

Wykład 3

Ruch jednowymiarowy w stałym potencjale może być albo nieograniczony, albo periodyczny. W tym ostatnim przypadku, okres drgań zależy (w ogólności) od stałej energii (czy też związanej z nią amplitudy). Przykład takiej zależności badaliśmy szczegółowo dla wahadła matematycznego w ostatni poniedziałek.

Wspominałem w zeszłym roku o ciekawych rozważaniach Bohra, który dla ruchów periodycznych (niekoniecznie jednowymiarowych), w których okres ruchu jest określoną funkcją energii, wyznaczył (w doskonałym, jak się okazuje na gruncie pełnej teorii kwantowej) poziomy energetyczny układ. Ruchy jednowymiarowe (ograniczone) są automatycznie periodyczne i okres może być tylko funkcją energii.

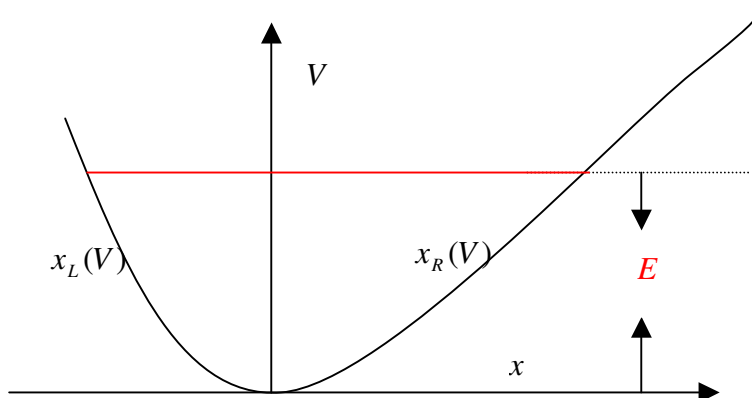
Dla atomu wodoru potencjał oddziaływania, a w konsekwencji ruch klasyczny, jest nam dany wcześniej. Wcześniej też jest nam znana zależność $T(E)$. Na tej podstawie Bohr wyznaczył $E_n \sim 1/n^2$, w zgodzie z wzorem Balmera, co jest jednym z kamieni milowych rozwoju fizyki współczesnej.

W przypadku oddziaływań atomów, tworzących molekuły, potencjał oddziaływania nie jest znany *a priori*. Trudno jest go zmierzyć dosłownie przez pomiar sił. Łatwo natomiast obserwuje się poziomy energetyczny układ, w szczególności poziomy oscylacyjny. Z układu tych poziomów określić możemy wprost, metodą Bohra, zależność okresu od energii.

Powstaje pytanie: Do jakiego stopnia znajomość zależności $T(E)$ pozwala wyznaczyć zależność $V(x)$?

Mamy równanie:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$$



Jeśli gałęzie wykresu chcemy opisywać jako $x(V)$, to musimy wprowadzić dwie gałęzie. Gdyby potencjał był **symetryczny**, funkcje te różniłyby się tylko znakiem.

Przy ustalonej energii E , oscylacje odbywają się pomiędzy wartościami $x_L(E)$, a $x_R(E)$ (Okres definiujemy jako czas przejścia w obie strony). Gdybyśmy znali $V(x)$, a więc i funkcje $x_L(E)$, i $x_R(E)$, łatwo napisalibyśmy wyrażenie na okres T :

$$T(E) = 2 \int_{x_L(E)}^0 \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))/m}} + 2 \int_0^{x_R(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))/m}} \quad (3.1)$$

Choć się to może wydać z początku **dziwaczne**, opłaca się w obu całkach zamienić zmienną x na zmienną V . Zauważmy, że w każdym z przedziałów osobno, x jest jednoznacznie funkcją V .

Mamy, w sposób oczywisty:

$$T(E)/\sqrt{2m} = \int_E^0 \frac{dx_L}{dV} \frac{dV}{\sqrt{(E - V)}} + \int_0^E \frac{dx_R}{dV} \frac{dV}{\sqrt{(E - V)}} \quad (3.2)$$

Można to przepisać tak:

$$T(E)/\sqrt{2m} = \int_0^E \left(\frac{dx_R}{dV} - \frac{dx_L}{dV} \right) \frac{dV}{\sqrt{(E - V)}} \quad (3.3)$$

W równaniu powyższym funkcja **na zewnątrz** całki jest traktowana jako **znana**, a poszukiwana jest funkcja znajdująca się pod całką. To, że jest to akurat różnica pochodnych nie ma znaczenia fundamentalnego. Oznaczając nawias jedną literą $f(V)$

$$f(V) \equiv \frac{dx_R(V)}{dV} - \frac{dx_L(V)}{dV}, \quad (3.4)$$

możemy napisać:

$$\int_0^E \frac{dV}{\sqrt{(E-V)}} f(V) = T(E) / \sqrt{2m} \quad (3.5)$$

Równanie to przypomina układ równań liniowych, tyle, że teraz z nieskończoną liczbą niewiadomych:

$$\sum a_{ev} x_v = b_e$$

Odpowiednik macierzy (numerowanej dwoma indeksami) nazywa się **jądrem** równania całkowego. Jest ono funkcją dwóch zmiennych – po jednej całkujemy z nieznaną funkcją, a otrzymać mamy z góry znaną wielkość, zależną od drugiej zmiennej.

Równanie całkowe (3.5) nazywa się równaniem Volterry. Występuje ono dość często, a jego główną zaletą jest to, że można go **rozwiązać explicite**, co jest rzadkie dla równań całkowych.

Podstawową „sztuczką” umożliwiającą jawne rozwiązanie równania Volterry jest pewna prosta całka

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi \quad (3.6)$$

(Podstawienie $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi$ przekształca naszą całkę w $\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$)

Pomysł na rozwiązanie polega na pomnożeniu równania (3.5) obustronnie przez $1/\sqrt{z-E}$ i scałkowanie po wartości E w przedziale od 0 do z . Po stronie prawej dostaniemy

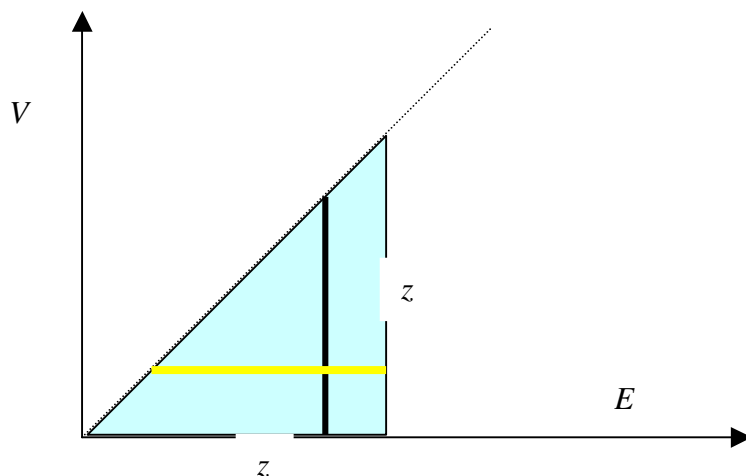
$$\sqrt{1/2m} \int_0^z \frac{T(E)dE}{\sqrt{z-E}},$$

a po lewej

$$\int_0^z \frac{dE}{\sqrt{z-E}} \int_0^E \frac{f(V)}{\sqrt{E-V}} dV = \int_0^z dE \int_0^E \frac{f(V)}{\sqrt{z-E}\sqrt{E-V}} dV$$

Całka powyższa jest **całką podwójną**.

W płaszczyźnie zmiennych E i V jest to całka po trójkącie:



Tak jak się ona pojawiła jest to najpierw całka po V przy ustalonym E , czyli całka po infitezymalnym pasku pionowym zaznaczonym na czarno w granicach od 0 do y , a potem suma po pionowych paskach, dla wszystkich E od 0 do z .

Dostaniemy w oczywisty sposób ten sam wynik, jeśli najpierw scałkujemy $\frac{f(V)}{\sqrt{z-E}\sqrt{E-V}}$ po zmiennej E przy ustalonym V , czyli po pasku żółtym w przedziale od V do $z-V$, a potem po V w granicach od 0 do z .

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{dE}{\sqrt{z-E}} \int_0^E \frac{f(V)}{\sqrt{E-V}} dV &= \int_0^z dE \int_0^E \frac{f(V)}{\sqrt{z-E}\sqrt{E-V}} dV = \\ &= \int_0^z f(V) dV \int_V^z \frac{1}{\sqrt{z-E}\sqrt{E-V}} dE = \pi \int_0^z f(V) dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zestawiając stronę lewą i prawą, mamy:

$$\pi \int_0^z f(y) dy = \sqrt{1/2m} \int_0^z \frac{T(E) dE}{\sqrt{z-E}} \quad (3.8)$$

Różniczkując obustronnie po z (i kładąc po obu stronach ponownie V zamiast z) dostaniemy:

$$f(V) = \frac{\sqrt{1/2m}}{\pi} \frac{d}{dV} \int_0^V \frac{T(E) dE}{\sqrt{V-E}} \quad (3.9)$$

Gdybyśmy, w konkretnym problemie znali $T(E)$, to wykonując najpierw całkę, a potem pochodną, mielibyśmy **jawnie** wyznaczoną poszukiwaną na początku funkcję f .

W naszym oryginalnym programie, niewiadoma funkcja f jest oznaczeniem dla innej niewiadomej funkcji (równanie 3.4). Zamiast wyliczać f poprzez różniczkowanie równania (3.8), wstawiamy do niego równanie (3.4) wyrażające niewiadomą funkcję f , przez inną, bezpośrednio nas interesującą niewiadomą:

$$\pi \int_0^z \left(\frac{dx_R(V)}{dV} - \frac{dx_L(V)}{dV} \right) dV = \sqrt{1/2m} \int_0^z \frac{T(E) dE}{\sqrt{z-E}} \quad (3.10)$$

Całki z pochodnych po stronie lewej łatwo wykonać.

Równanie powyższe jest równaniem **funkcyjnym**, będącym tożsamością dla wszystkich wartości zmiennej z – wolno w związku z tym zastąpić tę zmienną dowolną inną literą. Wracamy do oznaczenia V , dostając:

$$x_R(V) - x_L(V) = \frac{\sqrt{1/2m}}{\pi} \int_0^V \frac{T(E) dE}{\sqrt{V-E}} \quad (3.11)$$

(skorzystaliśmy również z faktu, że $x_R(0) = x_L(0) = 0$)

Możemy sprawdzić powyższy wynik, wyznaczając potencjał, z założenia symetryczny, który gwarantuje **stałość** okresu oscylacji, niezależnie od energii:

$$T(E) = T_0 \quad (3.12)$$

Całka w (3.11) jest natychmiastowa:

$$\begin{aligned} x_R(V) - x_L(V) &= 2x(V) = \frac{\sqrt{1/2m}}{\pi} \int_0^V \frac{T_0 dE}{\sqrt{V-E}} = \\ &= \frac{\sqrt{1/2m}}{\pi} 2T_0 (-1) \sqrt{V-E} \Big|_0^V = T_0 \frac{\sqrt{2V/m}}{\pi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Po podniesieniu do kwadratu, wyznaczamy:

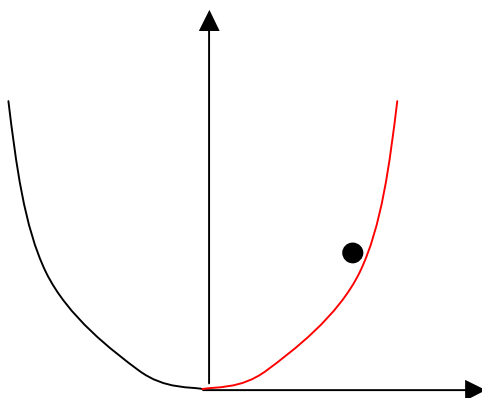
$$V(x) = \frac{m}{2} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 x^2 \quad (3.14)$$

Wynik dokładnie taki jaki powinien być dla oscylatora harmonicznego.

Aby zakończyć temat drgań i izochronizmu, rozwiążmy jeszcze jedno historyczne zagadnienie **tautochrony**.

Ciało zsuwające się bez prędkości początkowej po łuku okręgu, do jego najniższej położonego punktu, zużywa na to $\frac{1}{4}$ okresu wahań odpowiedniego wahadła matematycznego. Wiemy, że ten czas jest tylko **w przybliżeniu** niezależny od położenia początkowego. Wiele, wiele lat temu sformułowano zadanie: Jaki powinien być kształt łuku („zjeżdżalni”), by czas zsuwania był niezależny od wysokości z jakiej zaczyna się zsuwanie. Krzywej tej nadano nazwę **tautochrona**. Jest oczywiste, że gdyby zestawić takie dwa łuki, uzyskalibyśmy wahadło ściśle izochroniczne.

Opierając się na wcześniejszych rozważaniach rozwiążemy zagadnienie tautochrony w bardzo prosty sposób.



Oznaczmy odległość punktu od wierzchołka mierzoną **wzdłuż krzywej** literą s i potraktujmy to jak współrzędną uogólnioną. Gdyby krzywa była znana, to współrzędna y punktu byłaby określoną funkcją s :

$$y = y(s) \quad (3.15)$$

Energia potencjalna jest tu energią grawitacyjną:

$$V(s) = mgy(s) \quad (3.16)$$

a energia kinetyczna:

$$T = \frac{m}{2} \dot{s}^2 \quad (3.17)$$

Jeśli czas zsuwania (będący ćwiartką okresu T_0) ma być stały, to, zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, współrzędna s musi wiązać się z potencjałem według wzoru (3.13):

$$s = T_0 \frac{\sqrt{V/2m}}{\pi} = T_0 \frac{\sqrt{mgy(s)/2m}}{\pi} = T_0 \frac{\sqrt{gy(s)/2}}{\pi} \quad (3.18)$$

Interesuje nas zależność pomiędzy y i s . W celu jej wyznaczenia korzystamy z różniczkowego związku między x, y, s :

$$dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 - dy^2} = \sqrt{ds^2 - dy^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} dy \quad (3.19)$$

Z wzoru (3.18) po zróżniczkowaniu mamy:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dy} &= T_0 \frac{\sqrt{g/2y}}{2\pi} \\ \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 &= \frac{g}{2\omega^2} \frac{1}{y} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Po scałkowaniu:

$$x = \int_0^y \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1} dy = \int_0^y \sqrt{\frac{g}{2\omega^2} \frac{1}{y} - 1} dy \quad (3.21)$$

Jest to niemal dokładnie ta sama całka, która się pojawiła przy szukaniu brachistochrony. Jedyna różnica wynika stąd, że w problemie tautochrony początek układu w „naturalny” sposób wylądował w wierzchołku cykloidy, gdy w problemie brachistochrony naturalne było go umieścić w ustalonym punkcie początkowym.

Podstawienie $y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos \theta)$ prowadzi do:

$$\begin{aligned} x &= \frac{g}{4\omega^2} \int \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \theta} - 1} \sin \theta d\theta = \frac{g}{4\omega^2} \int \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \sin \theta d\theta = \frac{g}{4\omega^2} \int (1 + \cos \theta) d\theta = \\ &= \frac{g}{4\omega^2} (\theta + \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Parametr $\theta = 0$ odpowiada teraz wierzchołkowi cykloidy.

Badając nadal ruch jednowymiarowy zajmiemy się dwoma jeszcze, pokrewnymi zagadnieniami zawierającymi siły zależne od czasu, zagadnieniami, w których można ustalić pewne ogólne prawidłowości. Mam na myśli ruch w polu siły periodycznej szybko zmiennej w czasie (a wolno zmiennej w zależności od położenia), której towarzyszyć może inna, regularna siła potencjalna.

Równanie ruchu napiszemy w konwencji zmiennej kartezjańskiej, ale wynik będzie równie ważny dla innych przypadków.

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} + f(x)\cos\omega t \quad (3.23)$$

Bez wyboru konkretnego potencjału V , amplitudy $f(x)$ i częstości, o rozwiązaniu takiego równania nic oczywiście nie da się powiedzieć. Będziemy badać zachowanie takiego układu w granicy dostatecznie dużych częstości. Orientacyjnie, można powiedzieć, że okres oscylacji dodatkowej siły powinien być krótki w porównaniu ze skalą czasu charakteryzującą układ niezaburzony.

Na początek przypomnijmy jak wygląda ruch cząstki poddanej wyłącznie sile periodycznej o amplitudzie stałej:

$$m\ddot{x} = f \cos\omega t \quad (3.24)$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest ruch jednostajny, a rozwiązaniem szczególnym funkcja trygonometryczna:

$$x = At + B - \frac{f}{\omega^2} \cos\omega t \quad (3.25)$$

Już ten ścisły, banalnie łatwy przypadek ilustruje nam kilka własności ruchów, jakimi chcemy się zająć. Rozwiązanie jest sumą rozwiązania **gładko** zmieniającego się w czasie (w każdym razie, jeśli prędkość początkowa nie została wybrana szaleńczo duża) i **oscylacji** z częstością siły wymuszającej, o amplitudzie f/ω^2 , która **nawet przy ustalonej amplitudzie siły,**

niekoniecznie małej, będzie mogła być uczyniona dowolnie małą, przy wystarczająco dużej częstotliwości.

W związku z tą obserwacją, będziemy poszukiwać rozwiązania równania (3.23) w postaci sumy rozwiązania wolnozmiennego i rozwiązania periodycznego, szybko oscylującego, o **małej** amplitudzie:

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \quad (3.26)$$

Małość oscylacyjnej części rozwiązania $\xi(t)$ wykorzystamy do rozwinięcia w szereg Taylora (i zachowania najniższych istotnych wyrazów) zarówno potencjału V , jak i amplitudy siły:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = \\ = -\frac{dV(X)}{dX} - \xi \frac{d^2V(X)}{dX^2} + f(X,t)\cos\omega t + \xi \frac{df(X)}{dX}\cos\omega t \end{aligned} \quad (3.27)$$

Jeśli równanie ma być spełnione, to składniki szybko oscylujące powinny wzajemnie się skracać. Chodzi tu o składniki, które **nie są małe**. (Małymi można się nie przejmować). Takim niemałym składnikiem jest na pewno sama siła oscylująca: $f(X,t)\cos\omega t$ (wszak cosinus jest rzędu jedności, a o f nie zakładamy żadnej małości). W przeciwieństwie do siły, składnik $\xi \frac{df(X)}{dX}\cos\omega t$

jest mały. No, bo małe jest samo ξ . Dlatego możemy go pominąć. Podobnie możemy pominąć składnik $-\xi \frac{d^2V(X)}{dX^2}$

Po stronie lewej mamy tylko jeden składnik oscylujący i (ze zgrozą?) stwierdzamy, że on też jest rzędu ξ . Ale uwaga! Jest to druga pochodna harmonicznie oscylującej wielkości, a więc mnożona dodatkowo przez **duże** ω^2 . Jak duża (czy raczej jak mała) jest amplituda samego ξ , właśnie nam wyjdzie z przyrównania tego członu z lewej strony z jedynym ważnym członem oscylacyjnym ze strony prawej:

$$m\ddot{\xi} = f(X, t) \cos \omega t \quad (3.28)$$

Zależność (gładka) od czasu inna niż oscylująca, jest w tym równaniu nieważna i dostajemy

$$\xi = -\frac{f(X, t)}{m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.29)$$

(plus coś gładkiego, co zawsze można włączyć do X).

Jak dotąd, z wielkiej chmury mały deszcz. Odtworzyliśmy wynik identyczny jak dla cząstki w polu stałej (przestrzennie) oscylującej siły. Amplituda tego ruchu jest znikoma (powiedzmy, poniżej naszej obserwacyjnej zdolności rozdzielczej),

Dokończmy jednak badanie pełnego równania, w którym muszą jeszcze się zgodzić części „gładkie”.

Po stronie lewej jest jeden gładki czynnik. Po stronie prawej takim gładkim czynnikiem jest pochodna potencjału. Nie jest takim gładkim czynnikiem kolejny człon $\xi \frac{d^2 V(X)}{dX^2}$. Jest on kolejną poprawką do ξ , ale już o tym mówiłem, pomijając ten człon.

Został jeszcze wyraz ostatni: $\xi \frac{df(X)}{dX} \cos \omega t$. W pierwszej chwili można pomyśleć, że i on oscyluje. Ale w „zderzeniu” dwóch oscylacji z tą samą częstotliwością, w iloczynie dwóch cosinusów jest owo słynne $\frac{1}{2}$!!

$$\begin{aligned} \xi \frac{df(X)}{dX} \cos \omega t &= -\frac{f(X)}{m\omega^2} \cos \omega t \frac{df(X)}{dX} \cos \omega t = \\ &= -\frac{d}{dX} \frac{f^2(X)}{2m\omega^2} \left(\frac{1}{2} + \cos 2\omega t \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Człon oscylujący z podwójną częstotliwością generuje w małych oscylacjach jakąś wyższą harmoniczną i jest porównywalny z innymi pominiętymi członami. Człon odpowiadający $\frac{1}{2}$ jest **gładki**. Wchodzi on do równania na $X(t)$:

$$m\ddot{X} = -\frac{d}{dX}\left(V(X,t) + \frac{f^2(X,t)}{4m\omega^2}\right) \quad (3.31)$$

To jest smakowity wynik! Wywołująca, sama z siebie, mikroskopijne oscylacje siła, prowadzi w dłuższym czasie do **kumulatywnego** przemieszczania „środka oscylacji”, opisywanego przez X .

Małe drgania wielu stopni swobody.

Widzieliśmy już na przykładzie wahadeł sprzężonych – w gruncie rzeczy jednego z najprostszych do wyobrażenia układu fizycznego – jak beznadziejna byłaby próba analitycznego rozwiązania równań ruchu, gdyby nie przybliżenie małych drgań. Po zrobieniu tego przybliżenia, zarówno energia kinetyczna, jak i potencjalna stały się **formami kwadratowymi** (jedna zbudowana z prędkości, druga z odchyłeń od położenia równowagi). Przyglądając się tym prostym formom, łatwo odgadliśmy, jakie kombinacje pierwotnych zmiennych uznać za nowe zmienne tak, by lagranżian **rozpadł się** na sumę dwóch składników, każdy zależny tylko od jednej z nowych zmiennych. Tymi zmiennymi w owym przykładzie były suma i różnica wychyleń. Takie rozdzielenie zmiennych kończy, praktycznie, pracę nad wyznaczaniem ruchu. Każda (nowa) zmienna spełnia niezależne równanie oscylatora harmonicznego:

$$Q_i = C_i \cos(\omega_i t + \delta_i) = C_i \cos(\omega_i) + D_i \sin(\omega_i) \quad (3.32)$$

Okazuje się, że dla małych drgań, taka separacja zmiennych może być przeprowadzona dla dowolnej liczby stopni swobody, dla niemal każdej sytuacji fizycznej.

Owo „niemal” dodałem z ostrożności. Chodzi o to, iż czasami może się zdarzyć, że właściwe minimum funkcji charakteryzuje się nie tylko znikaniem pierwszej pochodnej, ale i drugiej i trzeciej. Najprostsze możliwe rozwinięcie takiej funkcji wokół położenia równowagi, gwarantujące ograniczoność ruchu, musi zawierać wtedy **czwarte** pochodne, a przybliżone (najprostsze możliwe)

wyrażenie na potencjał będzie musiało być formą jednorodną stopnia czwartego. W takim przypadku ogólne argumenty, o których za chwilę, już się nie stosują.

Po to, by mówić o drganiach, musimy mieć położenie równowagi.

Najprościej przyjąć, że mamy więzy niezależne od czasu, a współrzędne uogólnione wprowadziliśmy wzorami **też od czasu niezależnymi**: $x = x(q)$.

Lagranżian jest wtedy:

$$\frac{1}{2} \sum_{A,i} m^A \left(\sum_n \frac{\partial x^A_i}{\partial q_n} \dot{q}_n \right)^2 - V \equiv \frac{1}{2} \sum_{m,n} a_{mn}(q) \dot{q}_m \dot{q}_n - V(q) \quad (3.33)$$

Podkreślam, że pojawienie się **formy kwadratowej** energii kinetycznej nie jest związana z założeniem małości drgań, a jedynie ze skleronomicznością więzów i wyborem współrzędnych uogólnionych zbudowanych z położeń w sposób nie zawierający czasu w sposób jawny¹.

Forma kwadratowa energii kinetycznej jest **dotatnio określona**. To, że jest co najmniej półokreślona widać od razu. Czy może wartość T być zerem przy jakiejś kombinacji różnych od zera prędkości uogólnionych? Cóż by to znaczyło. Ano, że q się zmienia, a wszystkie x stoją. Oznaczało by to, że równania więzów i równania definiujące q mają **wiele** rozwiązań. Dana konfiguracja nie byłaby w jednoznacznej odpowiedniości z q . Taka sytuacja jest nie do pomyślenia, jeśli współrzędne wybrano prawidłowo.

Przy okazji tych ogólnych rozważań, warto w tym miejscu zobaczyć jak wygląda prawo zachowania związane z nieobecnością czasu w lagranżianie:

$$\sum_r \dot{q}_r \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \sum_{m,n} a_{mn}(q) \dot{q}_m \dot{q}_n - V(q) \right) - \left(\frac{1}{2} \sum_{m,n} a_{mn}(q) \dot{q}_m \dot{q}_n - V(q) \right) = T + V \quad (3.34)$$

W przypadku lagranżianu o badanej właśnie strukturze całka pierwsza jest **sumą** $T+V$. Nazywa się ją – co nikogo nie powinno dziwić – energią².

¹ Warunki powyższe są **dotateczne** by struktura lagranżianu mechaniki nierelatywistycznej była taka właśnie. Czasami, co widzieliśmy na przykładzie koralika nawleczonego na jednostajnie wirującą obręcz, więzy zależne od czasu mogą prowadzić też do lagranżianu o powyższej strukturze.

² W przypadkach, gdy analogiczna, **formalna** struktura lagranżianu jest wynikiem w pewnym sensie przypadkowym, bo zależność **od czasu**, czy to więzów, czy związków definiujących współrzędne, upraszcza się,

Skoro energia jest zachowana, a forma kwadratowa energii kinetycznej jest dodatnio określona, to w czasie ruchu spełniona być musi nierówność:

$$T = E - V \geq 0 \quad (3.35)$$

Jeśli V ma minimum, a E jest **nieznacznie** większe niż wartość w owym minimum, to (o ile V jest ciągle!) dostępny dla ruchu zakres jest ograniczony i tym mniejszy im nadwyżka energii mniejsza. W przybliżeniu „parabolicznym” rozmiary obszaru dostępnego maleją jak pierwiastek kwadratowy z amplitudy drgań. Ponieważ maksymalna wartość T jest równa tej samej nadwyżce energii, maksymalne prędkości też „skalują” się jak pierwiastek energii (mierzonej od minimum potencjału).

Dochodzimy do wniosku, że dla każdego układu omawianego typu, istnieje zakres warunków początkowych dla których amplitudy ruchu, czyli odchylenia od położenia równowagi mogą być dowolnie małe. Dla każdej wybranej dokładności, można podać taki (dostatecznie mały) zakres amplitud, dla którego człony trzeciego rzędu w małych amplitudach, będą zaniedbywalnie małe w porównaniu z członami kwadratowymi. Takie drgania, to właśnie **małe drgania**.

Energia potencjalna małych drgań jest formą kwadratową jednorodną we współrzędnych (jakbyśmy nie wybrali współrzędnych na początku, zawsze można je przededefiniować przez odjęcie ich wartości w minimum, tak by ostatecznie minimum wypadało dla $q_i = 0$.)

W formie kwadratowej energii kinetycznej rozwijanie $a(q)$ jest **zbędne**, bo człony poprawkowe z kwadratami prędkości są od razu trzeciego rzędu! Ostatecznie:

$$L = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum v_{ij} q_i q_j \quad (3.36)$$

Współczynniki a to te same a co w formule (3.33) **wzięte w położeniu równowagi**. Współczynniki v_{ij} są formalnie wartościami w położeniu równowagi **drugich pochodnych potencjału**. W praktyce rzadko liczymy te

ani forma kwadratowa prędkości uogólnionych nie jest energią kinetyczną w jakimś układzie inercjalnym, ani część pozornie potencjalna nie jest energią potencjalną, ani całka ruchu nie jest energią całkowitą.

drugie pochodne – korzysta się raczej z posiadanych w „pamięci operacyjnej” rozwinięć Taylora takich funkcji jak pierwiastek, czy cosinus.

Po sformułowaniu zagadnienia małych drgań jako zagadnienia ruchu układu opisanego lagranżianem (3.36), można by wypisać równania ruchu i odwoływać się do teorii równań różniczkowych liniowych.

Według mnie celowym jest (ze względu na rozmaite uogólnienia jakie nas czekają w układach bardziej złożonych, np. takich jak pole elektromagnetyczne, czy drgający kryształ), zamiast wypisywać równania **już, od razu** po wyznaczeniu w danym problemie obu form kwadratowych, zająć się znalezieniem takiej **zamiany zmiennych**, która doprowadzi obie te formy kwadratowe **równocześnie** do **postaci diagonalnej**.

Co daje diagonalność form? Oczywiście lagranżian kwadratowy zdiagonalizowany (nazwijmy współrzędne diagonalizujące Q):

$$L = \frac{1}{2} \sum \alpha_i \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum v_i Q_i^2 = \sum \left(\frac{1}{2} \alpha_i \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} v_i Q_i^2 \right) \quad (3.37)$$

jest automatycznie lagranżianem z **rozseparowanymi** zmiennymi!!!

Równania (oscylatorowe) dla każdej nowej współrzędnej Q są niezależne od siebie. Każde z nich zawiera kolejną współrzędną Q (i swoistą wartość częstości). Rozwiązania dane są antycypowanymi wzorami (3.32)

Stałe całkowania są dowolne. Nic nie stoi na przeszkodzie wybrać tak warunki początkowe, by **tylko** jedna ze stałych ($C_1, C_2, \dots, C_f$) była różna od zera. Rozwiązanie takie, to znane nam z bardziej elementarnych konkretnych przykładów **drganie normalne**. Jest ono harmoniczne z określoną częstością. Pierwotne współrzędne **wszystkie** drgają z tą częstością i fazą. Wartość amplitudy zawarta jest w **liniowym związku**

$$q_i = \sum U_{ij} Q_j, \quad (3.38)$$

który „zrobił dla nas” diagonalizację. Gdy tylko jedno z Q (o indeksie j_0) jest różne od zera, mamy:

$$q_i = U_{i j_0} Q_{j_0} = U_{i j_0} C_{j_0} \cos(\omega_{j_0} t + \delta_{j_0}) \quad (3.39)$$

W ogólnym przypadku ruch jest **superpozycją** takich drgań normalnych.

Wyznaczenie wszystkich U i wszystkich wartości „przekątniowych” macierzy po diagonalizacji (określających częstości drgań normalnych) to jest zadanie już czysto algebraiczne. Rzecz jasna, przy bardziej konwencjonalnym podejściu, po wypisaniu układu równań liniowych (i po rozważaniach argumentujących, że rozwiązania ogólnego trzeba szukać jako superpozycji rozwiązań periodycznych) dochodzi się do tego samego zadania algebraicznego.

Podejście lagranżowskie jest o tyle naturalniejsze, że gdy w przyszłości zaczniemy zastanawiać się jak drgający układ zachowuje się w określonej temperaturze, albo jak skwantować taki układ – odpowiedź dostaniemy od razu, gdy wiemy co dzieje się z **jednym oscylatorem** w takich warunkach. Znajomość rozwiązania układu równań Newtona jako superpozycji drgań normalnych nie daje natychmiastowej odpowiedzi.

O ile wiem, zagadnienie równoczesnej diagonalizacji dwóch macierzy symetrycznych rozważaliście na zajęciach z matematyki. Na wszelki wypadek króciutko przedstawię w czym rzecz.

Diagonalizację macierzy za pomocą **byle jakiego** przekształcenia liniowego zrobić jest banalnie łatwo!

Zacząć można od zlikwidowania wyrazów mieszanych zawierających q_1 . W tym celu wyłączamy a_{11} sprzed wszystkich wyrazów z q_1 i uzupełniamy do pełnego kwadratu:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^f a_{ij} q_i q_j &= a_{11} (q_1^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} q_1 q_2 + \dots 2 \frac{a_{1f}}{a_{11}} q_1 q_f) + \sum_{i,j=2}^f a_{ij} q_i q_j = \\ &= a_{11} (q_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} q_2 + \dots \frac{a_{1f}}{a_{11}} q_f)^2 - a_{11} (\frac{a_{12}}{a_{11}} q_2 + \dots \frac{a_{1f}}{a_{11}} q_f)^2 + \sum_{i,j=2}^f a_{ij} q_i q_j \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nazywamy sumę w nawiasie, np. literą y_1 . Jeszcze lepiej w definicję zmiennej y_1 włączyć $\sqrt{a_{11}}$:

$$y_1 = \sqrt{a_{11}} \left(q_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} q_2 + \dots + \frac{a_{1f}}{a_{11}} q_f \right) \quad (3.41)$$

$$\sum_{i,j=1}^f a_{ij} q_i q_j = y_1^2 + \sum_{i,j=2}^f a_{ij} q_i q_j - a_{11} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} q_2 + \dots + \frac{a_{1f}}{a_{11}} q_f \right)^2 \quad (3.42)$$

Dwa ostatnie człony nie zawierają zmiennej q_1 – tworzą natomiast dodatnio określoną symetryczną formę $f-1$ zmiennych, w której można powtórzyć procedurę z wyrzuceniem kolejnej zmiennej w zamian za dodanie członu y_2^2 , i tak, aż do końca.

Nie tylko możemy **bez kłopotu** zdiagnozować jedną macierz, ale nawet uzyskać w niej wszystkie współczynniki równe (nawet równe 1).

W praktycznie spotykanych zadaniach bywa często, że jedna z macierzy (niekoniecznie energia kinetyczna, choć trafia się to częściej) jest **od początku** diagonalna, czy wręcz jednostkowa. Wtedy ta część algebraicznych przekształceń nie występuje.

W procesie „standaryzacji” jednej z macierzy pojawiają się kolejne liniowe związki między nowymi zmiennymi y , a oryginalnymi współrzędnymi. Odwracając je, co jest banalne ze względu na malejącą, aż do 1, liczbę zmiennych q wchodzących do określenia kolejnych y , wyznaczamy $q(y)$, a to po wstawieniu do **drugiej formy kwadratowej** robi z niej jakąś nową formę kwadratową.

Jeśli zaczęliśmy od energii kinetycznej i to ją sprowadziliśmy do postaci jednostkowej, to na tym etapie lagranżian jest:

$$\frac{1}{2} \sum \dot{y}_i^2 - \frac{1}{2} \sum v_{ij} y_i y_j \quad (3.42)$$

gdzie nowa forma kwadratowa powstała po uporządkowaniu wyrazów w formie $V = \frac{1}{2} \sum v_{ij} q_i q_j$ po wyrażeniu w niej wszystkich q przez $q(y)$.

Powtórzenie procedury diagonalizacji w odniesieniu do macierzy v nie może doprowadzić do celu, bo **byle jakie** przekształcenia liniowe diagonalizujące v niemal na pewno **popsują** diagonalność **ślicznej** w tym momencie macierzy energii kinetycznej!

Tutaj wchodzimy w problem algebraiczny znacznie **subtelniejszy** niż banalne uzupełnianie trójmianu do pełnego kwadratu znane dobrze z liceum.

Śliczna macierz **jednostkowa** zwraca naszą uwagę na przekształcenia liniowe, już nie **byle jakie**, ale szczególne, tj. takie, które **nie zmieniają sumy kwadratów**. Przekształcenie zmiennych wstawione do sumy kwadratów, ma dać po wszystkich podniesieniach do kwadratu długich sum i redukcji wyrazów podobnych, na powrót sumę kwadratów, ale już nowych zmiennych.

Przekształcenia takie istnieją i – jak się okazuje – jest ich wystarczająco dużo, by wśród nich dobrać, chociaż jedno, które **zdiagonalizuje tę drugą** macierz, pozostawiając tę pierwszą nadal w postaci **jednostkowej** (a więc też diagonalnej).

Gdy zmienne x_1, x_2, x_3 są współrzędnymi punktu w kartezjańskim układzie współrzędnych, to $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jest **kwadratem odległości** punktu od początku układu współrzędnych. Wzięcie drugiego układu osi (wychodzących z tego samego punktu) prowadzi do nowych współrzędnych **tego samego** punktu, związanych liniowo z współrzędnymi starymi:

Oznaczając wersory układu „starego” $\vec{e}_i$ i nowego $\vec{e}'_i$ mamy:

$$\sum \vec{e}_i x_i = \sum \vec{e}'_i x'_i \quad (3.43)$$

Dzięki **ortogonalności** (i unormowaniu) wersorów o różnych indeksach, jeśli pomnożymy równość (3.43) stronami przez $\vec{e}_j$, dostaniemy:

$$x_j = \sum (\vec{e}_j \vec{e}'_i) x'_i \quad (3.44)$$

Pojawiła się macierz iloczynów skalarnych (o interpretacji cosinusów kątów pomiędzy wersorami należącymi do różnych „trójek”).

Jeśli wstawimy (3.44) do sumy kwadratów, to nadal będzie to kwadrat odległości od (wspólnego) początku układu do rozpatrywanego punktu, ale wyrażony przez współrzędne primowane. Można sprawdzić bezpośrednio, ale jest to też oczywista oczywistość, że wyjdzie znów suma kwadratów, tyle, że zmiennych primowanych. Można sprawdzić bezpośrednio, ale jest to też oczywista oczywistość, że wyjdzie znów suma kwadratów, tyle, że zmiennych primowanych. Macierz $\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i$ jest najklasyczniejszym z klasycznych przykładem **macierzy ortogonalnej**.

Chcąc ująć bardziej ogólnie jej decydującą cechę, znajdziemy odwrotny związek, wyrażający nowe zmienne przez stare. Będzie to z jednej strony **rozwiązanie** układu równań (3.44), z drugiej zaś związek **analogiczny** do (3.44) otrzymany z pomnożenia (3.43) przez wersor $\vec{e}'_j$

$$x'_j = \sum (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j) x_i \quad (3.45)$$

Odczytujemy wprost, że macierz $\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j$ jest **odwrotna** do macierzy $\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i$. Jest to **zarazem** macierz **transponowana**.

$$U^{-1} = U^T \quad (3.46)$$

Niech związek między (poszukiwanymi) współrzędnymi Q , a pośrednimi współrzędnymi y będzie dany macierzą ortogonalną:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_f \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_f \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

W skrócie:

$$y = UQ \quad (3.48)$$

Chcąc mieć wiersz zbudowany ze współrzędnych mogą równania powyższe transponować:

$$(y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_f) = (Q_1 \ Q_2 \ \cdots \ Q_f) U^T$$

W skrócie:

$$y^T = Q^T U^T \quad (3.49)$$

Suma kwadratów to

$$\sum y_i^2 = y^T y = Q^T U^T U Q = Q^T Q = \sum Q_i^2 \quad (3.50)$$

Jeśli macierz transponowana jest równa odwrotnej, to macierz stojąca pomiędzy Q^T a Q jest macierzą jednostkową. I odwrotnie. Powyższy wynik jest słuszny dla dowolnej liczby wymiarów.

Szansa na równoczesną diagonalizację dwóch macierzy będzie wtedy, gdy ograniczając zamianę współrzędnych do postaci (3.48) uzyskamy z formy kwadratowej $\sum v_{ij} y_i y_j$ formę diagonalną.

Posługując się notacją macierzową, mamy warunek na U :

$$\sum v_{ij} y_i y_j = y^T V y = Q^T U^T V U Q = Q^T D Q \quad (3.51)$$

gdzie D jest macierzą diagonalną.

Stąd:

$$U^T V U = D \quad (3.52)$$

Jeżeli pomnożymy obustronnie przez U , to dzięki temu, że macierz transponowana jest zarazem odwrotną (oraz dzięki temu, że mnożenie macierzy jest łączne), dostaniemy:

$$V U = U D \quad (3.53)$$

W powyższym równaniu nie znamy ani U , ani D , chcemy tylko by D było diagonalne. Zobaczmy jak wygląda prawa strona powyższego równania:

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{1f} \\ U_{21} & \dots & \\ \vdots & & \\ U_{f1} & & U_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & D_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 U_{11} & D_2 U_{12} & D_f U_{1f} \\ D_1 U_{21} & \dots & \\ \vdots & & \\ D_1 U_{f1} & & D_f U_{ff} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Poszczególne kolumny iloczynu macierzy VU w (3.53), zgodnie z reguła „wiersze przez kolumny”, mieć będą w każdej kolumnie **tylko** iloczyny zawierające elementy macierzy U z kolumny o tym samym numerze. Np. pierwsza kolumna to będzie:

$$VU = \begin{pmatrix} V_{11}U_{11} + V_{12}U_{21} + \dots \\ V_{21}U_{11} + V_{22}U_{21} + \dots \\ \dots \\ V_{f1}U_{11} + V_{f2}U_{21} + \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} () & () & () \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

W kolumnie o numerze k będziemy mieć iloczyn macierzy V i k -tej kolumny macierzy U

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{1f} \\ V_{21} & \dots & \\ \vdots & & \\ V_{f1} & & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1k} \\ U_{2k} \\ U_{fk} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Równanie (3.53) wymaga, by kolumna ta była taka jak kolumna w równaniu (3.54), gdzie jest to iloczyn D_k i kolumny macierzy U :

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{1f} \\ V_{21} & \dots & \\ \vdots & & \\ V_{f1} & & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1k} \\ U_{2k} \\ U_{fk} \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} U_{1k} \\ U_{2k} \\ U_{fk} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

To jest podstawowy wynik!

Nie przeraża nas teraz, że mamy f równań na $f+1$ niewiadomych. Przy każdej wartości D , jest to układ równań jednorodnych na elementy macierzy U , który ma niezerowe rozwiązania tylko, jeśli wyznacznik macierzy wynosi 0:

$$\det \begin{pmatrix} V_{11} - D & V_{12} & & V_{1f} \\ & V_{21} & \cdots & \\ & \vdots & & \\ V_{f1} & & & V_{ff} - D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.58)$$

Równanie powyższe jest algebraicznym równaniem stopnia f mającym f pierwiastków rzeczywistych (niekoniecznie różnych). Wybierając za D , któryś z tych pierwiastków i wstawiając do (3.57), dostajemy układ f równań na f niewiadomych. Równania te są liniowo zależne. Gdy krotność pierwiastka jest 1, rozwiązania określone są z dokładnością do wspólnego czynnika. Ale macierz ortogonalna ma sumę kwadratów wyrazów w każdej kolumnie (podobnie jak w wierszu) równą 1. To pozwala ustalić wyrazy w k -tej kolumnie z dokładnością już tylko do znaku, który wybieramy, jak nam najwygodniej.