Elektrodynamika z elementami teorii pola

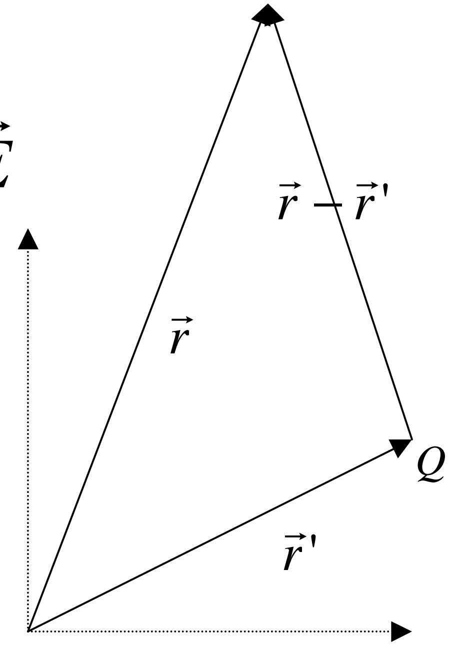
Wykład 1

Prawo Coulomba:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}(2.9979....\cdot 10^8)^2\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

Zas. superpozycji: $$\vec{F} = q\sum\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3} = q\vec{E}$$

Rozkład ciągły: $$\vec{E} = \iiint\frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\mathrm{d}^3r'$$



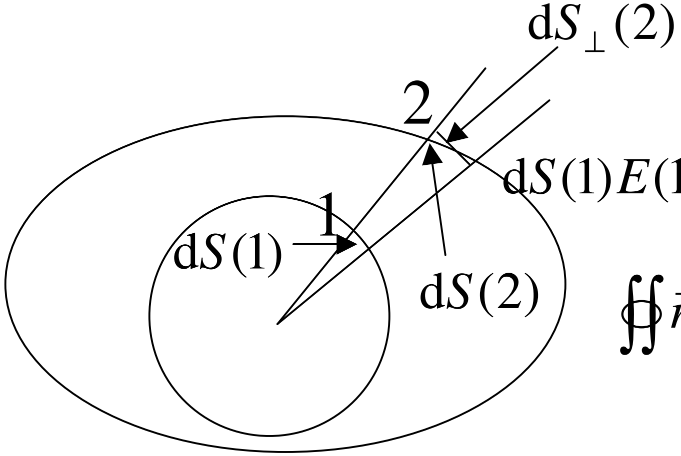
A) Żmudne liczenie można czasami zastąpić sprytem

B) Nie zawsze rozkład ładunku z góry znany – on się ustala dążąc do równowagi.

Z powyższych powodów, a także ze względu na konieczność uogólnień, pozornie zakończone zadanie wymaga dalszej analizy własności pola *E*.

Przyciąganie jabłka przez rozciągłą Ziemię – trudny problem dla Newtona. W końcu scałkował.

150 lat później Gauss wpadł na genialną sztuczkę. Sztuczka działa tylko dla potęgi **dokładnie**2 w prawie oddziaływania. Już samo to daje nadzieję, że oba prawa odwrotnych kwadratów mają uzasadnienie w pogłębionej teorii. Współczesne teorie pola wiążą owe 2 z wymiarem czasoprzestrzeni. W czasoprzestrzeni, np.. 5-wymiarowej byłoby n=5-2=3. Taka siłą nie wystarczyłaby ani do utrzymania planet na orbitach, ani nie wystarczyłaby do utworzenia atomów. Czasoprzestrzeń jest 4-wymiarowa, a wykładnik w prawach Newtona i Coulomba **musi** wynosić 2 jeśli życie ma istnieć i jeśli ma istnieć ktoś stawiający takie pytania.



$$\mathrm{d}S(1)E(1) = \mathrm{d}S_\perp(2)E(2) = \mathrm{d}S(2)E(2)\cos(\alpha) = \mathrm{d}S(2)\vec{E}(2)\vec{n}(2)$$

$$\oiint \vec{n}\vec{E}(2)\mathrm{d}S(2) = \oiint E(1)\mathrm{d}S(1) = 4\pi r^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Gdy ładunek leży na zewnątrz. Każdy stożek przecina powierzchnię dwa razy, a wkłady się kasują . Z powodu superpozycji, dla wielu ładunków strumień jest sumą ładunków objętych powierzchnią. Dla rozkładu ciągłego:

$$\oiint \vec{n}\vec{E}\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{calkowite}}}{\varepsilon_0} = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}\mathrm{d}^3 r'$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$$

$$\vec{E} = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\mathrm{d}^3r' = -\vec{\nabla}\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\mathrm{d}^3r' = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\varphi = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\mathrm{d}^3r'$$

Ale pole, które jest gradientem, ma znikającą rotację: $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$

Z twierdzenia Stokesa: $\oiint \vec{n}\,\mathrm{rot}\vec{E}\,\mathrm{d}S = \oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0$

Korzystając z: $\oiint \vec{A}\vec{n}\,\mathrm{d}S \equiv \iiint \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V$ mamy:

$$\iiint \mathrm{div}\vec{E}\,\mathrm{d}^3r = \oiint \vec{n}\vec{E}\,\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\mathrm{d}^3r \Rightarrow$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\iiint \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot f(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r = f(\vec{r})$$

$$\varphi = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\mathrm{d}^3 r' = \iiint \frac{Q\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\mathrm{d}^3 r' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}$$

$$\Delta\frac{1}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} = -\delta(\vec{r}-\vec{r})$$

Linie sił – namiastka analizy wektorowej (samouk Faraday).

Dzięki dokładnie 2 potędze, linie sił pola elektrostatycznego $\vec{E}$ ani się nie urywają, ani zaczynają, gdziekolwiek indziej niż na ładunku elektrycznym.

Twierdzenie o jednoznaczności

Wersja „uboga". Gdyby dwa różne pola miały te same wartości krążenia i strumienia, ich różnica musiałaby mieć krążenie i strumień zero. Linie pola nie mogłyby się zaczynać, ani kończyć. **Musiałyby się zamykać.**

Krążenie po takim konturze hipotetycznej różnicy byłoby więc różne od zera, wbrew założeniu.

Różnica ta musi tożsamościowo znikać.

Wersja „bogata". Znów zakładamy istnienie dwóch pól i tworzymy różnicę. Jej rotacja znika, zatem różnica ta, *u,* jest potencjalna i spełnia równanie Laplace'a.

$$0 = \mathrm{div}\vec{\nabla} u$$

$$\mathrm{div}(u\,\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} u) + u\,\mathrm{div}(\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} u)^2$$

$$\iiint (\vec{\nabla} u)^2 \, \mathrm{d}V = \iiint \mathrm{div}(u \, \vec{\nabla} u) \mathrm{d}V = \oiint u \, \vec{n} \vec{\nabla} u \mathrm{d}S$$

Równanie Poissona w skończonej objętości

Czy mogą być 2 różne rozwiązania? Jaki warunek ujednoznacznia?

Powyższa tożsamość daje odpowiedź. Wielkość u, czyli różnica dwóch rozwiązań **znika**, gdy albo:

A) Rozwiązania na brzegu przyjmować muszą wspólną wartość. Wtedy na brzegu u=0

B) Składowe normalne pola na brzegu przyjmują zadaną wartość. Wtedy na brzegu $\vec{n} \vec{\nabla} u = 0$

C) Na części brzegu potencjał, na pozostałej składowa normalna pola przyjmuje zadana wartość.

A – zagadnienie Dirichleta

B – zagadnienie Neumana

C – zagadnienie brzegowe mieszane.

Przewodniki

W elektrostatyce, przewodniki dostarczają warunku brzegowego. Z definicji, w przewodniku nie może istnieć pole statyczne – wywoływałoby ono statyczny prąd, mimo dyssypacji związanej z jego przepływem. Ładunki przewodnika częściowo się rozdzielają i tak się długo (raczej, w naszej ludzkiej skali czasu, krótko!) przegrupowują aż pole od tych ładunków **zniesie kompletnie** pole od ładunków zewnętrznych. Pole elektryczne wewnątrz jest równe zeru,a potencjał **stały**.

W szczególności, doprowadzając do różnych przewodników końcówki określonych źródeł prądu, możemy wartości potencjału zadawać z góry. Znajomość tego potencjału wystarcza do wyznaczenia pola w zadanym obszarze, mimo braku wiedzy o rozmieszczeniu ładunków **poza** tym obszarem.

Funkcja Greena dla zagadnienia Dirichleta

Jeśli dla jakiegoś obszaru geometrycznego rozwiążemy jedno szczególne zagadnienie elektrostatyki, możemy za pomocą tego rozwiązania, wyrazić rozwiązanie zadania najogólniejszego (dla danego obszaru) za pomocą kwadratury (czyli całkowania).

Tym szczególnym zadaniem jest potencjał od ładunku jednostkowego (dokładniej $Q/\varepsilon_0 = 1$) umieszczonego w dowolnym punkcie obszaru, którego brzeg ma potencjał zero (jest uziemiony). Rozwiązanie to, nazywa się funkcją Greena (zagadnienia Dirichleta):

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$G(\vec{r} \in \Sigma, \vec{r}\,') = 0$$

Jawną postać funkcji Greena daje się wyznaczyć jedynie w przypadkach szczególnych, o wysokiej symetrii.Wypracowano wiele metod – metoda obrazów, metoda rozwinięć na funkcje własne, metoda przekształceń konforemnych. Na ćwiczeniach poznamy charakterystyczne przykłady.

Konstrukcja rozwiązania ogólnego

Lemat: $G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{y},\vec{x})$

$$\iiint \mathrm{div}\left(\Phi\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}^3 r =$$

$$\iiint \left(\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi\right)\mathrm{d}^3 r = \oiint \left(\Phi\vec{n}\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{n}\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}S$$

Podstawmy:

$$\Phi(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{x}),$$

$$\Psi(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{y})$$

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \Delta G(\vec{r},\vec{x}) = -\delta(\vec{r}-\vec{x}),$$

$$\Delta\Psi(\vec{r}) = \Delta G(\vec{r},\vec{y}) = -\delta(\vec{r}-\vec{y})$$

Delty pozwalają wykonać całkowanie i dostajemy:

$$\iiint \left(-G(\vec{r},\vec{x})\delta(\vec{r}-\vec{y}) + G(\vec{r},\vec{y})\delta(\vec{r}-\vec{x})\right)\mathrm{d}^3 r =$$

$$G(\vec{x},\vec{y}) - G(\vec{y},\vec{x}) = \oiint \left(G(\vec{r}\in\Sigma,\vec{x})\vec{n}\vec{\nabla}\Psi - G(\vec{r}\in\Sigma,\vec{y})\vec{n}\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}S = 0$$

$$\iiint \left(\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi\right)\mathrm{d}^3 r' = \oiint \left(\Phi\vec{n}\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{n}\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}S$$

Teraz do tej tożsamości wstawimy za jedną z funkcji poszukiwane rozwiązanie, za drugą funkcję Greena (w tożsamości, jako zmienna całkowania służy teraz zmienna $\vec{r}\,'$):

$$\Phi = \varphi$$

$$\Psi(\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,', \vec{r})$$

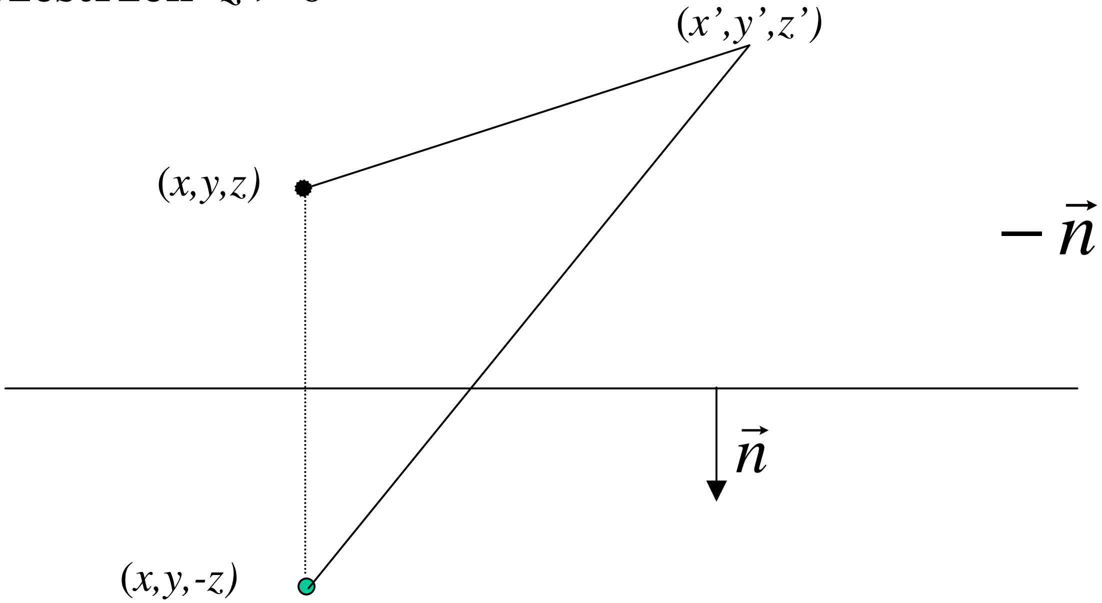
$$\iiint \left(\varphi(\vec{r}\,')(-\delta(\vec{r}\,' - \vec{r})) + G(\vec{r}\,', \vec{r})\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \right)\mathrm{d}^3 r' = \oiint \left(\varphi(\vec{r}\,')\vec{n}\vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}\,', \vec{r}) - G(\vec{r}\,' \in \Sigma, \vec{r})\vec{n}\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}S$$

Wykonujemy całkowanie z deltą, korzystamy ze znikania funkcji Greena na brzegu uzyskując:

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \left(\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} G(\vec{r}\,', \vec{r}) \right)\mathrm{d}^3 r' - \oiint \left(\varphi(\vec{r}\,')\vec{n}\vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}\,', \vec{r})\right)\mathrm{d}S$$

Dla rozwiązania znikającego na brzegu, powinniśmy dostać po prostu superpozycję funkcji Greena, całkowaną po położeniach ładunku, a nie punktu obserwacji!!! Na szczęście *G* jest symetryczna!

Półprzestrzeń $z > 0$



$$-\vec{n}\vec{\nabla}\Big|_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$G(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z'}\Bigg|_{z'=0} = \frac{(-1/2)\cdot 2(z'-z)}{4\pi(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}\,)^3}\Bigg|_{z'=0} \cdot 2 = \frac{z}{2\pi(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2}\,)^3}$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{z}{2\pi}\iint \frac{\varphi(\mathrm{x}', \mathrm{y}')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2}\,)^3}$$

Załóżmy, że płaszczyzna ma potencjał zmienny wzdłuż osi x, a niezależny od y.

$$\varphi(x', y', 0) = \varphi(x')$$

Ponieważ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y}{a^2\sqrt{y^2+a^2}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{y^2+a^2}\right)^3}$ Całkowanie po y jest natychmiastowe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y'}{\left(z^2+(x-x')^2+y'^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{z^2+(x-x')^2}$$

Rozwiązanie jest w tym przypadku zależne od x i od z

$$\varphi(x, y, z) = \frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mathrm{x}')\mathrm{d}x'}{(x-x')^2+(z)^2}$$

Przypuśćmy, że lewa połowa płaszczyzny ma potencjał φ_0, a prawa jest uziemiona.

$$\varphi(x, y, z) = \frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi_0\mathrm{d}x'}{(x-x')^2+(z)^2} = \frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{-x} \frac{\varphi_0\mathrm{d}x'}{(x')^2+(z)^2} = \frac{\varphi_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{z}\right)$$

$$E_x = \frac{\varphi_0}{\pi}\frac{z}{z^2+x^2} \qquad E_z = -\frac{\varphi_0}{\pi}\frac{x}{z^2+x^2}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{z^2+x^2}}$$