Wykład 6

Zajmiemy się dzisiaj bryłą sztywną. Bryłę sztywną możemy rozpatrywać jako zbiór wielu punktów materialnych, między którymi działają siły mające bardzo głębokie minima potencjału, co oznacza praktycznie, że odległości między wszystkimi możliwymi parami punktów są stałe. Jest to klasyczna sytuacja układu z więzami. Pierwsza rzecz, którą musimy ustalić, to liczba stopni swobody takiego układu.

Mówiliśmy już o tym rok temu, liczbę sześć łatwo odtworzyć. Ustawienie trzech wybranych (jakkolwiek, byle nie współliniowo) punktów bryły w „docelowych" miejscach, wyznacza położenia wszystkich pozostałych, skoro ich odległości do owych trzech są ustalone[1]. Liczba stopni swobody bryły jest identyczna jak dla trójkąta utworzonego z trzech punktów materialnych sztywno połączonych.

Ustalenie położenia trójkąta można dokonać lokując najpierw punkt A (trzy liczby, np. współrzędne kartezjańskie). Punkt B musi już teraz pozostawać na sferze o promieniu l_{AB}. Opis położenia na tej sferze może zawierać np. długość i szerokość geograficzną (2 liczby). Gdy A i B już są ustalone, punkt C musi znaleźć się na okręgu powstałym przez obrót wokół osi AB.

Pierwsze trzy stopnie swobody związane z właściwym ulokowaniem wybranego punktu bryły są bardzo podobne do trzech stopni swobody pojedynczego punktu materialnego. Pozostałe trzy mają wyraźnie odmienny charakter.

W przypadku najogólniejszym może zachodzić sprzężenie ruchu postępowego i obrotowego. Wtedy wszystkie sześć stopni swobody (albo ich mniejszą liczbę, ale zawierającą oba rodzaje) trzeba rozpatrywać równocześnie. By móc to jednak robić, trzeba poznać właściwości samego ruchu obrotowego. Istnieje zresztą mnóstwo sytuacji praktycznych, gdy ruchem postępowym zajmować się nie musimy.

Typowe dwie sytuacje, gdy problem ruchu obrotowego jest problemem samym w sobie, to:

---

[1] Istnieje punkt położony zwierciadlanie do danego, o identycznych odległościach do wybranych trzech punktów odniesienia. Konfiguracja, w której wszystkie punkty przeszłyby w położenia lustrzane (względem jakiejś płaszczyzny) spełniałaby formalnie wszystkie równania więzów. Nie da się jednak do niej dojść inaczej, niż poprzez stany pośrednie, w których odległości między punktami ulegają zmianie. Zresztą ciało po takiej transformacji (poza specjalnymi przypadkami symetrii), jest zdecydowanie innym ciałem – np. lewa rękawiczka przekształciłaby się w prawą.

1)Jeden punkt ciała jest fizycznie unieruchomiony. Tak jest, na przykład w znanej zabawce, której oś obrotu jest ostro zakończona, a powierzchnia na której stawiamy rozkręconego bąka wystarczająco chropowata. Inny przykład to zawieszenie Cardana zbudowane z trzech pierścieni. Pierścień zewnętrzny jest nieruchomy i służy do osadzenia (na krótkich ośkach) drugiego pierścienia, mniejszego, mogącego obracać się swobodnie. Wewnątrz niego umieszczony jest na podobnych krótkich półośkach, trzeci pierścień. W tym trzecim pierścieniu też jest zamocowane są półośki, do których przytwierdzone jest ciało mogące się swobodnie obracać. Punkt ciała, który znalazł się we (wspólnym) środku trzech pierścieni pozostaje nieruchomy.
2)Ciału nie ograniczono żadnego z 6 stopni swobody, ale działające siły zewnętrzne są takie, że ich **suma** jest niezależna od orientacji ciała, a (co najwyżej) od położenia środka masy. W tej sytuacji równanie ruchu środka masy (przerabialiśmy to na Wstępie do Fizyki) jest identyczne z równaniem punktu materialnego, na które działa znana siła. Wprowadzając układ odniesienia (w ogólności nieinercjalny), którego początek pokrywa się ze środkiem masy, dostajemy równania opisujące obrót, identyczne jak dla bryły z unieruchomionym punktem (tymże środkiem masy). Układ nieinercjalny o którym mowa, jest nieinercjalny ze względu na przyspieszony ruch początku układu, ale jego osi **muszą** być cały czas równoległe do osi jakiegoś układu inercjalnego. Typowe będzie tu badanie obrotu Ziemi w układzie odniesienia wędrującym wraz z Ziemią, ale z osiami skierowanymi do ciągle tych samych gwiazd. Wprawdzie w układzie nieinercjalny pojawia się dodatkowa siła działająca na każdy punkt bryły, ale jest ona postaci $-m_i\vec{a}$. Dla ruchu obrotowego znaczenie ma (jak pamiętamy) wypadkowy moment siły, a ten dla powyższej siły bezwładności **dokładnie znika**, gdy jest liczony względem środka masy.

W dalszym ciągu zajmiemy się taką właśnie sytuacją, gdy jeden z punktów ciała jest unieruchomiony (bądź faktycznie, bądź przez wybór układu odniesienia współwędrującego ze środkiem masy). W przypadku fizycznego unieruchomienia (w układzie **inercjalnym**), unieruchomiony punkt może być dowolny. Pojawia się wprawdzie w takim przypadku siła reakcji, ale jest ona przyłożona w tym punkcie i znów jej moment **znika**. Nie musimy się o nią troszczyć.

Ograniczając się do czystych obrotów, a więc do tych 3 szczególnych stopni swobody, które kojarzą się (przede wszystkim) z pojęciem dynamiki bryły sztywnej, wygodnie jest wprowadzić pojęcie układu współrzędnych **sztywno związanego z bryłą** o początku w **unieruchomionym** punkcie (lub w **środku masy**). W tym układzie, (będziemy go nazywali układem bryły, lub układem ruchomym, czy obracającym się) współrzędne wszystkich punktów bryły mają współrzędne **stałe w czasie.** Układów takich jest nieskończenie wiele, ale nie każdy okaże się równie przydatny do opisu ruchu bryły. Gdy bryła ma symetrię obrotową (z osią przechodzącą przez punkt unieruchomienia!), naturalne będzie wybrać jedną z osi układu wzdłuż tej osi symetrii (tradycja powoduje, że jest to zawsze oś nr 3, albo oś z – ów). Pozostałe 2 wybieramy prostopadle do niej, a każdy z wyborów jest równoprawny. Gdy nie ma żadnej symetrii, okaże się, że istnieją 3 wyróżnione przez konkretny rozkład mas kierunki wygodniejsze od innych. Ale o tym - potem.

Mamy więc prostokątny układ współrzędnych sztywno związany z bryłą i **układ o osiach stałych względem gwiazd** i wspólnym początku z układem bryły. Ten wspólny początek albo spoczywa w jakimś układzie inercjalnym, albo jest środkiem masy i – na przykład – swobodnie spada w jednorodnym polu grawitacyjnym, ale to nie wpływa nijak na **ruch osi** układu bryły.

Ruch osi, czy też obrót kartezjańskiego układu bryły staje się tożsamy z ruchem bryły. Daje to wygodne możliwości analitycznego rozważania ruchu bryły z ograniczeniem do minimum konieczności robienia przestrzennych rysunków i wysilania wyobraźni geometrycznej.

Kiedy mamy dwa układy kartezjańskie od razu pojawia się **macierz ortogonalna**:

$$c_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}'_j \tag{1}$$

„cosinusów kierunkowych”. Są to iloczyny skalarne wersorów (a więc cosinusy) układu bryły (pisane z „primem”) i wersorów układu nieruchomego.

Wyrazy w kolumnach tej macierzy (ustalone j biegnące i) mają sens współrzędnych **primowanego** wersora $\vec{e}_j'$ w układzie nieprimowanym a wyrazy w wierszach, sens współrzędnych wersora $\vec{e}_i$ w układzie primowanym. Wynika z tego, że zarówno iloczyn skalarny różnych wierszy, jak i różnych kolumn znika, a suma kwadratów jest jednością.

Znajomość tej macierzy pozwala na wyrażenie jednych wersorów przez drugie, oraz na wyrażenie współrzędnych danego wektora (obojętnie jakiego – czy to współrzędnej punktu bryły, czy punktu zewnętrznego, czy jakiejś siły zewnętrznej, czy pola magnetycznego, czy wreszcie prędkości kątowej jaka wkrótce się pojawi). Mamy więc:

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i \cdot \vec{e'}_j \overrightarrow{e'}_j \tag{2}$$

Sumę po powtarzającym się indeksie rozumiemy automatycznie. Kropka oznacza iloczyn skalarny, który trzeba wykonać przed kolejnym mnożeniem (jak zwykle wynikającym z postawienia symboli obok siebie). Wzór powyższy wyraża sens współrzędnych kartezjańskich. Jest to kombinacja wersorów (suma po *j*), a współczynnikami kombinacji są rzuty rozkładanego wektora na kolejne wersory. Z tych samych powodów:

$$\vec{e'}_i = \overrightarrow{e'}_i \cdot \vec{e}_j \vec{e}_j \tag{3}$$

Iloczyny skalarne w powyższych wzorach, to nasza macierz. Trzeba tylko uważać na indeksy. Przyjęliśmy, że pierwszy (numer wiersza) odpowiada wersorowi układu nieruchomego. Mamy więc:

$$\vec{e}_i = c_{ij}\vec{e'}_j \tag{4}$$

Oraz

$$\vec{e'}_i = c_{ji}\vec{e}_j = (c^T)_{ij}\vec{e}_j \tag{5}$$

Zgodnie z konwencją mnożenia „wierszy przez kolumny” ostatni wzór oznacza, że macierzą odwrotną do C jest macierz transponowana. Czyli:

$$c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk} \text{ oraz } c_{ji}c_{ki} = \delta_{jk} \tag{6}$$

Ponieważ współrzędne wektora to są jego iloczyny skalarne z wersorami, przeto

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i = c_{ij}\vec{A} \cdot \vec{e'}_j = c_{ij}A'_j \tag{7}$$

I analogicznie:

$$A'_i = \vec{A} \cdot \vec{e}'_i = c_{ji}\vec{A} \cdot \vec{e}_j = (c^T)_{ij}A_j \tag{8}$$

Przy podejściu analitycznym do geometrii, słowo wektor kojarzy się często ze współrzędnymi, czyli kolumną liczb. Wobec **względności** współrzędnych, należy rozumieć, że wektor to raczej sposób **przypisania** każdemu układowi współrzędnych trójki liczb w taki jednak sposób, by trójki te w różnych układach wiązały się ze sobą za pomocą wzoru (7).

Oczywiście, gdy takie trójki wyznaczamy **mierząc** w różnych układach składowe konkretnego, fizycznego wektora, to wzór (7) musi zachodzić. Jeśli jednak podam algorytm utworzenia trójki liczb w każdym układzie, a algorytm nie będzie właściwy, dostanę coś **co nie jest wektorem.** Na przykład, tworząc ze współrzędnych „dobrego" wektora trójkę

$$(A_1, A_2, 2A_3) \tag{9}$$

Dostajemy coś, co ewidentnie wektorem **nie jest.** (Niedowiarkom pozostaje sprawdzić).

Ale są i **dobre** algorytmy! Na przykład trójka pochodnych

$$\left(\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\right) \tag{10}$$

jest świetnym przykładem wektora (obok numeracji *x*-ów od 1 do 3, stosuje się też oznaczenia *x,y,z*). Pod warunkiem, że $\varphi(x, y, z)$ jest skalarem. Inne świetne algorytmy, to kombinacje liniowe obiektów, o których już wiemy, że są wektorami.

Z wektorów tworzymy skalary! Dlaczego „iloczyn skalarny" (suma iloczynów współrzędnych) jest skalarem? Zobaczmy:

$$A'_i B'_i = c_{ji}A_j c_{ki}A_k = \delta_{jk}A_j A_k = A_k A_k \tag{11}$$

Skorzystaliśmy ze wzoru (6) i własności δ - ty Kroneckera.

Wyrażenie utworzone ze **względnych** współrzędnych jest **niezależne od układu** w którym je obliczamy. Skalar, to inaczej **niezmiennik, inwariant.** A nie, po prostu, liczba.

Niesłychanie ważne dla fizyki jest pojęcie tensora. W przestrzeni płaskiej, we współrzędnych kartezjańskich tensorem drugiego rzędu nazywa się **dziewiątka liczb** ułożonych w tabelę (czyli macierz 3×3), **przypisana każdemu układowi**, tak określona, liczona, czy mierzona, że elementy tej macierzy w różnych układach wiążą się między sobą tak jak macierz iloczynów wektorów:

$$A_i B_j = c_{ik} A'_k c_{jl} A'_l = c_{ik} c_{jl} A'_k A'_l \tag{12}$$

$$T_{ij} = c_{ik} c_{jl} T_{kl} \tag{13}$$

Tensorem może być, na przykład suma pewnej liczby iloczynów takich jak we wzorze (8), albo, na przykład, macierz pochodnych składowych pola wektorowego po 3 współrzędnych kartezjańskich:

$$\frac{\partial A_i(x,y,z)}{\partial x_j} \tag{14}$$

Liczby układające się w ową macierz, to współrzędne tensora. Bez trudu wyobrażamy sobie tensory z dowolną ilością wskaźników.

Jeśli w prawie transformacyjnym takiego tensora dowolnego rzędu:

$$T_{i\cdots j\cdots} = c_{ik} \cdots c_{jl} \cdots c_{..} T_{k\cdots l\cdots} \tag{15}$$

nadamy dwóm wskaźnikom tę samą wartość i **przesumujemy** od 1 do 3 (operacja nazywa się **zwężeniem**), to ze względu na relację (6) z dwóch macierzy wypisanych *explicite* w powyższym wzorze zrobi się delta Kroneckera i:

$$T_{i\dots i\dots} = c_{ik} \cdots c_{il} \cdots c_{..} T_{k\dots l\dots} =$$

$$= \delta_{kl} \cdots c_{..} \cdots T_{k\dots l\dots} = \cdots c_{..} \cdots T_{l\dots l\dots} \qquad (16)$$

gdzie kropki symbolizują $n - 2$ macierzy C transformujących pozostałe indeksy.

Oznacza to, że po zwężeniu dostajemy tensor rzędu o 2 niższym od wyjściowego.

Tensory potrzebne są do zapisywania praw fizyki uwzględniających faktyczną izotropowość przestrzeni. Jeśli bowiem pewne prawo tensorowe jest spełnione w jednym układzie współrzędnych, to **automatycznie** jest spełnione w innych, obróconych. A różne obrócone układy kartezjańskie są **równouprawnione**, skoro przestrzeń sama z siebie nie wyróżnia kierunku wskazując nam jak wybrać oś z, na przykład.

Dotychczas podkreślałem zależność współrzędnych od układu. Czy są tensory o współrzędnych **numerycznych?** Stałych, czy raczej jednakowych w każdym układzie?

Są takie dwa podstawowe tensory (i wszelkie z nich zbudowane w sposób „legalny" dla tworzenia tensorów).

Popatrzmy na znany nam wzór (6) przepisany nieco inaczej:

$$c_{ji} c_{ki} = \delta_{jk} = c_{ji} c_{km} \delta_{im} \qquad (17)$$

Jest to wzór transformacyjny dla tensora drugiego rzędu o współrzędnych stanowiących diagonalną macierz (*de facto* jednostkową) w układzie primowanym. Jego współrzędne w układzie nieprimowanym to **ta sama delta Kroneckera**.

Dla badania obrotów (i nie tylko) potrzebna jest znajomość drugiego (pseudo)tensora numerycznego.

Następujące wyrażenie zwane jest symbolem Levi Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \; i,j,k \quad \text{parzysta} \\ -1 \; i,j,k \; \text{nieparzysta} \\ 0 \text{ gdy dwa (trzy) ineksy równe} \end{cases} \qquad (18)$$

Sam zapis sugeruje, że jest to tensor, ale to trzeba sprawdzić. Przyjmijmy więc, że istnieje tensor, który w pewnym akurat układzie współrzędnych (np. tym, który nazywamy „primowanym") ma wartości współrzędnych takie jak w równaniu (18). **Policzmy jego wszystkie** współrzędne w innym układzie według wzoru (16). Oto one:

$$c_{mi} c_{nj} c_{pk} \varepsilon_{ijk} \tag{19}$$

Jest to 27 liczb, dla wszystkich 3^3 kombinacji zestawu *m,n,p*. Zacznijmy od 1,2,3. Suma zawiera teraz znów 3^3 kombinacji, ale zestawu *i,j,k*. Spośród nich, tylko 6 jest różnych od zera – tych dla których *i,j,k* jest którąś z permutacji ciągu 1,2,3. W trzech z tej szóstki symbol „epsilon" przyjmuje wartość 1 w pozostałych -1. Iloczyn trzech elementów macierzowych to jest kolejno element z pierwszego wiersza i *i* – tej kolumny, drugiego wiersza i (innej) *j* – tej kolumny i trzeciego wiersza i *k* – tej kolumny wzięty ze znakiem plus bądź minus. Jest to **dokładnie** definicja wyznacznika macierzy C.

Jeżeli zamiast kombinacji 1,2,3 dla indeksów *m,n,p* wybiorę 2,2,3 też dostanę wyznacznik, ale macierzy w której kolumna pierwsza została zastąpiona drugą (a druga bez zmiany). Wyznacznik taki jest zerem.

Różny od zera wynik wyjdzie **wyłącznie** gdy indeksy *m,n,p* stanowią jakąś permutację 1,2,3. Wyznacznik dostaniemy dla permutacji parzystej, **minus wyznacznik** dla permutacji nieparzystej. Ostatecznie:

$$c_{mi} c_{nj} c_{pk} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{mnp} |C| \tag{19}$$

Gdyby nie ów wyznacznik, już byśmy stwierdzili, że epsilon jest tensorem.

W rzeczywistości, że względu na ortogonalność macierzy C, oraz z faktu, że wyznacznik iloczynu macierzy jest iloczynem wyznaczników:

$$1 = \mathrm{Det}(1) = \mathrm{Det}(c\, c^T) = \mathrm{Det}(c\,)\mathrm{Det}(c^T) = (\mathrm{Det}(\mathrm{c}))^2 \tag{20}$$

Wyznacznik macierzy C musi być, chciał nie chciał, równy albo $+1$, albo -1.

Od czego to zależy? Układy powstałe przez ciągłą transformację muszą być powiązane z wyjściowym układem macierzą o wyznaczniku 1. Znak „–" pojawia się, gdy zmienić orientację, np. z prawoskrętnej na lewoskrętną, lub odwrotnie.

Dlatego „epsilon” nie jest zwykłym tensorem. Gdy pamiętamy o owym znaku, nic złego się nie dzieje. Całkowicie antysymetryczny pseudotensor Levi Civity jest niezwykle użytecznym narzędziem.

Po pierwsze, iloczyn parzystej liczby pseudotensorów jest już „zwykłym” tensorem. Po drugie, prawo fizyki zawierające po obu stronach pseudotensor jest tak samo dobre jak równanie z tensorami. W fizyce klasycznej to wyczerpuje temat.

Z symbolu Levi - Civity i dwóch wektorów można utworzyć pseudowektor. Oto przepis:

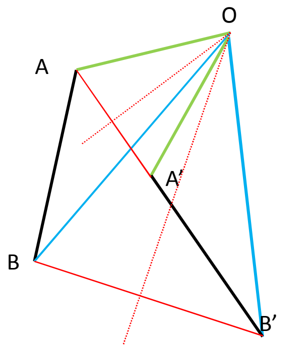
$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{21}$$

Wynik mnożenia zapisałem od razu z użyciem znaku iloczynu wektorowego, gdyż dokładnie to zwężenie z epsilonem jest istotą iloczynu wektorowego.

Trochę może już za dużo tej czystej matematyki, wróćmy do bryły. Zespalając bryłę z układem osi sprowadziliśmy położenie (i ruch) bryły do położenia (i ruchu) układu współrzędnych. Wartości elementów macierzy C to jakby współrzędne naszej bryły. Tyle, że elementów jest 9, a niezależnych parametrów 3. Istnieje kilka sposobów wyboru takich trzech parametrów.

Jeden z najbardziej intuicyjnych (choć nie najwygodniejszy) polega na obserwacji, że położenie trzech osi można uzyskać z położenia wyjściowego przez obrót o pewien określony kąt wokół pewnej określonej osi. Dowód tego jest prosty. Wprowadzamy sferę jednostkową i zaznaczamy na niej ćwiartkę koła wielkiego łączącą koniec wersora *x’* z wersorem *y’*. Następnie łączymy łukiem koła wielkiego koniec wersora *x’* z końcem wersora *x* i koniec wersora *y’* z końcem wersora *y*. Symetralne koła wielkie przepoławiające te nowe łuki przecinają się w (dwóch) punktach wyznaczających oś obrotu. Wybieramy jeden z nich (taki b obrót potrzebny nie przekraczał 180º. Z konstrukcji wynika, że w tym punkcie przecięcia spotykają się dwa trójkąty sferyczne przystające *xOy* i *x’Oy’*. Obrót przeprowadzający bok *Ox* w *Ox’* **równocześnie** przeprowadza *Oy* w *Oy’*.

Wersor osi obrotu $\vec{n}$ i kąt obrotu φ można zebrać w jedną wielkość $\vec{n}\varphi$. Innymi słowy wektor o kierunku osi obrotu i o długości równej wartości kąta obrotu **parametryzuje** zbiór możliwych konfiguracji bryły. Wektory te wypełniają wnętrze kuli o promieniu π. Należy zauważyć, że punkty antypodyczne na tej sferze opisują identyczną konfigurację („obrót”), chociaż obrót o kąt π „w prawo” wo



kół osi o przeciwnym kierunku jest niczym innym jak obrotem o tyle samo w lewo wokół pierwszego kierunku. „Obroty” te są identyczne, choć w potocznym znaczeniu „obracania” to dwa różne procesy.

Efekt obrotu o kąt φ wokół wersora $\vec{n}$ łatwo podać dla dowolnego wektora sztywno związanego z układem bryły. Część równoległa się nie zmieni, prostopadła obróci się o kąt φ, co można opisać przez skrócenie składowej wektora prostopadłej do $\vec{n}$ i dodanie wektora $\vec{n} \times \vec{r} \sin\varphi$. Ostatecznie:

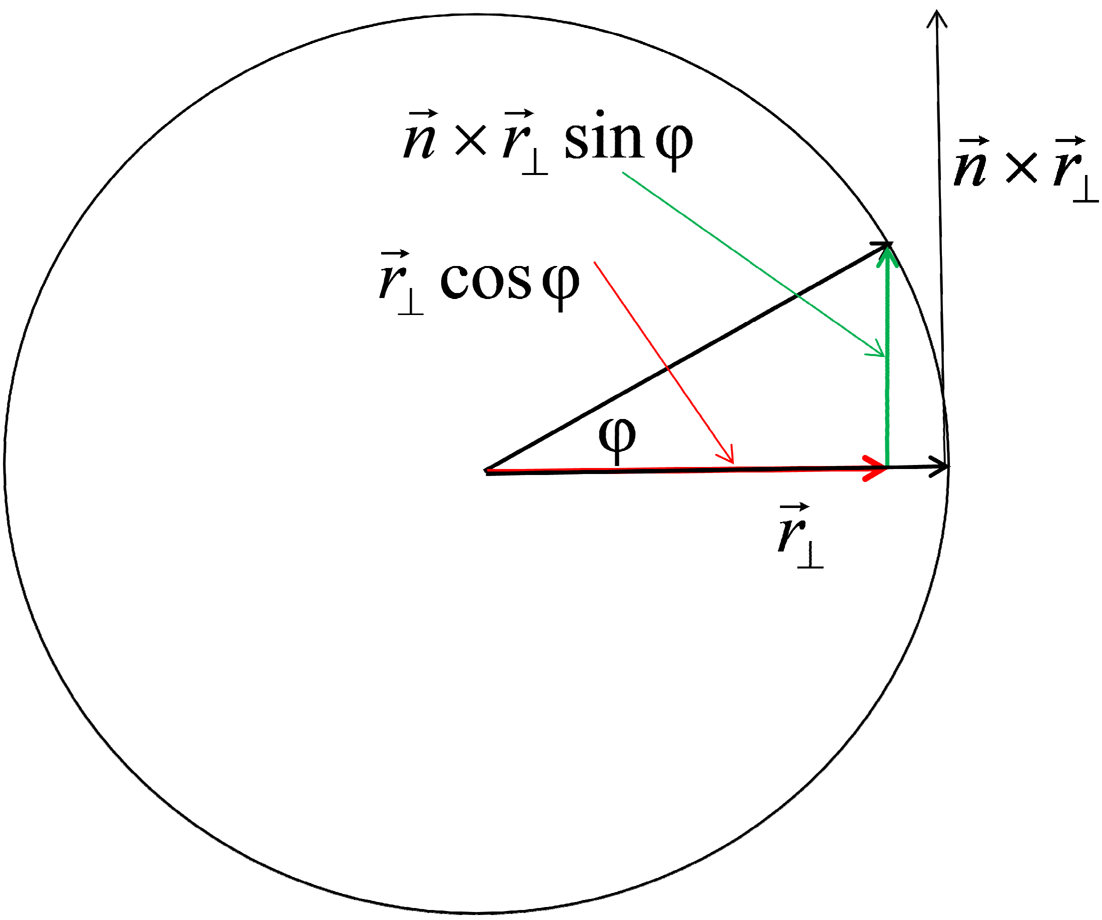
$$\hat{R}(\vec{n}\varphi)\vec{r} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}) + \big(\vec{r} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r})\big)\cos\varphi + \vec{n} \times \vec{r}\sin\varphi \tag{22}$$

Można też nadać temu postać:

$$\hat{R}(\vec{n}\varphi)\vec{r} = \vec{r} - (1 - \cos\varphi)\big(\vec{r} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r})\big) + \vec{n} \times \vec{r}\sin\varphi \tag{23}$$

Prędkość punktu bryły jest prędkością z jaką zmienia się (w infinitezymalnym otoczeniu chwili wybranej do wyznaczenia pola prędkości) wektor wodzący punktu bryły. Niewątpliwie kąt obrotu jest wielkością infinitezymalną, dlatego człon zawierający $(1 - \cos\varphi)$ nie daje wkładu do prędkości punktów w wybranej chwili. Chociaż w czasie ruchu zmienia się płynnie i kąt φ i wektor $\vec{n}$, to wkład do prędkości w danej chwili daje wyłącznie człon:

$$\frac{d}{dt}\hat{R}(\vec{n}\varphi)|_{t=0}\,\vec{r} = \dot{\varphi}(0)\vec{n}(0)\times\vec{r} \qquad (23)$$



Tak oto pojawia się wielkość $\dot{\varphi}(0)\vec{n}(0)$, zwana prędkością kątową. Warto podkreślić, że prędkość kątowa (poza szczególnym przypadkiem obrotu wokół ustalonej osi) nie jest pochodną jakiegoś wektora.

Ponieważ prędkość jest wektorem, prędkość kątowa jest zapewne pseudowektorem, bo w przeciwnym razie iloczyn wektorowy dawałby pseudowektor.

Aby się o tym przekonać i spojrzeć od innej strony na prędkość kątową, policzmy prędkość punktu bryły korzystając wyłącznie z macierzy cosinusów kierunkowych. W tym celu zróżniczkujmy równanie (7) w którym za wektor *A* weźmiemy wektor wodzący punktu bryły. „Primowane" współrzędne tego wektora są stałe, dlatego:

$$\dot{x}_i = \dot{c}_{ij}x'_j \tag{24}$$

Współrzędne wektora prędkości po lewej stronie i wektora położenia po stronie prawej odnoszą się do różnych układów, co nie jest wygodnym sposobem uwidaczniania związków między wektorami. Wyraźmy przeto współrzędne wybranego punktu, którego prędkość obliczyliśmy przez jego współrzędne w układzie nieruchomym.

$$\dot{x}_i = \dot{c}_{ij}c_{kj}x_k \tag{24}$$

Pojawiła się nowa macierz. Oznaczymy ją[2] ω_{ki}. Mamy

$$\omega_{ki} = \dot{c}_{ij}c_{kj} \tag{25}$$

Podstawową własnością powyższej macierzy jest jej **antysymetria**. Rzeczywiście, różniczkując warunek (6) ortogonalności (wierszy) dostajemy:

$$0 = \dot{c}_{ik}c_{jk} + c_{ik}\,\dot{c}_{jk} \tag{26}$$

czyli:

$$\omega_{ij} = \dot{c}_{jk}c_{ik} = -\dot{c}_{ik}c_{jk} = -\omega_{ji} \tag{27}$$

[2] W pierwszej wersji wykładu wybrałem znak przeciwny, co jest odrobinę mniej wygodne. Przepraszam.

Ale macierz antysymetryczna 3×3 ma tylko 3 niezależne składowe. Jej zwężenie z epsilonem pozwala zbudować pseudowektor, który (mając też 3 składowe) niesie w sobie informacje o trzech niezależnych składowych tensora[3] ω_{ij}.

Definiujemy:

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk} \tag{28}$$

Możemy sprawdzić, po kolei, czym jest ω_1? To oczywiście dwa człony: jeden z $j = 2, k = 3$, drugi z $j = 3, k = 2$. Ten pierwszy z plusem ($\varepsilon_{123} = 1$), drugi z minusem. Czyli

$$\omega_1 = \frac{\omega_{23} - \omega_{32}}{2} = \omega_{32} = -\omega_{23} \tag{29}$$

I podobnie:

$$\omega_2 = \omega_{31} \;, \omega_3 = \omega_{12} \tag{30}$$

Relację (28) można odwrócić bez kłopotu[4]:

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{31}$$

Zwykła prędkość jest wektorem, a kątowa tensorem antysymetrycznym. To istotnie różne wielkości!

Korzystając z powyższej definicji, równanie (24) przepisuję następująco:

---

[33] To, że liczby ω_{ij} są składowymi tensora trzeba dowieść, choć intuicyjnie jest to dość jasne. W tym celu wprowadzamy dwa układy nieruchome i trzeci ruchomy. W notacji macierzowej: $\widehat{\omega} = \dot{c}c^T$. Macierz c wiążąca bryłę z układem 1 jest iloczynem macierzy (zależnej od czasu) łączącej bryłę z układem pośrednim, nr 2, i macierzy (stałej) łączącej układ pośredni (nr 2) z układem nr 1. $c^{3\to1} = c^{2\to1}c^{3\to2}$. Różniczkując i wstawiając do definicji macierzy ω , dostajemy: $\widehat{\omega} = c^{2\to1}\dot{c}^{3\to2}{c^{3\to2}}^T{c^{2\to1}}^T = c^{2\to1}\widehat{\omega}^{3\to2}{c^{2\to1}}^T$. Macierz $\widehat{\omega}^{3\to2}$ ma współrzędne odnoszące się do układu 2, a macierz $\widehat{\omega}$ do układu 1. Powiązane są **tak, jak współrzędne tensora powinny być,** tj. są zwężeniem macierzy starych składowych z dwiema macierzami transformacji od 2 do 1.

[4] Przy nowej definicji, wzory 28 i 31 mają „naturalny” porządek indeksów, łatwiejszy do zapamiętania. Ceną jest nieco nienaturalny porządek indeksów w równaniu definicyjnym dla ω_{ki} , $\dot{x}_i = \omega_{ki}x_k$ ale jest on spójny z tym, że we wzorach transformacyjnych i tak mamy $c_{ki}x_k$. Porządek „naturalny” (wiersze przez kolumny, czyli zwężane indeksy jak najbliżej) występuje w $c_{ik}{x'}_k$. Nie można go mieć i tu i tu.

$$\dot{x}_i = \omega_{ji}x_j = \varepsilon_{jik}\omega_k x_j = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k \tag{32}$$

W tradycyjnym zapisie wektorowym jest to znany nam rezultat:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{33}$$

Jeszcze raz podkreślam, że opisując położenie bryły w czasie skończonym (nie infinitezymalnym) poprzez element **grupy obrotów** jakim jest obrót wokół pewnego wersora $\vec{n}$ o kąt φ dostajemy dla kolejnych chwil coraz to inne $\vec{n}\,(t)$ i $\varphi(t)$. Prędkość kątowa **da się wyrazić** przez pochodne tych funkcji, ale w sposób **zawiły.**

Jedynie na samym początku, (który możemy wybrać dowolnie), czyli gdy układ nieruchomy utożsamiamy z układem bryły w wybranym momencie, a czas jaki upłynął jest infinitezymalny, prędkość kątowa **w tej jedynej chwili,** jest równa $\vec{n}\,(0)\dot{\varphi}(0)$. W ruchu postępowym, gdzie przemieszczenie globalne jest sumą przemieszczenia do czasu t_0 i przemieszczenia w czasie dt, pochodna globalnego przemieszczenia jest też pochodną owego przyrostu. Z obrotami tak nie jest. (Poza przypadkiem obrotu wokół stałej osi, gdzie kąt jest addytywny, a wektor $\vec{n}$ stały. To powoduje pewną złożoność dyskusji ruchu bryły.