podzieleniu przez 4 jedna 1/1600.

Funkcja:

$$K(k) = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (2.37)$$

nosi nazwę całki eliptycznej zupełnej pierwszego rodzaju.

W celu przedstawienia pewnej ciekawej własności tej funkcji, wygodniej rozważyć całkę:

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}} \quad (2.38)$$

Robimy podstawienie wymyślone przez Gaussa:

$$\sin \psi = \frac{2a \sin \vartheta}{a + b + (a - b) \sin^2 \vartheta} \quad (2.39)$$

Nowy kąt ϑ zmienia się w tym samych granicach co stary. Różniczkując (2.39) mamy:

$$\cos \psi d\psi = 2a \frac{(a+b) - (a-b)\sin^2 \vartheta}{(a+b + (a-b)\sin^2 \vartheta)^2} \cos \vartheta d\vartheta \quad (2.40)$$

Zarazem dla $\cos \psi$ mamy:

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \vartheta}}{(a+b) + (a-b)\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \quad (2.41)$$

Dzieląc stronami dostajemy:

$$d\psi = 2a \frac{(a+b) - (a-b)\sin^2 \vartheta}{(a+b) + (a-b)\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \vartheta}} \quad (2.42)$$

Z kolei sama funkcja podcałkowa wyrażona przez nową zmienną jest:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{(a+b) + (a-b)\sin^2 \vartheta}{(a+b) - (a-b)\sin^2 \vartheta} \quad (2.43)$$

Przy mnożeniu (2.42) przez (2.43) skracają się większość członów i zostaje:

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2d\vartheta}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \vartheta}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \vartheta + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2 \vartheta - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \sin^2 \vartheta}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \vartheta + (ab)\sin^2 \vartheta}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Zamiast liczyć całkę z początkowymi parametrami a i b , można uzyskać identyczny wynik licząc ją z parametrami, które są dwiema średnimi tych liczb: średnią arytmetyczną i średnią geometryczną. Obie średnie leżą wewnątrz przedziału (a,b) , są więc bliższe sobie, niż parametry wyjściowe. Zastąpienie parametrów średnimi można powtórzyć. Nowe średnie

będą jeszcze bliżej siebie. W rzeczywistości zbliżanie się owych średnich do siebie następuje niezwykle szybko

2,0000000000	1,0000000000
1,5000000000	1,4142135624
1,4571067812	1,4564753151
1,4567910482	1,4567910139
1,4567910310	1,4567910310
1,4567910310	1,4567910310
1,4567910310	1,4567910310

10,0000000000	1,0000000000
5,5000000000	3,1622776602
4,3311388301	4,1704348851
4,2507868576	4,2500273492
4,2504071034	4,2504070864
4,2504070949	4,2504070949
4,2504070949	4,2504070949

Wspólna granica owych średnich nosi nazwę średniej arytmetyczno-geometrycznej dwóch liczb. Oznaczając ją symbolem SAG(a,b), mamy dla interesującej nas całki:

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{\text{SAG}(a,b)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (2.45)$$

a dla okresu wahadła

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2) \sin^2 \psi}} = \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2 \psi + \cos^2(\alpha/2) \sin^2 \psi}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\text{SAG}(1, \cos(\alpha/2))} \end{aligned} \quad (2.46)$$

