

Mechanika teoretyczna

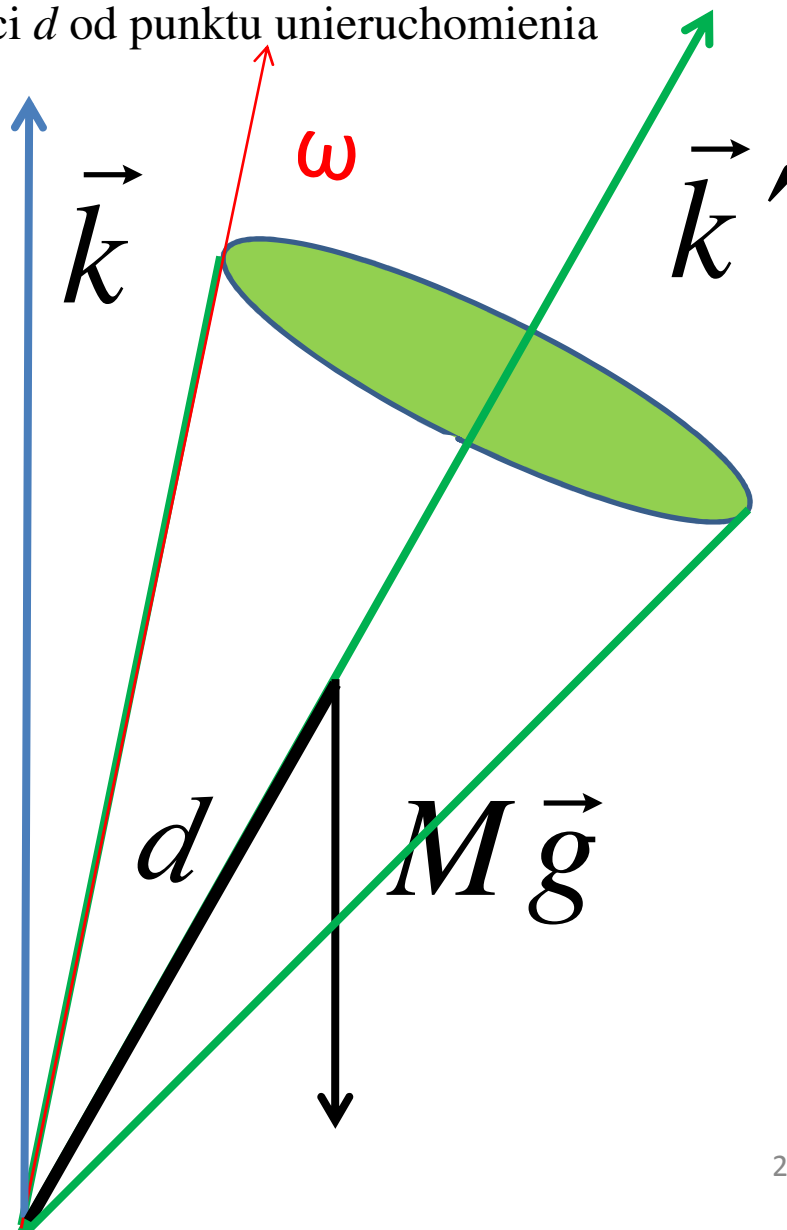
Wykład 9

Bąk symetryczny ciężki

Zacznijmy od zbadania warunku prowadzącego do **regularnej precesji bąka**, którego środek ciężkości leży na osi symetrii w odległości d od punktu unieruchomienia (podparcia)

$$\vec{\omega} = a\vec{k} + b\vec{k}'$$

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (\vec{k}'d) \times (-Mg\vec{k}) = \\ &= Mg d \vec{k} \times \vec{k}'\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \hat{I} \left(a\vec{k}' \cos \vartheta + a(\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta) + b\vec{k}' \right) = \\
&= I_{\parallel} (a \cos \vartheta + b) \vec{k}' + I_{\perp} a (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta) = \\
&= I_{\perp} a \vec{k} + ((I_{\parallel} - I_{\perp}) a \cos \vartheta + I_{\parallel} b) \vec{k}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mgd \vec{k} \times \vec{k}' &= \dot{\vec{J}} = ((I_{\parallel} - I_{\perp}) a \cos \vartheta + I_{\parallel} b) \dot{\vec{k}}' = \\
&= ((I_{\parallel} - I_{\perp}) a \cos \vartheta + I_{\parallel} b) (a\dot{\vec{k}} + \quad) \times \vec{k}'
\end{aligned}$$

$$((I_{\parallel} - I_{\perp}) a \cos \vartheta + I_{\parallel} b) a = Mgd$$

$$b = \frac{Mgd}{I_{\parallel}a} + \left(\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} - 1 \right) a \cos \vartheta$$

Bąk szybki (duże b) - małe a . Dominuje pierwszy człon. Precesja możliwa przy każdym wybranym kącie .

Bąk kulisty. Niezależnie od prędkości pozostaje pierwszy człon.

$$b = \frac{Mgd}{I_{\parallel}a}$$

$$ab = \frac{Mgd}{I_{\parallel}}$$

$$\omega^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \vartheta =$$

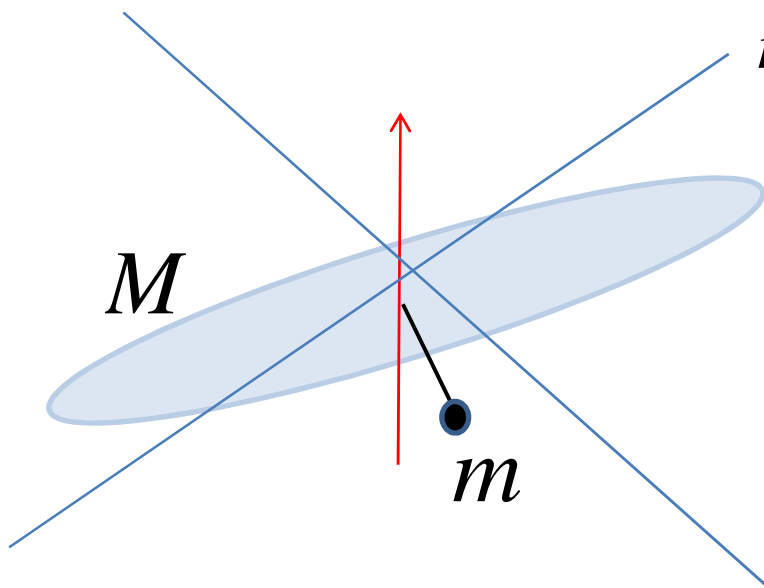
$$= a^2 + \left(\frac{Mgd}{I_{\parallel}a} \right)^2 + 2 \frac{Mgd}{I_{\parallel}} \cos \vartheta =$$

$$= \left(a - \frac{Mgd}{I_{\parallel}a} \right)^2 + 2 \frac{Mgd}{I_{\parallel}} (1 + \cos \vartheta)$$

Obrót wokół osi pionowej bąka odchylonego.

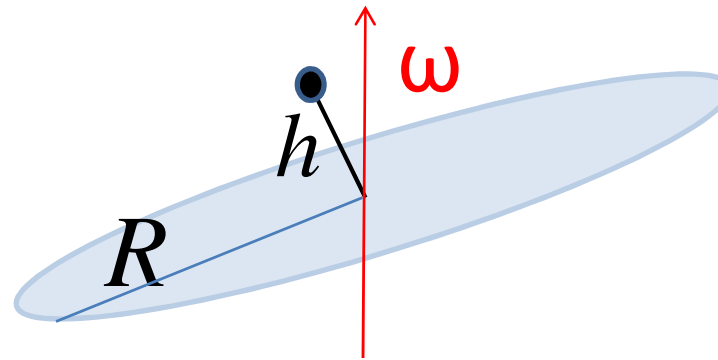
$$b = \frac{Mgd}{I_{\parallel}a} + \left(\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} - 1 \right) a \cos \vartheta = 0$$

- a) Dla bąka kulistego jest to **niemożliwe!**
- b) Dla ciała wydłużonego (typowego wahadła fizycznego) $I_{\perp} > I_{\parallel}$ jest to możliwe dla kątów większych od 90° , zgodnie z intuicją
- c) Dla talerza z obciążnikiem **środek ciężkości musi być wyżej** niż punkt podparcia. Sam się wczoraj zdziwiłem!



$$mh^2 < MR^2 / 4$$

Niemozliwe!



Mozliwe!

Ruchy inne niż precesja – użyjemy r. Lagrange'a

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \sum m (\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_i \omega_j = \\
 &= \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{J}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega} &= \dot{\vartheta} \vec{w} + \dot{\phi} \vec{k} + \dot{\psi} \vec{k}' = \\
 &= \dot{\vartheta} \vec{w} + (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' + \dot{\phi} (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta} \vec{w} + (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' + \dot{\phi} (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(I_{\perp} \dot{\vartheta} \vec{w} + I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' + I_{\perp} \dot{\phi} (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(I_{\perp} \dot{\vartheta}^2 + I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + I_{\perp} \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta} \vec{w} + (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' + \dot{\phi} (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(I_{\perp} \dot{\vartheta} \vec{w} + I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' + I_{\perp} \dot{\phi} (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(I_{\perp} \dot{\vartheta}^2 + I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + I_{\perp} \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta \right)
\end{aligned}$$

$$(\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta)^2 = 1 - 2 \cos \vartheta \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta$$

$$L = \frac{1}{2} \left(I_{\perp} \dot{\vartheta}^2 + I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + I_{\perp} \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta \right) - V$$

Dla bąka ciężkiego: $V = Mgd \cos \vartheta$

Dwie współrzędne cykliczne. Dwie całki pierwsze:

$$p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})$$

$$\begin{aligned} p_{\phi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_{\parallel} (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta + I_{\perp} \dot{\phi} \sin^2 \vartheta = \\ &= p_{\psi} \cos \vartheta + I_{\perp} \dot{\phi} \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

Interpretacja tych całek

$$\vec{J} = I_{\perp} \dot{\vartheta} \vec{\omega} + I_{\parallel} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' + I_{\perp} \dot{\varphi} (\vec{k} - \vec{k}' \cos \vartheta)$$

$$\parallel$$

$$J_{z'}$$

Rzut na kierunek z wynosi:

$$\begin{aligned} J_z &= \vec{J} \cdot \vec{k} = I_{\parallel} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{k}' \cdot \vec{k} + I_{\perp} \dot{\varphi} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \vec{k}' \cdot \vec{k} \cos \vartheta) = \\ &= p_{\psi} \cos \vartheta + I_{\perp} \dot{\varphi} (1 - \cos^2 \vartheta) = p_{\psi} \cos \vartheta + I_{\perp} \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = p_{\varphi} \end{aligned}$$

Moment siły prostopadły i do \vec{k} i do \vec{k}' . Stałość rzutu na oś z układu inercjalnego jest oczywista. Stałość rzutu na oś z' wymaga przypomnienia równania Eulera

$$\frac{dJ_z}{dt} = N_z, \quad \frac{dJ_{z'}}{dt} + \omega_{x'} \omega_{y'} (I_{x'} - I_{y'}) = N_{z'}$$

Znajomość 2 całek pierwszych pozwala w **trzeciej całce pierwszej – energii**, wyeliminować prędkości $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$, co prowadzi do równania pierwszego rzędu, o rozdzielonych zmiennych, na funkcję $\vartheta(t)$. O ile nawet całka nie jest elementarna, dyskusja wyniku jest w pełni możliwa. Dla małych odchyłeń od ruchu precesyjnego (tzn. jeśli zmiana $\vartheta(t)$ odbywa się w wąskim przedziale) możliwe jest skuteczne przybliżenie.

$$E = \frac{1}{2} \left(I_{\perp} \dot{\vartheta}^2 + I_{\parallel} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + I_{\perp} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + Mgd \cos \vartheta =$$

$$= \frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2I_{\parallel}} p_{\psi}^2 + \frac{1}{2I_{\perp} \sin^2 \vartheta} (p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \vartheta)^2 + Mgd \cos \vartheta$$

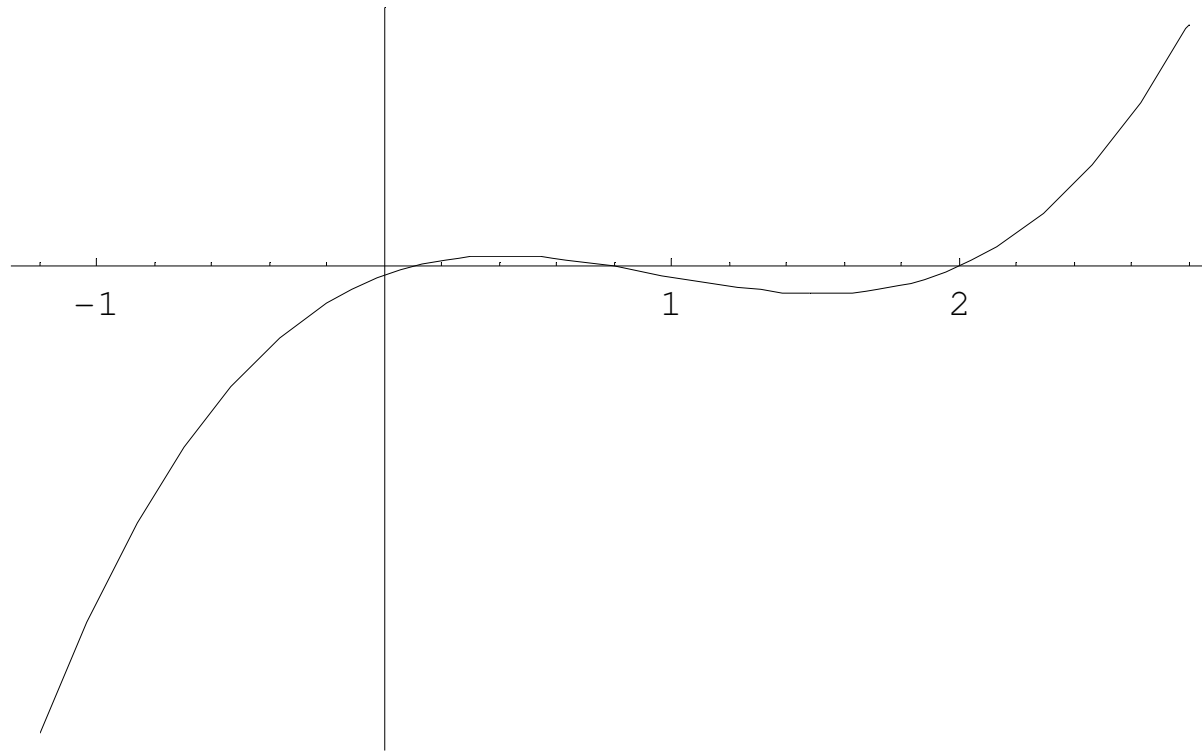
$$\xi = \cos \vartheta, \quad \sin^2 \vartheta = 1 - \xi^2$$

$$\dot{\xi} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

Po pomnożeniu stronami przez $1 - \xi^2$ mamy:

$$\frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\xi}^2 = \left(E - \frac{1}{2I_{\parallel}} p_{\psi}^2 - Mgd \xi \right) (1 - \xi^2) - \frac{1}{2I_{\perp}} (p_{\varphi} - p_{\psi} \xi)^2$$

Wielomian 3-go stopnia po prawej stronie, będący wartością kwadratu prędkości (mnożonej przez moment bezwładności), ma szereg charakterystycznych własności. Poza szczególnymi dwoma przypadkami: $p_\psi = \pm p_\phi$, kiedy dla $\xi = \pm 1$ prawa strona staje się zerem, zawsze jest ona dla tych skrajnych wartości cosinusa **ujemna**. Gdzieś w przedziale musi być chociaż nieujemna, a w nieskończoności dąży do $+\infty$ po stronie prawej i do $-\infty$ po lewej. Jej wykres wygląda więc, przykładowo, tak:



Granice przedziału dodatnich wartości funkcji mogą kurczyć się do pojedynczego punktu. To oznacza **precesję** ze stałą wartością kąta ϑ . Łatwo podać warunek algebraiczny, by wielomian nasz miał taki podwójny pierwiastek. Łatwo też rozwinąć funkcję wokół maksimum, uzyskując rozwiązanie harmoniczne dla ξ .

Równanie powyższe pozwala dawać odpowiedzi na różne pytania dotyczące ruchu bąka. Zbadajmy, na przykład, problem stabilności wirowania bąka wokół osi pionowej „na głowie”. Stałe całkowania, w idealnym przypadku „zakręcenia” wokół osi są:

$$p_\psi = p_\phi = I_{\parallel} \omega$$

$$E = \frac{1}{2} I_{\parallel} \omega^2 + Mgd = \frac{p_\psi^2}{2I_{\parallel}} + Mgd$$

$$\frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\xi}^2 = \left(E - \frac{1}{2I_{\parallel}} p_\psi^2 - Mgd\xi \right) (1 - \xi^2) - \frac{1}{2I_{\perp}} (p_\phi - p_\psi \xi)^2 =$$

$$= \left(\frac{p_\psi^2}{2I_{\parallel}} + Mgd - \frac{1}{2I_{\parallel}} p_\psi^2 - Mgd\xi \right) (1 - \xi^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_{\perp}} (1 - \xi)^2 =$$

$$= Mgd(1 - \xi)(1 - \xi^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_{\perp}} (1 - \xi)^2 = Mgd(1 - \xi)^2 \left(1 + \xi - \frac{p_\psi^2 / 2I_{\perp}}{Mgd} \right)$$

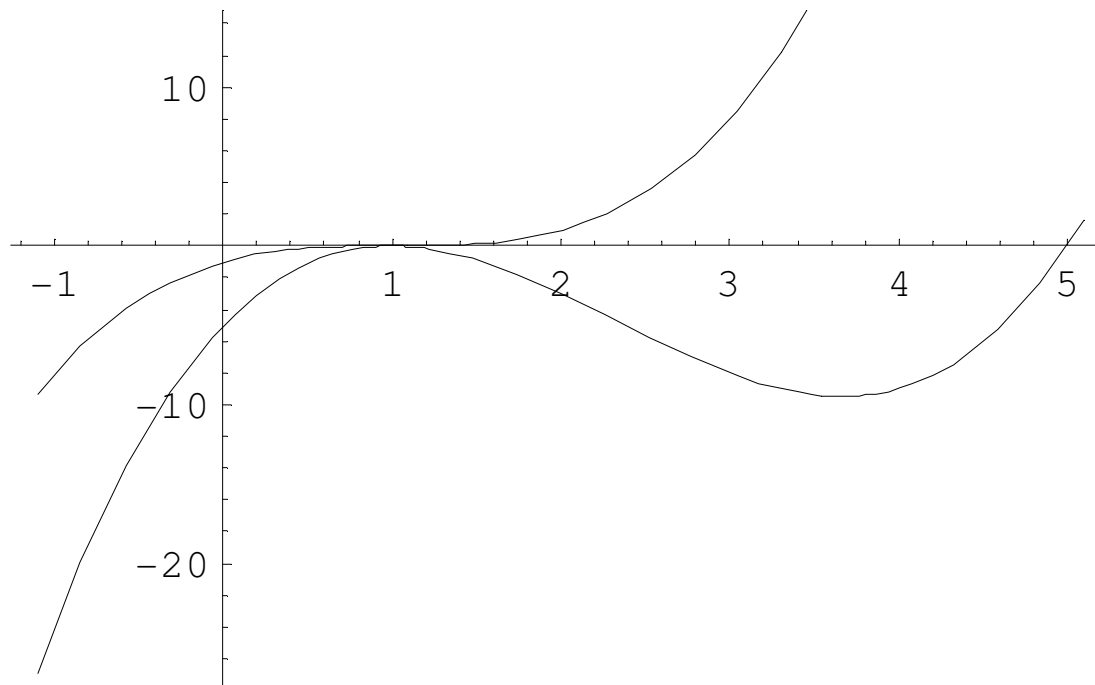
Przebieg funkcji decydującej o ewolucji zmiennej ξ zależy istotnie tylko od jednego parametru jakim jest stosunek energii kinetycznej „u góry” do energii potencjalnej w tym położeniu, mierzonej od punktu podparcia.

$$\frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\xi}^2 = Mgd(1 - \xi)^2 \left(1 + \xi - \frac{p_{\psi}^2 / 2I_{\perp}}{Mgd} \right)$$

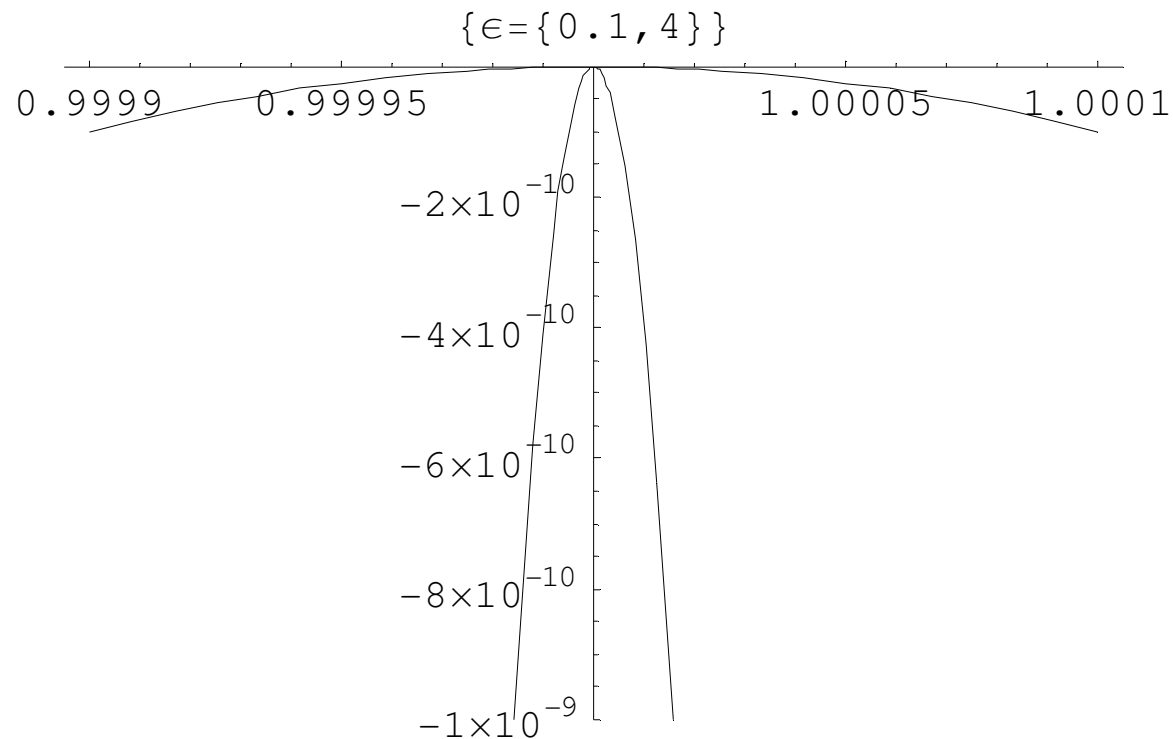
Gdy stosunek ten przekracza 2 i wynosi $2 + \varepsilon$, decydująca część wynosi:

$$(1 - \xi)^2 (1 + \xi - 2 - \varepsilon) = (1 - \xi)^2 (\xi - (1 + \varepsilon))$$

$$\{\varepsilon = \{0.1, 4\}\}$$



W obszarze $\{-1,1\}$ jedyną wartością „nadającą” się na wartość ξ^2 , jest 0 w punkcie $\xi=1$. Przyjrzyjmy się w powiększeniu otoczeniu tego punktu:

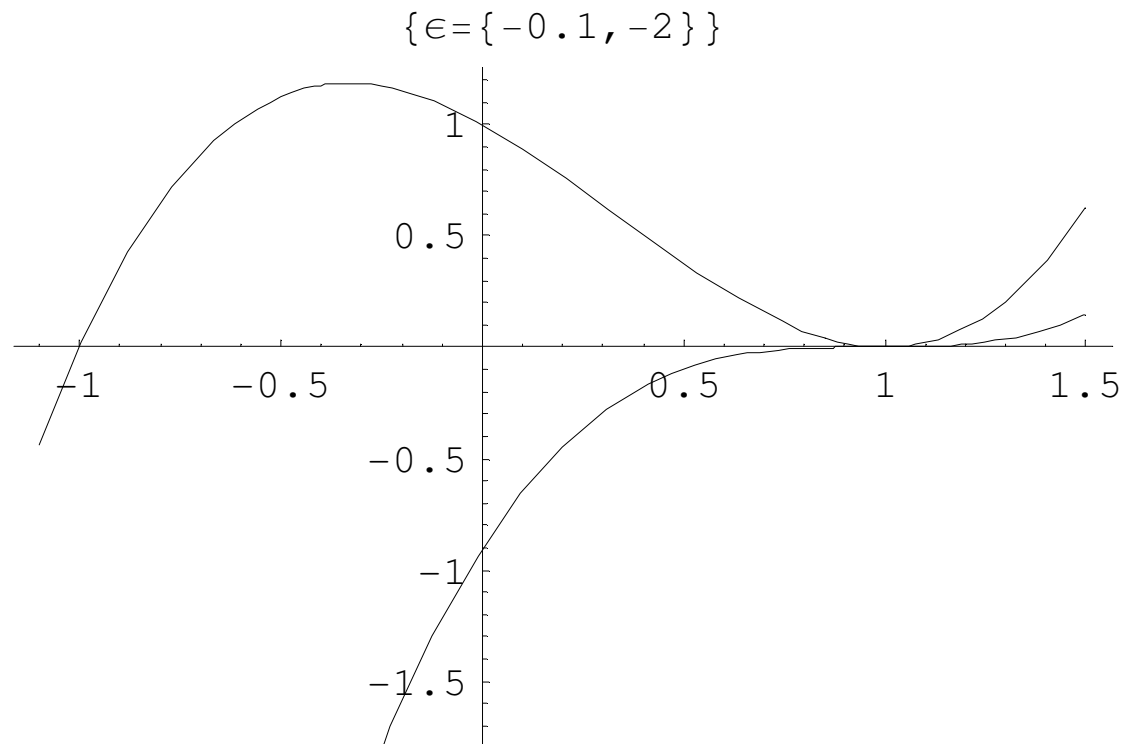


Jeśli wyobrazić sobie, że nie byliśmy „zbyt staranni” i wartości początkowe różnią się nieznacznie od tych idealnych, wykresy trochę się przesuną, czy zdeformują. Bąk szybki, o stromym maksimum, może wygenerować niewielki przedział wokół $\xi=1$. Dla bąka spełniającego „skromnie” warunek stabilności, przedział fluktuacji kąta będzie dużo większy.

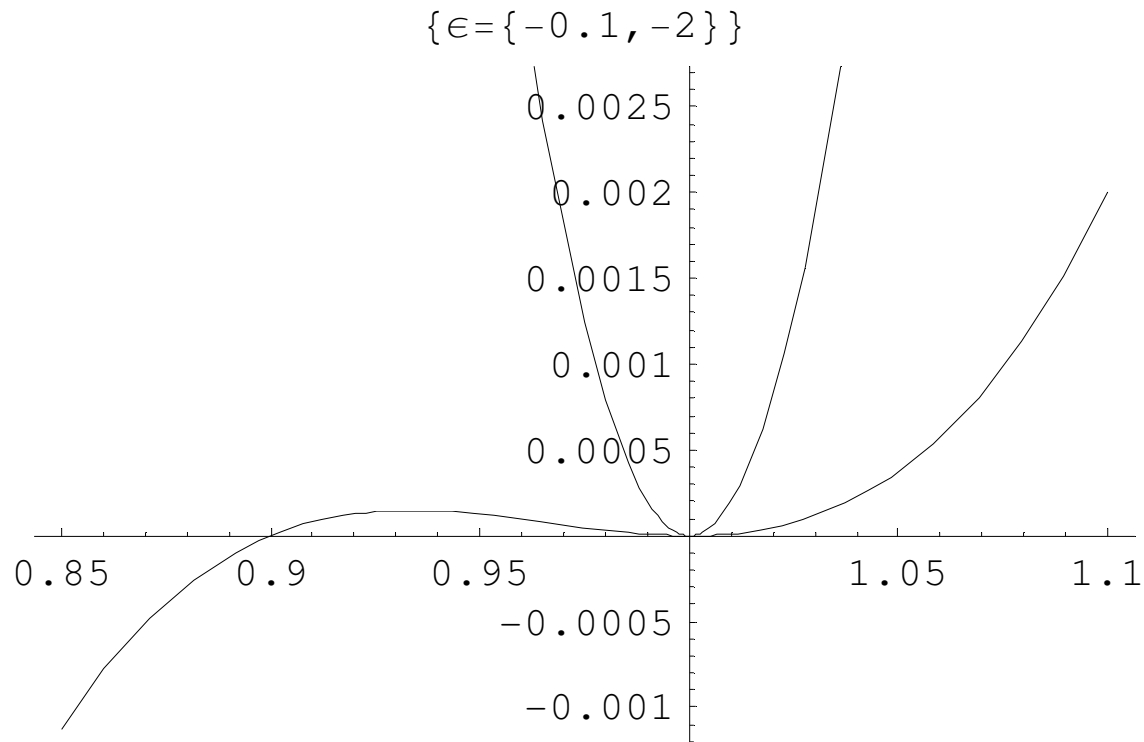
Gdy bąk jest naprawdę powolny, tj. dla:

$$2 > \frac{p_{\psi}^2 / 2I_{\perp}}{Mgd} \geq 0,$$

czyli dla $0 > \varepsilon \geq -2$, przebieg funkcji wyznaczającej kwadrat prędkości, ξ^2 ulega zmianie, gdyż teraz funkcja mnożąca $(1 - \xi)^2$ jest **dodatnia** w otoczeniu $\xi=1$



Spójrzmy na ten wykres „przez lupę”:



Aczkolwiek punkt $\xi=1$ jest rozwiązaniem (zarówno dla bąka „leniwego” jak i **całkiem niewirującego**, tj. dla wahadła fizycznego) równań ruchu, to **najdrobniejsze** zakłócenie wyzwała ruch w skończonym przedziale – w powyższym przykładzie bąk odchyła się od pionu o $\arccos(0.9) = 25.4^\circ$, po czym wraca w **okolice** wierzchołka.

Ruch jest wyjątkowo „parszywy”, gdyż formalnie, okres oscylacji jest nieskończony

$$t = \int \frac{d\xi}{\dot{\xi}} \propto \int_1 \frac{-d\xi}{\sqrt{(1-\xi)^2(1+\xi-2-\varepsilon)}} \approx \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \int_1 \frac{-d\xi}{(1-\xi)}$$

Bąk rzeczywisty, wskutek, minimalnego choćby, tarcia w kolejnym cyklu odpadania i powrotu zmienia stałe całkowania nieznacznie, ale **odstępstwa** od wartości idealnych zmieniają się procentowo znacznie.

Zbadajmy wreszcie sytuację, jaka powstaje, gdy rozkręcony wokół swojej osi bąk uwolnimy od więzów podtrzymujących tę oś w trakcie rozkręcania.

Warunki początkowe są:

$$\xi(0) = \cos(\vartheta_0) \equiv \xi_0 \quad \dot{\xi}(0) = 0 \quad \psi(0) = \omega \quad \dot{\phi}(0) = 0$$

$$p_\psi = I_{\parallel} \omega$$

$$p_\phi = p_\psi \xi_0$$

$$E = \frac{1}{2} I_{\parallel} \omega^2 + Mgd\xi_0 = \frac{p_\psi^2}{2I_{\parallel}} + Mgd\xi_0$$

$$\frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\xi}^2 = (E - \frac{1}{2I_{\parallel}} p_\psi^2 - Mgd\xi)(1 - \xi^2) - \frac{1}{2I_{\perp}} (p_\phi - p_\psi \xi)^2 =$$

$$= \left(\frac{p_\psi^2}{2I_{\parallel}} + Mgd\xi_0 - \frac{1}{2I_{\parallel}} p_\psi^2 - Mgd\xi \right) (1 - \xi^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_{\perp}} (\xi_0 - \xi)^2 =$$

$$= Mgd(\xi_0 - \xi)(1 - \xi^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_{\perp}} (\xi_0 - \xi)^2 = Mgd(\xi_0 - \xi) \left(1 - \xi^2 - \frac{p_\psi^2 / 2I_{\perp}}{Mgd} (\xi_0 - \xi) \right)$$

$$(\xi_0 - \xi) \left(1 - \xi^2 - \frac{p_\psi^2 / 2I_\perp}{Mgd} (\xi_0 - \xi) \right)$$

Trójmian kwadratowy w nawiasie można, oczywiście rozłożyć na iloczyn czynników w sposób ścisły. Całka z pierwiastka kwadratowego wielomianu trzeciego stopnia jest nie elementarna. Chcąc mieć jasne wnioski dotyczące zachowania bąka wykonującego **małe nutacje**, wystarczy trójmian kwadratowy przybliżyć. Przy naszych warunkach początkowych oznacza to, że **bąk musi być szybki**. Ostatni człon w nawiasie spowoduje znikanie trójmianu już dla niewielkiej zmiany ξ . Wolno zmienny czynnik ξ^2 . możemy zastąpić jego wartością początkową.

$$\begin{aligned} 1 - \xi^2 - \frac{p_\psi^2 / 2I_\perp}{Mgd} (\xi_0 - \xi) &\approx 1 - \xi_0^2 - \left(\frac{p_\psi^2 / 2I_\perp}{Mgd} \right) (\xi_0 - \xi) = \\ &= \left(\frac{p_\psi^2 / 2I_\perp}{Mgd} \right) \left(\frac{Mgd}{p_\psi^2 / 2I_\perp} (1 - \xi_0^2) - \xi_0 + \xi \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} I_{\perp} \dot{\xi}^2 = Mgd (\xi_0 - \xi) \left(\frac{p_{\psi}^2 / 2I_{\perp}}{Mgd} \right) \left(\frac{Mgd}{p_{\psi}^2 / 2I_{\perp}} (1 - \xi_0^2) - \xi_0 + \xi \right)$$

$$\dot{\xi}^2 = \frac{I_{\parallel}^2}{I_{\perp}^2} \omega^2 (\xi_0 - \xi) \left(\xi - \left(\xi_0 - \frac{Mgd}{p_{\psi}^2 / 2I_{\perp}} (1 - \xi_0^2) \right) \right)$$

$$(\xi_0 - \xi)(\xi - \xi_1) = \left(\frac{\xi_0 - \xi_1}{2} \right)^2 - \left(\xi - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right)^2$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego! Zmienna $\xi = \cos \vartheta$ zmienia się w przedziale:

$$\cos \vartheta_0 \geq \cos \vartheta \geq \cos \vartheta_0 - \frac{Mgd}{p_{\psi}^2 / 2I_{\perp}} \sin^2 \vartheta_0$$

Częstością nutacji jest $\omega_{\text{nut}} = \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega$, a amplitudą: $\frac{I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin^2 \vartheta_0$

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 - \frac{I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin^2 \vartheta_0 + \frac{I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin^2 \vartheta_0 \cos \left(\frac{I_{\parallel} \omega t}{I_{\perp}} \right) =$$

$$= \cos \vartheta_0 - \frac{I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin^2 \vartheta_0 \left(1 - \cos \frac{I_{\parallel} \omega t}{I_{\perp}} \right) =$$

$$= \cos \vartheta_0 - \frac{2I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \frac{I_{\parallel} \omega t}{2I_{\perp}}$$

$$\cos(\vartheta) - \cos(\vartheta_0) = -\sin(\vartheta_0)(\vartheta - \vartheta_0)$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{2I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin \vartheta_0 \sin^2 \frac{I_{\parallel} \omega t}{2I_{\perp}}$$

$$p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \vartheta = I_{\perp} \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \vartheta}{I_{\perp} \sin^2 \vartheta} = I_{\parallel} \omega \frac{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}{I_{\perp} \sin^2 \vartheta} \approx \frac{2Mgd}{I_{\parallel} \omega} \sin^2 \frac{I_{\parallel} \omega t}{2I_{\perp}}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2Mgd}{I_{\parallel}\omega} \sin^2 \frac{I_{\parallel}\omega t}{2I_{\perp}} = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega} \left(1 - \cos \frac{I_{\parallel}\omega t}{I_{\perp}}\right)$$

$$\varphi = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega} \left(t - \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}\omega} \sin \frac{I_{\parallel}\omega t}{I_{\perp}}\right)$$

Uśredniając po wielu okresach nutacji, widzimy systematyczny wzrost wartości azymutu φ z prędkością średnią

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega}$$

Jednak w czasie **krótkim**, mamy

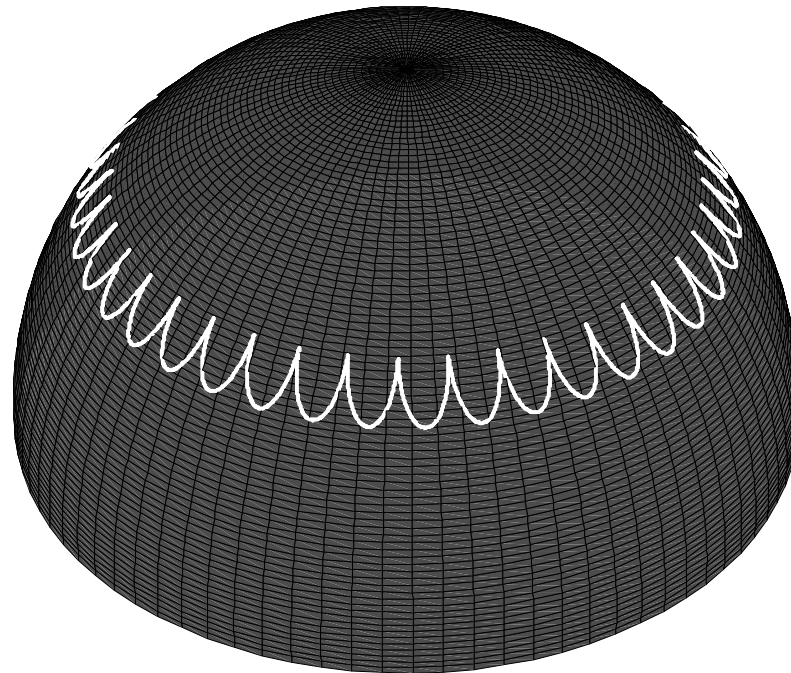
$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{2I_{\perp}Mgd}{I_{\parallel}^2\omega^2} \sin \vartheta_0 \sin^2 \frac{I_{\parallel}\omega t}{2I_{\perp}} \propto t^2$$

$$\varphi = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega} \left(t - \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}\omega} \sin \frac{I_{\parallel}\omega t}{I_{\perp}}\right) \propto t^3$$

Oś symetrii opada początkowo pionowo!

Z kolei $\dot{\vartheta} \propto t$ co oznacza, iż do początkowej prędkości kątowej dochodzi składowa na kierunku linii węzłów. Koniec wektora prędkości kątowej „rusza w drogę” (po równoleżniku) od razu ze skończoną prędkością. Oś symetrii zostaje w tyle, a prędkość kątowa jej ucieka.

Narastające oddalenie powoduje iż biegun bryły zaczyna uczestniczyć w ruchu. W pierwszym etapie w kierunku pionowym, a stopniowo, im jest niżej, tym bardziej narasta składowa pozioma.



A jak zachowują się wektory prędkości kątowej i momentu pędu?

Mamy wszystkie niezbędne elementy, by to zbadać. Z rysunku definiującego kąty Eulera odczytujemy macierz przejścia od układu bryły do układu inercjalnego:

$$\left(\begin{array}{ccc} \cos[\varphi] \cos[\psi] - \cos[\theta] \sin[\varphi] \sin[\psi] & -\cos[\theta] \cos[\psi] \sin[\varphi] - \cos[\varphi] \sin[\psi] & \sin[\theta] \sin[\varphi] \\ \cos[\psi] \sin[\varphi] + \cos[\theta] \cos[\varphi] \sin[\psi] & \cos[\theta] \cos[\varphi] \cos[\psi] - \sin[\varphi] \sin[\psi] & -\cos[\varphi] \sin[\theta] \\ \sin[\theta] \sin[\psi] & \cos[\psi] \sin[\theta] & \cos[\theta] \end{array} \right)$$

Wyprowadzaliśmy także wzory na prędkości kątowe w układzie bryły:

$$\omega_{x'} = \dot{\theta} * \cos[\psi] + \dot{\varphi} * \sin[\theta] \sin[\psi];$$

$$\omega_{y'} = -\dot{\theta} * \sin[\psi] + \dot{\varphi} * \sin[\theta] \cos[\psi];$$

$$\omega_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} * \cos[\theta];$$

Zbieramy wzory na kąty Eulera i ich pochodne:

$$\dot{\varphi} = \frac{2Mgd}{I_{\parallel}\omega} \sin^2 \frac{I_{\parallel}\omega t}{2I_{\perp}} = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega} \left(1 - \cos \frac{I_{\parallel}\omega t}{I_{\perp}}\right)$$

$$\varphi = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega} \left(t - \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}\omega} \sin \frac{I_{\parallel}\omega t}{I_{\perp}}\right)$$

$$\dot{\psi} = - \frac{Mgd \cos [\theta_0]}{B_{\parallel} * \omega} * \left(1 - \cos \left[\frac{B_{\parallel} \omega}{B_T} t\right]\right)$$

$$\psi = \omega t \left(1 - \frac{Mgd \cos [\theta_0]}{B_{\parallel} \omega^2}\right) + \frac{B_T Mgd \cos [\theta_0]}{B_{\parallel}^2 \omega^2} \sin \left[\frac{B_{\parallel} * \omega}{B_T} * t\right]$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{2I_{\perp} Mgd}{I_{\parallel}^2 \omega^2} \sin \vartheta_0 \sin^2 \frac{I_{\parallel}\omega t}{2I_{\perp}}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{Mgd}{I_{\parallel}\omega} \sin \vartheta_0 \sin \frac{I_{\parallel}\omega t}{I_{\perp}}$$

Teraz już tylko pomnożyć macierzowo, raz wektor momentu pędu: $\{B_{tr}\omega_{x'}, B_{tr}\omega_{y'}, B_r\omega_{z'}\}$
 drugi raz wektor prędkości kątowej i **rozwinąć względem małego parametru:**

$$\left\{ \omega \cos \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin[\theta_0] B_r, \omega \sin \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin[\theta_0] B_r, \omega \cos[\theta_0] B_r \right\}$$

Wektor momentu pędu (w tym przybliżeniu **wykonuje precesję!!!**

Prędkość kątowa już nie, ale **w pierwszej chwili**, też zaczyna ruch względem **równoleżnika**.

$$\left\{ \omega \cos \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin[\theta_0] - \frac{d Mg \left(2 \cos \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \cos[\theta_0] \sin \left[\frac{t \omega B_r}{2 B_{tr}} \right]^2 + \sin \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin \left[\frac{t \omega B_r}{B_{tr}} \right] \right) \sin[\theta_0] (B_r - B_{tr})}{\omega B_r^2}, \right.$$

$$\left. \omega \sin \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin[\theta_0] + \frac{d Mg \left(-2 \cos[\theta_0] \sin \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin \left[\frac{t \omega B_r}{2 B_{tr}} \right]^2 + \cos \left[\frac{dt Mg}{\omega B_r} \right] \sin \left[\frac{t \omega B_r}{B_{tr}} \right] \right) \sin[\theta_0] (B_r - B_{tr})}{\omega B_r^2}, \right.$$

$$\left. \omega \cos[\theta_0] + \frac{2 d Mg \sin \left[\frac{t \omega B_r}{2 B_{tr}} \right]^2 \sin[\theta_0]^2 (B_r - B_{tr})}{\omega B_r^2} \right\}$$

Skoro wiemy gdzie jest moment pędu i gdzie oś symetrii, to prędkość chwilowa musi być na tym samym południku.

$$\tan(\alpha_{\vec{k}', \vec{J}}) = B_{tr} / B_r * \tan(\alpha_{\vec{k}', \omega})$$