Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 10

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0\dot{\vec{E}}) \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Energia pól E i B

Zaczniemy od statycznego
rozkładu ładunków

$$\delta W_{\delta e} = -\int_{\infty}^{A} \delta e \vec{E} \mathrm{d}\vec{l} = \delta e \int_{\infty}^{A} \vec{\nabla}\varphi \, \mathrm{d}\vec{l} = \varphi(A)\,\delta e \Rightarrow \delta W_{\delta\rho} = \iiint \varphi(\vec{r})\,\delta\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$$

$$\delta W_{\delta\rho} = \iiint \varphi(\vec{r})\,\delta\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r = \iiint \left(\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \,|\,\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r' \right) \delta\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r =$$

$$= \iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')\delta\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 \,|\,\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r' \mathrm{d}^3 r = \iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \,|\,\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r' \mathrm{d}^3 r$$

$$\delta W = \iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')\delta\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\mathrm{d}^3 r = \iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\mathrm{d}^3 r =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}\,')+\rho(\vec{r}\,')\delta\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2}\iiint\iiint \frac{\delta(\rho(\vec{r}\,')\rho(\vec{r}))}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\mathrm{d}^3 r$$

$$= \delta\,\frac{1}{2}\iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\mathrm{d}^3 r$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\mathrm{d}^3 r$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint \rho(\vec{r})\left(\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\right)\mathrm{d}^3 r \;= \frac{1}{2}\iiint \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint \varphi(\vec{r})\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0\left(\cancel{\operatorname{div}\left(\vec{E}(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\right)}-\vec{E}(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)\mathrm{d}^3r=$$

$$=\iiint\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\right)\mathrm{d}^3r=\iiint\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\,\mathrm{d}^3r$$

Gęstość energii pola elektrycznego: $\dfrac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$

W materii sytuacja trochę bardziej złożona. Kwadrat średniej wartości, to nie to samo co średnia z kwadratu. Liczenie energii wg powyższej formuły bezcelowe. Ponadto, pojawienie się polaryzacji oznacza wykonywanie pracy przeciw siłom („sprężynkom”), przeciwstawiającym się rozciąganiu ładunków w molekułach.

W materii nie interesuje nas zatem energia pola, a energia układu: pole i siły elastyczne.

Liczymy pracę sił przyłożonych do ładunków makroskopowych. (Nad ładunkami związanymi pracę wykonują siły atomowe. Jedna praca równa drugiej)

$$\delta W = \iiint \varphi(\vec{r})\delta\,\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r =$$

(dla ukladow liniowych)

$$= \frac{1}{2}\delta\iiint \varphi(\vec{r})\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$$

Energia swobodna: $$F = \iiint\left(\frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\right)\mathrm{d}^3 r = \iiint \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\vec{E}^2\,\mathrm{d}^3 r$$

Powyższe rozważania nie wymagały równań Maxwella. Prezentuję je teraz, bo:

1) Realność pola jest ewidentna, gdy są pola oderwane od źródeł.

2) Dopiero teraz można policzyć energię magnetyczną.

Energia pola magnetycznego.

Przypomnijmy: $\mathrm{E} = -\dot{\Phi}$

Prąd płynący w pętli wytwarza pole magnetyczne. Dla danego kształtu, strumień własnego pola jest proporcjonalny do natężenia prądu:

$$\Phi = L\,I \qquad L \text{ – wsp. samoindukcji}$$

$$\mathrm{E} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I}$$

Źródło prądu, które wymusza prąd w obwodzie **wbrew** sile elektromotorycznej samoindukcji, musi pracować z mocą (odpowiadającą przyrostowi energii)

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{E}\,I = L\,\dot{I}\,I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L\,I^2\right)$$

$$W_M = \frac{1}{2}L\,I^2 = \frac{1}{2}\Phi\,I$$

Ale strumień: $$\Phi = \iint \vec{B}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint \mathrm{rot}\,\vec{A}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

$$W_M = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2} I \oint \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{2}\oint \vec{A}\vec{I}\,\mathrm{d}l \Rightarrow \frac{1}{2}\iiint \vec{A}\,\vec{j}\,\mathrm{d}^3 r$$

$$W_E = \frac{1}{2}\iiint \varphi(\vec{r})\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$$

Wyrazimy teraz prąd przez pole *B*.

$$W_M = \frac{1}{2}\iiint \vec{A}\,\vec{j}\,\mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2\mu_0}\iiint \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\,\mathrm{d}^3 r$$

Tożsamość:

$$\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

Pozwala przepisać wynik w postaci:

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0}\iiint \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\,\mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2\mu_0}\iiint \vec{B}^2\,\mathrm{d}^3 r$$

$$W_E = \iiint \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\,\mathrm{d}^3 r$$

Twierdzenie Poyntinga

Wyrażenia dla gęstości energii znaleźliśmy oddzielnie dla pól elektrycznego (statycznego), oddzielnie dla pola magnetycznego. Czy wyrażenia te pozostają słuszne dla dowolnie zmiennych pól? Czy w elektrodynamice obowiązuje zasada zachowania energii? Rozważmy w tym celu dowolny układ pól i ładunków. W każdej chwili na każdy ładunek działa siła zmieniająca jego energię kinetyczną:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_i = q_i(\vec{E}(\vec{r}_i,t)+\vec{v}_i\times\vec{B}(\vec{r}_i,t))\cdot\vec{v}_i = q_i\vec{E}(\vec{r}_i,t)\cdot\vec{v}_i$$

Dygresja:

$$\mathcal{E}^2/c^2-\vec{p}^{\,2}=m^2c^2 \Rightarrow 2\mathcal{E}/c^2\mathrm{d}\mathcal{E}-2\vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{p}=0 \Rightarrow \mathcal{E}/c^2\mathrm{d}\mathcal{E}=\vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{p}$$

$$\mathcal{E}/c^2\,\vec{v}=\vec{p}$$

$$\cancel{\mathcal{E}/c^2}\mathrm{d}\mathcal{E}=\cancel{\mathcal{E}/c^2}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{p}\Rightarrow \mathrm{d}\mathcal{E}=\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{p}\Rightarrow \mathrm{d}T=\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{p}=\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{p}=\mathrm{d}\vec{x}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\equiv\mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_{\mathrm{calk}}=\sum q_i\vec{E}(\vec{r}_i,t)\cdot\vec{v}_i=\iiint\rho\vec{v}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\mathrm{d}^3r=\iiint\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\mathrm{d}^3r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T - \iiint \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}^3 r = 0$$

$$-\vec{j}\cdot\vec{E} = \left(-\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B} + \varepsilon_0\dot{\vec{E}}\right)\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}}\boxed{-\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}}\quad\frac{1}{\mu_0}$$

$$\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{B}) \equiv \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}}\boxed{-\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}}$$

$$-\vec{j}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}} + \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{B})\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_{\text{czastek}} + \iiint\left(\varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}} + \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{B})\right)\right)\mathrm{d}^3 r = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_{\text{czastek V}} + \iiint\limits_{\mathrm{V}}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)\mathrm{d}^3 r\right) = -\oint\!\!\oint\limits_{\mathrm{S(V)}}\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Wektor Poyntinga: $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_i = q_i(\vec{E}(\vec{r}_i,t) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i,t))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\mathrm{mech}} = \sum q_i(\vec{E}(\vec{r}_i,t) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i,t)) = \iiint(\rho\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{j}\times\vec{B}(\vec{r},t))\mathrm{d}^3 r$$

Oczekujemy, że prawa strona jest zmianą pędu pola, wyrażenia nie zawierającego wielkości odnoszących się do samych cząstek. Korzystając z równań Maxwella eliminujemy ρ i $\vec{j}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\mathrm{mech}} = \iiint\left((\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E} + (\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\dot{\vec{E}})\times\vec{B}(\vec{r},t)\right)\mathrm{d}^3 r$$

$$-\varepsilon_0\dot{\vec{E}}\times\vec{B} = -\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \varepsilon_0\vec{E}\times\dot{\vec{B}} = -\varepsilon_0\mu_0\dot{\vec{S}} - \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\mathrm{mech}} = \iiint\left((\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E} + (\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\dot{\vec{E}})\times\vec{B}(\vec{r},t) \right)\mathrm{d}^3 r$$

$$-\varepsilon_0\dot{\vec{E}}\times\vec{B} = -\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \varepsilon_0\vec{E}\times\dot{\vec{B}} = -\varepsilon_0\mu_0\dot{\vec{S}} - \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_{\mathrm{mech}} + \iiint\varepsilon_0\mu_0\vec{\mathrm{S}}\mathrm{d}^3 r\right) = \iiint\left((\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + (\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\vec{B})\vec{B} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \right)\mathrm{d}^3 r$$

Suma pędów mechanicznych i całka z pól wzięte są po dowolnie wybranym obszarze. Jeśli powyższe równanie ma mieć cokolwiek wspólnego z (wektorowym!) prawem zachowania, prawa strona powinna dać się przekształcić w całkę powierzchniową.

Rozważmy jedną składową kartezjańską wkładu od jednego z pól

$$\left((\vec\nabla\vec E)\vec E-\vec E\times(\vec\nabla\times\vec E)\right)_1=$$

$$=E_1\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right)-E_2\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)+E_3\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1)^2+\frac{\partial}{\partial x_2}(E_1E_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(E_1E_3)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left((E_1)^2+(E_2)^2+(E_3)^2\right)$$

$$\left((\vec\nabla\vec E)\vec E-\vec E\times(\vec\nabla\times\vec E)\right)_\alpha=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}(E_\alpha E_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(E_\alpha E_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(E_\alpha E_3)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left((E_1)^2+(E_2)^2+(E_3)^2\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(E_\alpha E_\beta-\delta_{\alpha\beta}\frac{E^2}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec p_{\mathrm{mech}}+\iiint\varepsilon_0\mu_0\vec S\,\mathrm{d}^3r\right)_\alpha=\iiint\left(\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(E_\alpha E_\beta-\delta_{\alpha\beta}\frac{E^2}{2}\right)+\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(B_\alpha B_\beta-\delta_{\alpha\beta}\frac{B^2}{2}\right)\right)\mathrm{d}^3r$$

$$T_{\alpha\beta}=\varepsilon_0E_\alpha E_\beta+\frac{1}{\mu_0}B_\alpha B_\beta-\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\alpha\,\mathrm{mech}\;V} + \iiint_V \varepsilon_0 \mu_0 S_\alpha \,\mathrm{d}^3 r \right) = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} \right) \mathrm{d}^3 r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\alpha\,\mathrm{mech}\;V} + \iiint_V \varepsilon_0 \mu_0 S_\alpha \,\mathrm{d}^3 r \right) = \oiint_{\Sigma(V)} T_{\alpha\beta} n_\beta \,\mathrm{d}^2 \sigma$$

$T_{\alpha\beta}$ – Tensor napięć Maxwella

$\varepsilon_0 \mu_0 \vec{S}$ – Gęstość pędu pola em