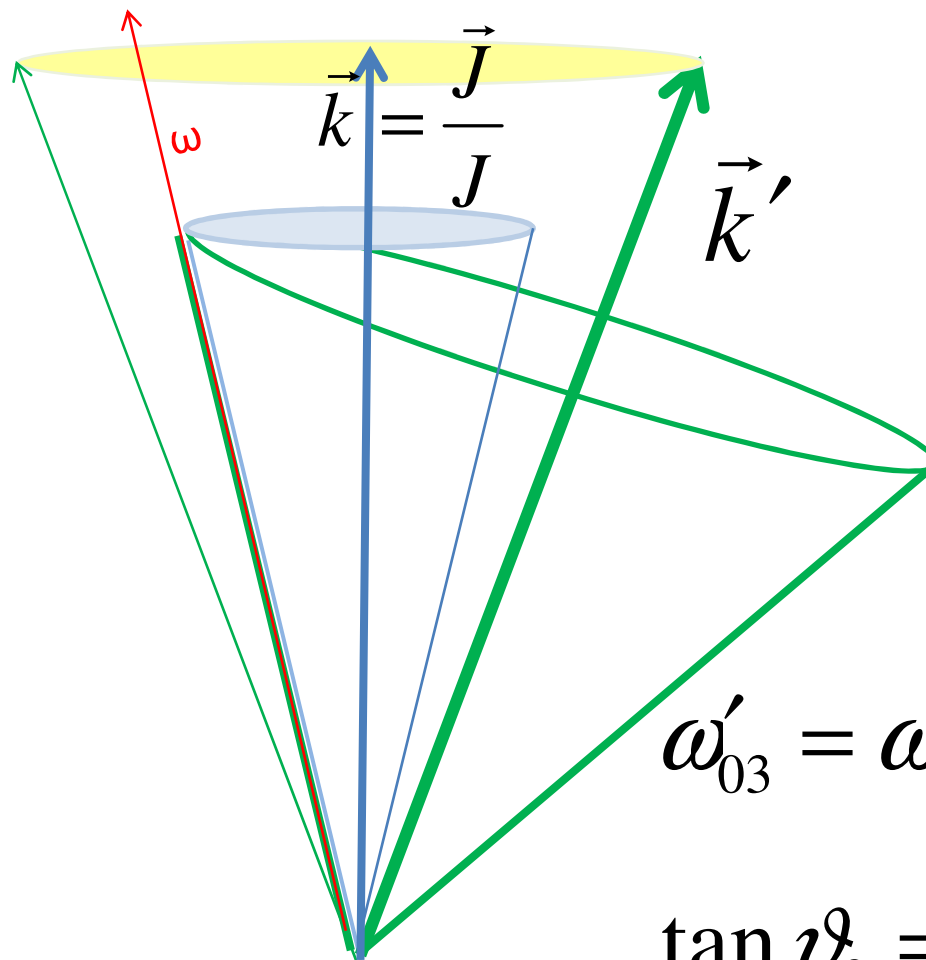


Mechanika klasyczna

Wykład 8



naleśnik

$$I_{\parallel} > I_{\perp}$$

$$\omega'_{03} = \omega \cos \beta$$

$$\tan \vartheta_0 = \frac{I_{\perp} \omega'_{\perp}}{I_{\parallel} \omega'_{\parallel}} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \tan \beta$$

$$\vec{\omega} = \vec{k} \frac{1}{\cos \vartheta_0} \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03} + \vec{k}' \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03}$$

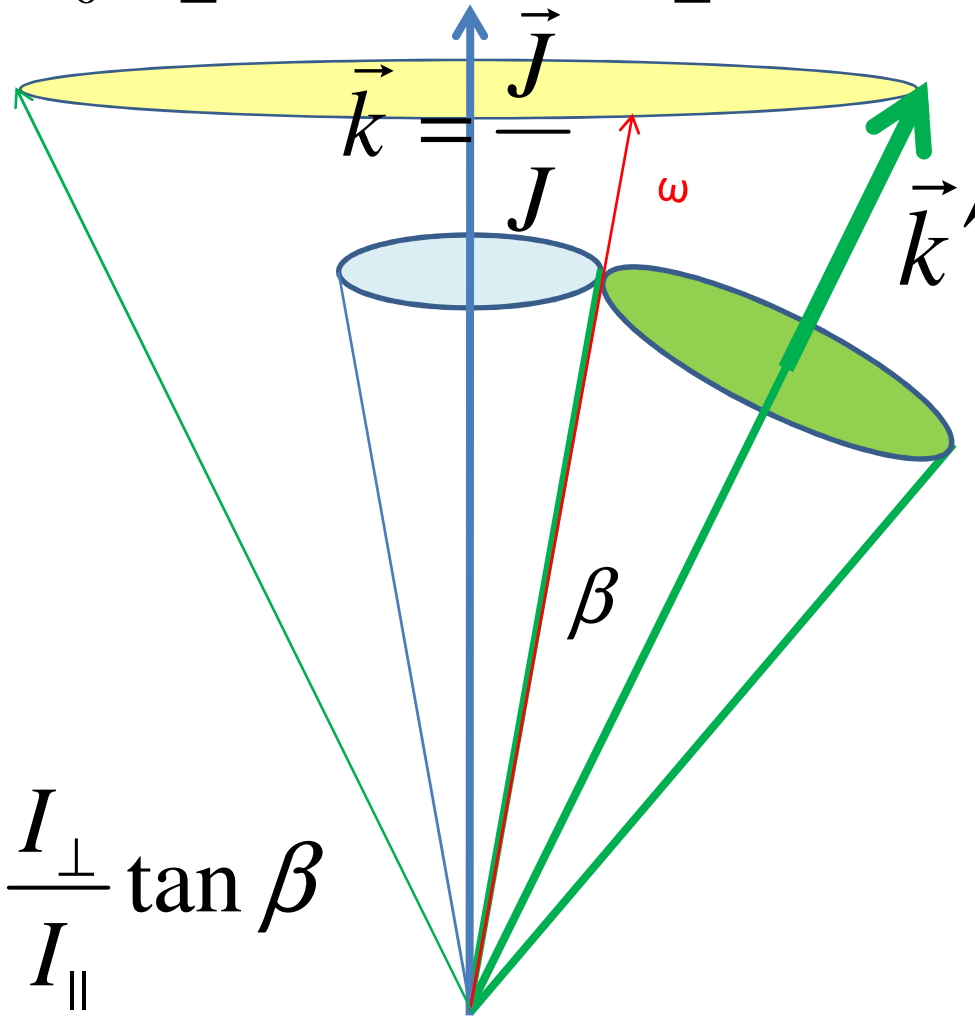
$$\vec{\omega} = \vec{k} \frac{1}{\cos \vartheta_0} \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03} + \vec{k}' \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega'_{03}$$

cygaro

$$I_{\parallel} < I_{\perp}$$

$$\omega'_{03} = \omega \cos \beta$$

$$\tan \vartheta_0 = \frac{I_{\perp} \omega'_{\perp}}{I_{\parallel} \omega'_{\parallel}} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \tan \beta$$



Precesja

Najważniejszy rodzaj ruchu bryły. Pojawia się nie tylko dla bryły swobodnej. Ruchy nie będące precesją są często stosunkowo niewielkim jej zaburzeniem.

$$\vec{\omega} = a\vec{k} + b\vec{k}'$$

Dla bryły swobodnej udowodniliśmy powyższy wzór wraz z pełną interpretacją współczynników a i b , ich zależnością od warunków początkowych i momentów bezwładności. W innych kontekstach sens parametrów a i b będzie odmienny.

$\vec{\omega}$ rządzi kawałkiem samej siebie!

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{\omega} &= \frac{d}{dt}(a\vec{k} + \cancel{b\vec{k}'}) = \frac{d}{dt}b\vec{k}' = \vec{\omega} \times \cancel{b\vec{k}'} = (a\vec{k} + \cancel{b\vec{k}'}) \times b\vec{k}' = \\ &= a\vec{k} \times b\vec{k}' = a\vec{k} \times (b\vec{k}' + a\vec{k}) = \\ &= a\vec{k} \times \vec{\omega} \perp \vec{\omega}\end{aligned}$$

Oznacza to iż $|\vec{\omega}|$ jest stały, a zatem i kąt pomiędzy $\vec{k}$ i $\vec{k}'$ jest też stały.

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega} = a\vec{k} \times \vec{\omega}$$

Warto podkreślić jest to iż **jest niemożliwe by bryła kręciła się wokół swej osi, która to oś wykonuje precesję**. Jak widzimy niezbędny jest kawałek $a\vec{k}$, oznaczający, że prędkość kątowna **nie ma kierunku osi bąka**.

Zachodzi też:

$$\frac{d}{dt} \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{k}' = a\vec{k} \times \vec{k}'$$

Warto nazwać $a\vec{k} \equiv \vec{\omega}_p$ **prędkością kątową precesji**

Z punktu widzenia układu bryły celowe jest inne przedstawienie ruchu wektora prędkości kątowej i ruchu wektora k

$$\frac{d'}{dt} \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \vec{\omega} = a\vec{k} \times b\vec{k}' = -b\vec{k}' \times \vec{\omega}$$

$$\frac{d'}{dt} \vec{k} = -\vec{\omega} \times \vec{k} = -b\vec{k}' \times \vec{k}$$

Naładowana bryła w polu magnetycznym.

Założenia: 1) błąk **kulisty**, 2) rozkład masy proporcjonalny do rozkładu ładunku

$$\begin{aligned}
 \vec{N} &= \sum \vec{r} \times (e\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{Q}{M} \sum \vec{r} \times (m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}) = \\
 &= -\frac{Q}{M} \vec{B} \sum \cancel{m(\vec{r} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}))} + \frac{Q}{M} \sum m(\vec{\omega} \times \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{B}) = \\
 &= \frac{Q}{M} \vec{\omega} \times \sum m\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})
 \end{aligned}$$

$$\sum m x_i (x_j B_j) = B_j \sum m x_i x_j = \left(\frac{I_{aa}}{2} \delta_{ij} - I_{ij} \right) B_j \quad \left(= \frac{I}{2} B_i \right)$$

$$I_{ab} = \sum m(x_c x_c \delta_{ab} - x_a x_b), \quad I_{aa} = \sum m(3x_c x_c - x_c x_c) = 2 \sum m x_c x_c$$

$$I_{ab} = \frac{I_{cc}}{2} \delta_{ab} - \sum m x_a x_b, \quad \sum m x_a x_b = \frac{I_{cc}}{2} \delta_{ab} - I_{ab}$$

$$\vec{N} = \frac{Q}{M} \vec{\omega} \times \sum m \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \frac{QI}{2M} \vec{\omega} \times \vec{B} = \frac{Q}{2M} \vec{J} \times \vec{B}$$

Dla takiej postaci momentu siły i dla $\vec{J} = I\vec{\omega}$ nie ma potrzeby używać równań Eulera! Co więcej, żadna oś bryły nie jest a priori wyróżniona, mogą to zrobić co najwyżej warunki początkowe, ale tych na razie nie przesądzamy:

$$\frac{d}{dt} \vec{J} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} = \frac{QI}{2M} \vec{\omega} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{Q\vec{B}}{2M} = \vec{\omega}_L \times \vec{\omega}$$

Częstość Larmora $\vec{\omega}_L = -\frac{Q\vec{B}}{2M}$

Częstość Larmora jest równa **połowicie** częstości cyklotronowej.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_L \times \vec{\omega}$$

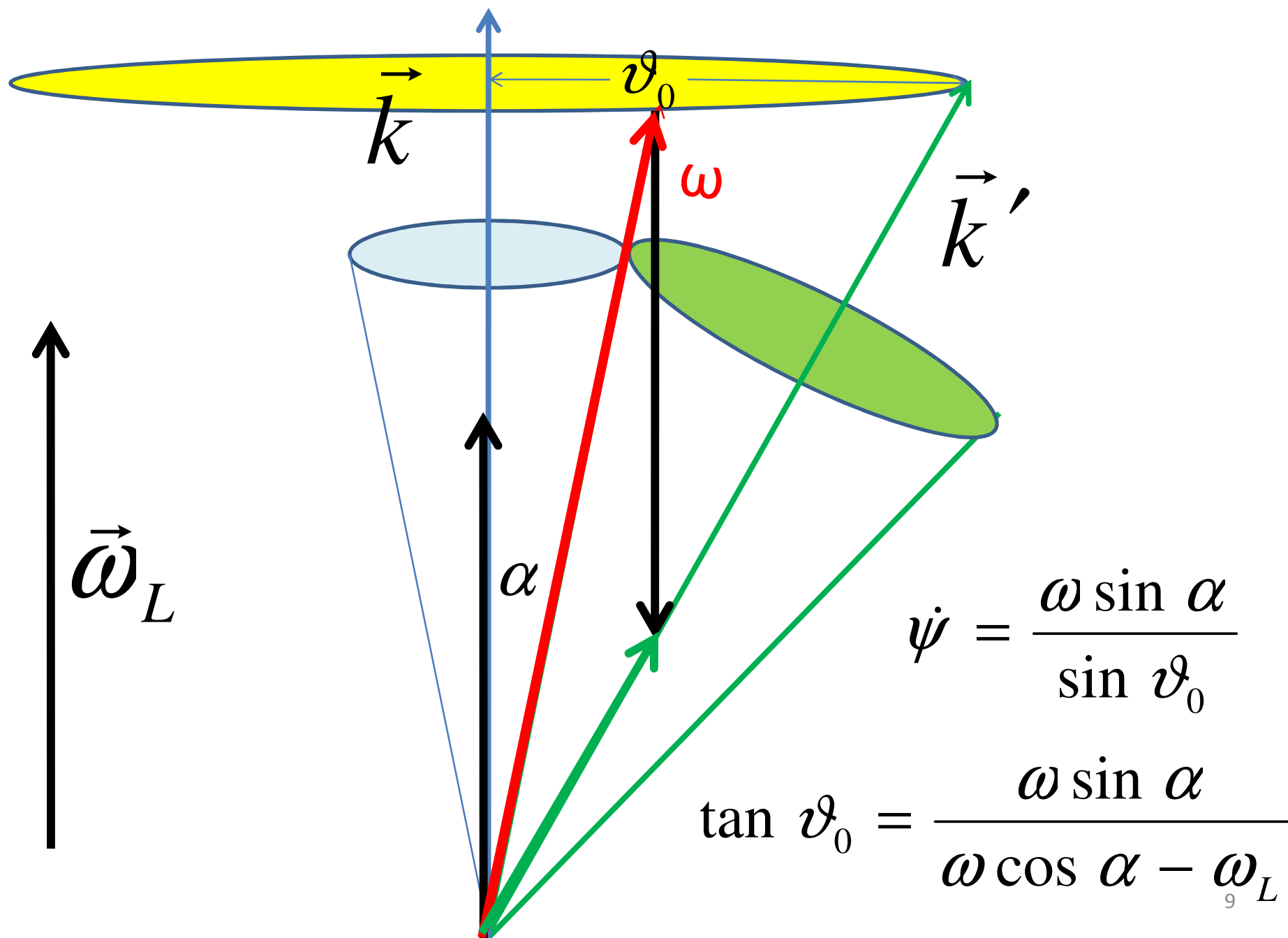
Tak było dla precesji! Zapewne tu też jest precesja. Ale co z osią $\vec{k}'$?

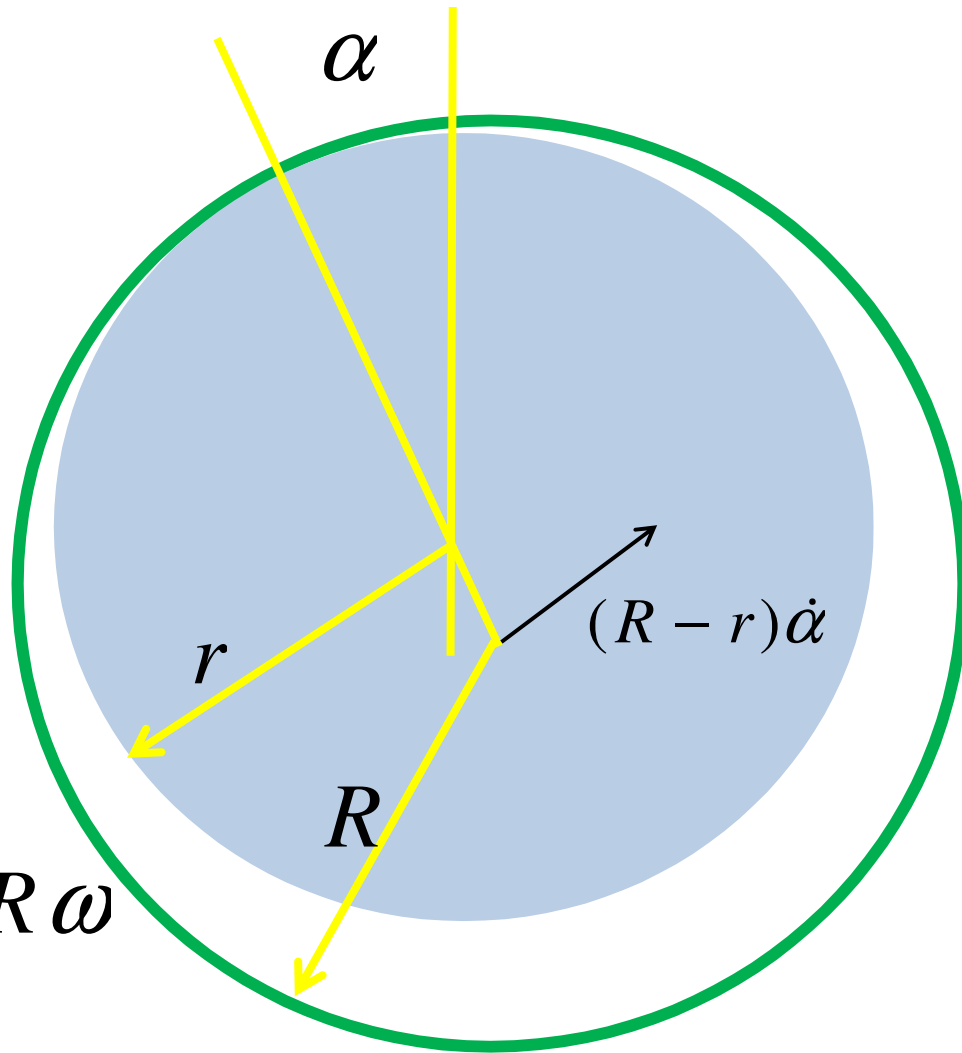
$$\frac{d'(\vec{\omega} - \vec{\omega}_L)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} - \vec{\omega}_L)}{dt} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} - \vec{\omega}_L) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega}_L = 0!!!$$

Wektor $\vec{\omega} - \vec{\omega}_L$ jest stały w układzie bryły! Celowym jest wybrać oś $\vec{k}'$ właśnie w tym kierunku!

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_L + \dot{\psi} \vec{k}'$$

Wartość $\dot{\psi}$ i kąt ϑ_0 między trzecimi osiami ustala się w chwili początkowej przez wybór wartości i kąta prędkości początkowej względem indukcji magnetycznej.





$$(R - r)\omega_P = R\omega$$

$$\omega_P = \frac{R}{(R - r)}\omega$$