

Wykład 7

Zwykła prędkość ma jedną (wprawdzie tylko w teorii nierelatywistycznej) przyjemną cechę. Gdy są dwa układy we względnym ruchu (postępowym), to prędkość ciała względem „pierwszego” powstaje z sumowania prędkości ciała względem układu drugiego i prędkości drugiego względem pierwszego.

Nie jest to – jak czasami piszą w podręcznikach elementarnych spowodowane tym, że „prędkości są wektorami, a wektory się dodają”. Wiemy wszak, że w STW, prędkości są też trójwymiarowymi wektorami, a mimo to „składają” się inaczej niż przez proste dodanie.

W tej sytuacji, po prędkościach kątowych można spodziewać się **wszystkiego najgorszego**.

I tu mam dla Państwa **dobrą wiadomość**. Jest prościej niż by można oczekiwać.

Gdy byłem studentem, nie za bardzo docierały do mnie argumenty oparte na rysunkach. Gdy poznałem dowód analityczny uwierzyłem, że prędkości kątowe (obrotu bryły i obrotu pośredniego układu odniesienia, lub inaczej prędkości względne trzech układów) **rzeczywiście się dodają**.

A oto dowód. By jak najmniej się namęczyć z pisaniem zastosujemy notację macierzową. Antysymetryczna macierz prędkości kątowej to (przypomnijmy ¹):

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \dot{c}_{ij} x'_j = \dot{c}_{ij} c_{kj} x_k = \omega_{ki} x_k \\ \omega_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{jk} & \omega_{ij} &= \varepsilon_{ijk} \omega_k \\ \hat{\omega} &= c \dot{c}^T\end{aligned}$$

Gdy są trzy układy: nieruchomy (nr 1), pośredni (nr 2) i bryły (nr 3), to

$$c^{3 \rightarrow 1}(t) = c^{2 \rightarrow 1}(t) c^{3 \rightarrow 2}(t) \quad (7.1)$$

¹ W stosunku do końcówki poprzedniego wykładu zmieniam znak definicyjny tensora prędkości kątowej. Odpowiednie poprawki naniósłem w wykładzie 6. Jest nieco wygodniej zapamiętać kolejność indeksów.

Wstawiamy do wzoru definicyjnego, wcześniej różniczkując i pamiętając, że transpozycja iloczynu macierzy jest iloczynem macierzy transponowanych w odwrotnej kolejności² :

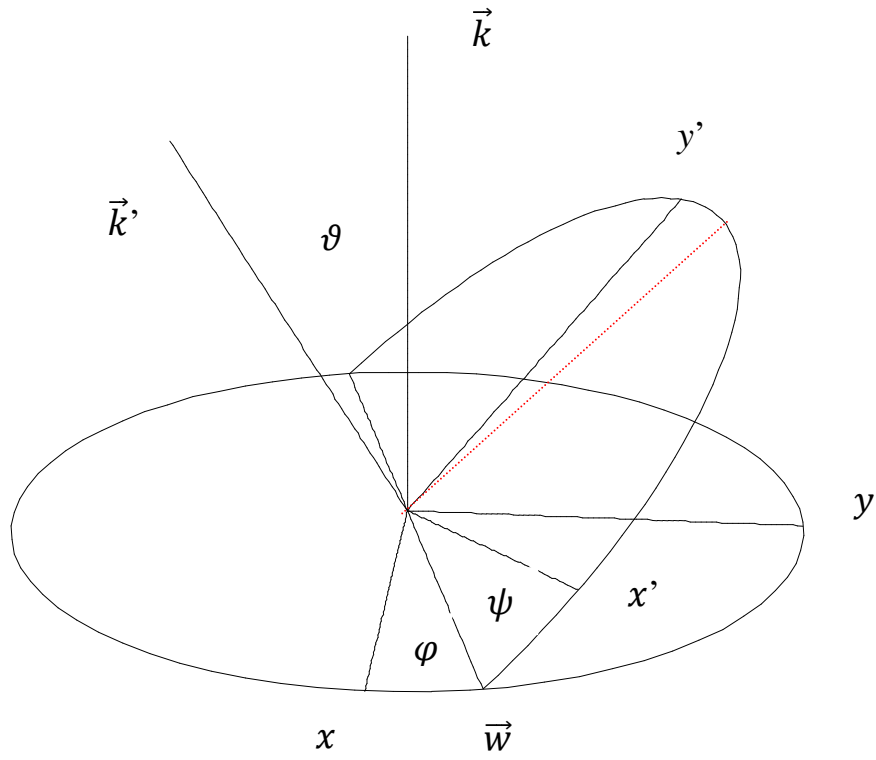
$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{3 \rightarrow 1} &= c^{3 \rightarrow 1} \dot{c}^{3 \rightarrow 1 T} = c^{2 \rightarrow 1} c^{3 \rightarrow 2} \left(\dot{c}^{3 \rightarrow 2 T} c^{2 \rightarrow 1 T} + c^{3 \rightarrow 2 T} \dot{c}^{2 \rightarrow 1 T} \right) = \\ &= c^{2 \rightarrow 1} \hat{\omega}^{3 \rightarrow 2} c^{2 \rightarrow 1 T} + \hat{\omega}^{2 \rightarrow 1}\end{aligned}\quad (7.2)$$

Z drugiego wyrazu w nawiasie (dzięki spotkaniu macierzy (3->2) z jej transponowaną kopią, co się „anihiluje”) dostajemy wprost $\omega^{2 \rightarrow 1}$. Drugi wyraz to dokładnie współrzędne tensora prędkości kątowej (3->2) przeliczone do tej samej bazy układu 1 w której dany jest pierwszy składnik.

Prędkości kątowe (tensory, jak wyżej, a więc i wektory) zwyczajnie się dodają!

$${}^2 T_{ij} = c_{i' i} c_{j' j} T'_{i' j'} = c_{i' i} T'_{i' j'} c_{j' j} = c_{i' i} T'_{i' j'} c^T_{j' j}$$

$$\vec{\omega} = \vec{k} \dot{\phi} + \vec{k}' \dot{\psi} + \vec{w} \dot{\vartheta} \quad (7.3)$$



Szalenie przydatne okazały się współrzędne wektora prędkości kątowej w układzie bryły. W celu ich wyznaczenia potrzebne są nam iloczyny skalarne wektorów występujących w wyrażeniu na prędkość kątową z wersorami osi x', y', z' :

$$\begin{aligned}\vec{k}\vec{k}' &= \cos\vartheta & \vec{w}\vec{k}' &= 0 \\ \vec{k}\vec{i}' &= \sin\vartheta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) & \vec{w}\vec{i}' &= \cos(\psi)\end{aligned}\quad (7.4)$$

$$\vec{k}\vec{j}' = \sin\vartheta\cos(\psi) \quad \vec{w}\vec{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)$$

$$\vec{\omega} = \vec{k}\dot{\varphi} + \vec{k}'\dot{\psi} + \vec{w}\dot{\vartheta}$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi,$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi, \quad (7.5)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta$$

6

Przypomnijmy sobie twierdzenie z dynamiki punktów materialnych:

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{J}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \right) = \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i,j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \right) = \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\end{aligned}\quad (7.6)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{J}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt} \vec{J}_{\text{tot}} = \vec{N}_{\text{tot}_4} \quad (7.7)$$

A. Punkt unieruchomiony w układzie inercyjnym – wśród sił F_i jest siła reakcji w punkcie zamocowania, która nie daje wkładu do całkowitego momentu sił.

$$\vec{N}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{znane}} + \vec{0} \times \vec{F}_{\text{Reakcji}} \quad (7.8)$$

B. Ciało swobodne – opłaca się, za cenę sił bezwładności, umieścić środek układu w punkcie związanym z bryłą, **koniecznie w środku masy**. Teraz moment sił bezwładności (zależny od przyspieszenia środka masy) znika i równanie ruchu obrotowego jest znów **odseparowane** od równania ruchu postępowego.

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\text{tot}} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{\text{prawdziwe}} - m_i \ddot{\vec{R}} \right) = \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{prawdziwe, znane}} - \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \left(\ddot{\vec{R}} \right) \quad (7.9) \\ &\qquad\qquad\qquad \parallel \\ &\qquad\qquad\qquad \vec{0} \end{aligned}$$

Moment pędu bryły

$$\sum \vec{J}_i \equiv \vec{J} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Ważna tożsamość: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\vec{J} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - \sum m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)$$

$$\begin{aligned} J_a &= \omega_a \sum m^i \vec{r}^i \cdot \vec{r}^i - \sum m^i x_a^i (\omega_b x_b^i) = \\ &= \delta_{ab} \omega_b \sum m^i \vec{r}^i \cdot \vec{r}^i - \sum m^i x_a^i (\omega_b x_b^i) = \\ &= \left(\sum m^i (r^{i2} \delta_{ab} - x_a^i x_b^i) \right) \omega_b \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \sum m^i (r^{i2} \delta_{ab} - x_a^i x_b^i) = \\ &= \sum m^i (x_c^i x_c^i \delta_{ab} - x_a^i x_b^i) \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$J_a = I_{ab} \omega_b \quad (7.12)$$

Zbliżamy się do napisania równań ruchu, ale I_{ab} zależą od orientacji bryły. Idąc za Eulerem, pozbedziemy się tego!

Równanie powyższe jest tensorowe. Tak jak się ono nam pojawiło, zawiera współrzędne względem układu z (co najmniej) osiami równoległymi do osi układu inercjalnego. Jest też prawdziwe, względem układu bryły!

Względem bryły współrzędne I_{ab} są niezależne od czasu! Współrzędne prędkości kątowej na osi bryły mamy policzone! Ale w równaniu bilansu momentu pędu występuje pochodna **wektora** momentu pędu, która łatwo się wyraża przez pochodne współrzędnych, **niestety**, w układzie inercyjnym!

$$\frac{d}{dt} \vec{J} = J_a \dot{\vec{e}}_a = \frac{d}{dt} J'_a \vec{e}'_a = \dot{J}'_a \vec{e}'_a + J'_a \dot{\vec{e}}'_a = \quad (7.13)$$

$$= \dot{J}'_a \vec{e}'_a + J'_a \vec{\omega} \times \vec{e}'_a = \dot{J}'_a \vec{e}'_a + \vec{\omega} \times \vec{J} = \frac{d'}{dt} \vec{J} + \vec{\omega} \times \vec{J}$$

$$\frac{d'}{dt} \vec{J} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \vec{N} \quad (7.14)$$

Teraz powyższe równanie możemy zapisać we współrzędnych układu bryły:

$$I'_{ab} \dot{\omega}'_b + \varepsilon_{amn} \omega'_m I'_{np} \omega'_p = N'_a \quad (7.15)$$

Już jest prawie dobrze! Współrzędne tensora bezwładności (6 liczb) są stałymi – w zależności od tego jak moment siły zależy od kątów Eulera i prędkości, powyższy układ jest układem trzech równań rzędu drugiego na kąty Eulera. W przypadku szczególnym, momentu siły zależnego tylko od prędkości Katowych, jest to wręcz układ 3 równań 1-go rzędu na prędkości kątowe.

W rzeczywistości układ powyższy w **oczywisty** sposób można jeszcze uprościć.

Zacznijmy od bryły o rozkładzie masy mającym symetrię obrotową (wokół osi z przechodzącej przez punkt unieruchomiony). Wtedy elementy niediagonalne tensora bezwładności

$$I_{ab} = -\sum m^i x_a^i x_b^i \quad (7.16)$$

Zawierają pierwszą potęgę albo współrzędnej x , albo y (albo razem z współrzędną z , albo x oraz y ze sobą). Każdemu punktowi odpowiada punkt obrocony

o 180° , czyli o przeciwnych wartościach x oraz y . Oznacza to redukowanie się członów xz (oraz yz) od takich „bliźniaczych” punktów. Moment „dewiacji” xy też znika, bo, z kolei, punkt obrócony o 90° ma y takie jakie ($-x$) miał pierwszy punkt, a x ma takie jak y tamtego punktu. W przypadku symetrii zamiast 6 parametrów mamy tylko 2, a macierz tensora I jest diagonalna.

W rzeczywistości, dla bryły **dowolnie nieregularnej**, istnieje taki wybór osi związanych z ciałem, że tensor bezwładności staje się diagonalny.

$$\begin{aligned}\hat{I}' &= c\hat{I}''c^{-1} \\ \hat{I}'c &= c\hat{I}''\end{aligned}\quad (7.17)$$

$$\begin{aligned}I'_{ab}c_{bd} &= c_{ab}I''_{bd} = c_{ab}I''_{(d)}\delta_{b(d)} = c_{a(d)}I''_{(d)} \\ I'_{ab}c_{b(d)} &= I''_{(d)}c_{a(d)}\end{aligned}\quad (7.18)$$

$$\vec{e}''_d = c_{ad}\vec{e}'_a \quad (7.19)$$

$$I''_d = \sum m^i (r^{i2} - x^i_{(d)}x^i_{(d)}) \quad (7.20)$$

$$I''_{ab} \dot{\omega}''_b + \varepsilon_{amn} \omega''_m I''_{np} \omega''_p = N''_a$$

$$I''_{(a)} \dot{\omega}''_{(a)} + \varepsilon_{amn} \omega''_m I''_{(n)} \omega''_n = N''_a$$

$$I''_1 \dot{\omega}''_1 + \varepsilon_{123} \omega''_2 I''_3 \omega''_3 + \varepsilon_{132} \omega''_3 I''_2 \omega''_2 = N''_1$$

Równania Eulera

$$I''_1 \dot{\omega}''_1 + \omega''_2 \omega''_3 (I''_3 - I''_2) = N''_1 \quad (7.21a)$$

$$I''_2 \dot{\omega}''_2 + \omega''_3 \omega''_1 (I''_1 - I''_3) = N''_2 \quad (7.21b)$$

$$I''_3 \dot{\omega}''_3 + \omega''_1 \omega''_2 (I''_2 - I''_1) = N''_3 \quad (7.21c)$$

Klasycznym, pierwszym przykładem na wykorzystanie tych równań jest zbadanie ruchu bąk **swobodnego, symetrycznego**. Symetria nie tylko uwalnia nas od konieczności diagonalizacji macierzy tensora bezwładności, ale mówi też, że obie wartości własne prostopadłe do osi symetrii są równe³:

$$I_3 = I_{\parallel}, \quad I_2 = I_1 = I_{\perp} \quad (7.22)$$

³ W dalszym ciągu wracam do oznaczeń z jednym „primem”, rozumiejąc, że jest to układ osi głównych bryły.

Szczególnie upraszcza się równanie dla składowej prędkości kątowej wzdłuż osi symetrii!:

$$I_3 \dot{\omega}'_3 + \omega'_1 \omega'_2 (I_{\perp} - I_{\perp}) = 0 \Rightarrow \omega'_3 = \omega'_{03} \quad (7.23)$$

Pociąga to, z kolei, niesłychane uproszczenie pozostałych dwóch równań, które nagle stają się liniowe.

$$I_{\perp} \dot{\omega}'_1 + \omega'_2 \omega'_{03} (I_{\parallel} - I_{\perp}) = 0 \quad (7.24)$$

$$I_{\perp} \dot{\omega}'_2 + \omega'_1 \omega'_{03} (I_{\perp} - I_{\parallel}) = 0 \quad (7.25)$$

To jest bardzo charakterystyczny układ równań. Natknęliśmy się na niego na samym początku w ubiegłym roku, przy badaniu oscylatora harmonicznego i nieco później przy badaniu ruchu w polu magnetycznym.

Oznaczając:

$$\alpha = \frac{(I_{\parallel} - I_{\perp})}{I_{\perp}} \omega'_{03} \quad (7.26)$$

mam:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}'_1 &= -\alpha \omega'_2 & \ddot{\omega}'_1 &= -\alpha \dot{\omega}'_2 = -\alpha^2 \omega'_1 \\ \dot{\omega}'_2 &= \alpha \omega'_1 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Czyli:

$$\ddot{\omega}'_1 = -\alpha^2 \omega'_1 \quad (7.28)$$

Pełne rozwiązanie dla prędkości kątowych:

$$\omega'_1 = C \cos\left(\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \omega'_{03} t + \delta\right) \quad (7.29)$$

$$\omega'_2 = -\dot{\omega}'_1 / \alpha = C \sin\left(\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \omega'_{03} t + \delta\right) \quad (7.30)$$

$$\omega'_3 = \omega'_{03} \quad (7.31)$$

Koniec wektora prędkości kątowej zatacza okrąg wzdłuż „równoleżnika”. Okres obiegu wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\omega_{03}} \frac{I_{\perp}}{I_{\perp} - I_{\parallel}} \quad (7.32)$$

Dla Ziemi $\frac{I_{\perp}}{I_{\perp} - I_{\parallel}} \approx 300$, zaś $\frac{2\pi}{\omega_{03}}$, to po prostu doba (gdyż okrąg

precesji jest śmiesznie mały w porównaniu z Ziemią – zaledwie 4m). Wynikałoby z tego, że biegun kinematyczny powinien zataczać okrąg wokół osi głównej („bieguna bezwładności”) z okresem ok. 300 dni. Jest to tzw. okres Euler

Droga końca prędkości kątowej w bryle nosi nazwę **polhodi**. Dla bąka symetrycznego swobodnego jest to okrąg otaczający oś symetrii bryły, zakreślany ze stałą prędkością. Wektor, całą swą długością zmiata **stożek polhodi**. W tym wypadku jest to stożek kołowy.

A jak sam bąk wędruje w przestrzeni?

A także: jak w przestrzeni wędruje prędkość kątowa?

$$\vec{J} = \text{const}$$

Wybór \vec{k} : $\vec{J} = \vec{k}J$

$$\cos \vartheta = \vec{k} \cdot \vec{k}' = \frac{\vec{J}}{J} \cdot \vec{k}' = \frac{J'_3}{J} = \frac{I_{\parallel} \omega'_3}{J} = \frac{I_{\parallel} \omega'_{03}}{J} = \text{const}$$

Oś symetrii zakreśla **stożek**, zwany stożkiem **precesji**.

$$\omega'_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \sin \psi + \dot{\vartheta}_0 \cos \psi, \quad (7.33)$$

$$\omega'_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \cos \psi - \dot{\vartheta}_0 \sin \psi, \quad (7.34)$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta_0 \quad (7.35)$$

Stałość kąta ϑ szalenie upraszcza sprawę!

$$\tan \psi = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \cot\left(\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \omega'_{03} t + \delta\right)$$

$$\psi = -\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \omega'_{03} t + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{1}{\cos \vartheta_0} \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03}$$

Pozwala to wyrazić prędkość kątową w wygodnej postaci:

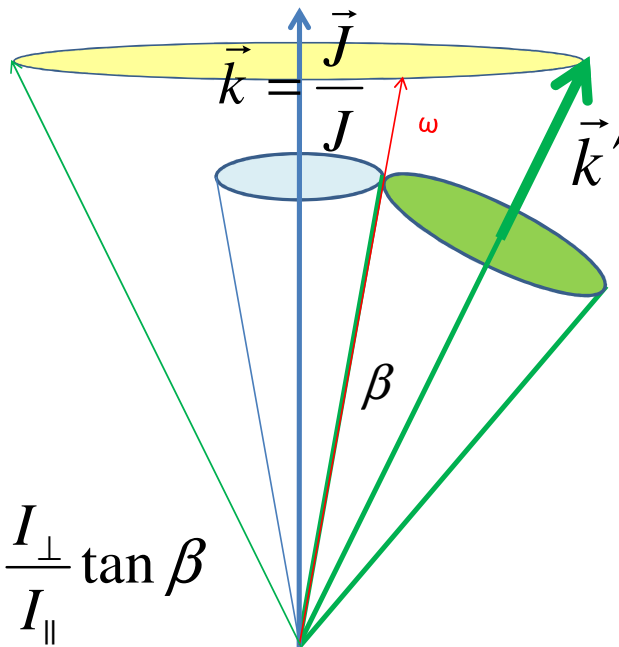
$$\vec{\omega} = \vec{k} \frac{1}{\cos \vartheta_0} \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03} + \vec{k}' \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03} \quad (7.36)$$

cygaro

$$I_{\parallel} < I_{\perp}$$

$$\omega'_{03} = \omega \cos \beta$$

$$\tan \vartheta_0 = \frac{I_{\perp} \omega'_{\perp}}{I_{\parallel} \omega'_{\parallel}} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \tan \beta$$



Do rozwiązania wchodzi dwie istotne stałe: kąt ϑ i składowa prędkości kątowej ω'_{03} . Wyobraźmy sobie, że w chwili początkowej „zakręcamy” bąka z prędkością kątową ω wokół osi tworzącej z osią symetrii kąt β . Mają one jasny sens i nie są niczym ograniczone.

Dalszy wygląd ruchu zależy od tego, czy moment bezwładności wokół osi symetrii jest mniejszy (**cygaro**) niż moment wokół którejś z osi prostopadłych, czy też większy („naleśnik”).

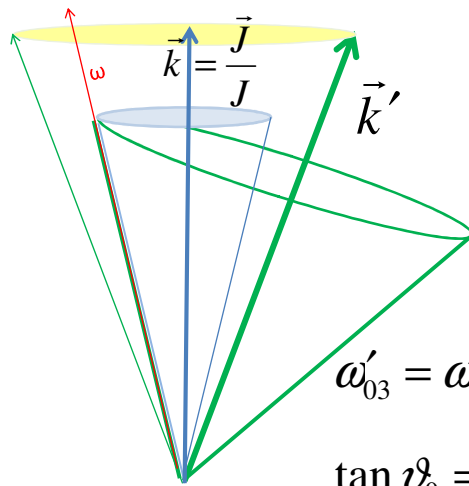
W tym pierwszym przypadku składowa prostopadła początkowej prędkości kątowej mnożona jest przez większą liczbę niż składowa pozioma i wektor momentu pędu odchyła się od osi symetrii bryły bardziej niż prędkość kątowa. Sytuacja taka jest na powyższym rysunku.

Wektory $\vec{\omega}, \vec{k}$, oraz \vec{k}' , zgodnie z wzorem (7.36) pozostają stale w jednej płaszczyźnie, przy czym wektor \vec{k} jest stały w przestrzeni.

Wektory $\vec{\omega}$ oraz \vec{k}' muszą pozostawać na stożkach o osi pokrywającej się ze stałym w czasie wektorem momentu pędu. Stożek, po którym równomiernie (bo kąt φ rośnie liniowo z czasem) przemieszcza się chwilowa oś obrotu nazywa się **stożkiem herpolhodie** - niebieski).

Kąt pomiędzy prędkością kątową a osią symetrii też pozostaje stały. W uk ladzie bryły prędkość kątowa porusza się po **stożku polhodie** (zielony). Ruch jest identyczny z równomiernym toczeniem bez poślizgu stożka polhodie (sztywno związanego z bryłą) po stożku herpolhodie nieruchomym w przestrzeni. Oś symetrii zatacza stożek precesji zaznaczony na żółto.

Dla bryły typu „naleśnik” wektor momentu pędu jest bliżej osi symetrii bryły niż nadana bryle w chwili początkowej prędkość kątowa. Powoduje to dość oczywiste zmiany. Stożek herpolhodie leży teraz nie zewnątrz stożka polhodie, a wewnątrz. Ruch bryły jest identyczny z ruchem lejka toczącego się wewnętrzną stroną po węższym stożku nieruchomym w przestrzeni:



naleśnik

$$I_{\parallel} > I_{\perp}$$

$$\omega'_{03} = \omega \cos \beta$$

$$\tan \vartheta_0 = \frac{I_{\perp} \omega'_{\perp}}{I_{\parallel} \omega'_{\parallel}} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \tan \beta$$

$$\vec{\omega} = \vec{k} \frac{1}{\cos \vartheta_0} \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03} + \vec{k}' \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03}$$

23

Gdy moment bezwładności wokół osi tylko **nieznacznie** przewyższa moment wokół osi prostopadłej do osi, kąt ϑ_0 tylko nieznacznie jest mniejszy od kąta β , więc stożek herpolhoidii jest bardzo chudy. Ruch bardzo nieznacznie odbiega od ruchu wokół ustalonej osi, ale w samej bryle, chwilowa oś obrotu wędruje (wolno, bo wolno) po okręgu o dowolnie dużym promieniu.

Ziemia ma bardzo niewiele różniące się momenty bezwładności. Jej chwilowa oś obrotu zatacza kółka o promieniu rzędu 1 cm względem gwiazd. Na powierzchni Ziemi, kółko jest kilkaset razy większe, ale i tak jest to zaledwie parę metrów. Zresztą „kółko”, to określenie znacznie na wyrost. Na precesję Eulera nakładają się zmiany rozkładu masy związane, choćby, ze zjawiskami klimatycznymi, co powoduje, że Ziemia nie jest zbyt doskonałym przykładem bryły sztywnej.