Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 12

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\Big((E_{0,x}, E_{0,y}, 0)e^{i(kz-\omega t)}\Big) =$$

$$= \vec{a}\cos(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) - \vec{b}\sin(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{a}\cos(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) - \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{b}\sin(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)$$

Koniec wektora *E* porusza się po elipsie o półosiach *a,b*. Jest to fala spolaryzowana **eliptycznie.**

Gdy $b = 0$, fala spolaryzowana **liniowo.**

Gdy $a = b$, mamy polaryzację **kołową.** Wektor elektryczny z pozycji *a* skręca w kierunku *b*. Zatem, gdy trójka $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k}$ tworzy układ prawoskrętny, mamy polaryzację prawą. W przeciwnym wypadku mamy polaryzację lewą.

W obu wypadkach trójka $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ jest prawoskrętna.

Gęstość energii.

Dla polaryzacji kołowej ($a = b$)

$$\vec{E} = \vec{a}\cos(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) - \vec{b}\sin(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) \qquad E^2 = a^2$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E} = \frac{\vec{k}}{ck}\times\vec{E} \qquad B^2 = E^2/c^2 = a^2\varepsilon_0\mu_0$$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 a^2 = \varepsilon_0 a^2$$

Gęstość pędu:

$$\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \varepsilon_0 a\frac{a}{c}\frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{c}\varepsilon_0 a^2\frac{\vec{k}}{k} = \frac{w}{c}\frac{\vec{k}}{k}$$

$$c^2\vec{p}^{\,2} - \mathrm{E}^2 = 0$$

Fale w ośrodkach przezroczystych

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \dot{\vec{D}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Najprostsza sytuacja:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}, \qquad \text{prowadzi do:} \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \varepsilon\mu\dot{\vec{E}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Zamiast $\varepsilon_0\mu_0$, pojawiło się $\varepsilon\mu = \varepsilon_r\mu_r\varepsilon_0\mu_0$

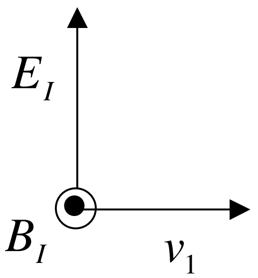
W rozwiązaniu próżniowym wystarczy zastąpić:

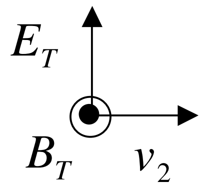
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{n}$$

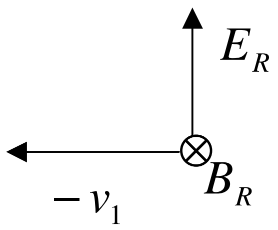
Współczynnik załamania $\quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

Ciała przezroczyste są bardzo słabymi magnetykami,
dla prostoty położymy: $\mu_r = 1$

Fala spolaryzowana liniowo pada na granicę dielektryka (na początek prostopadle)







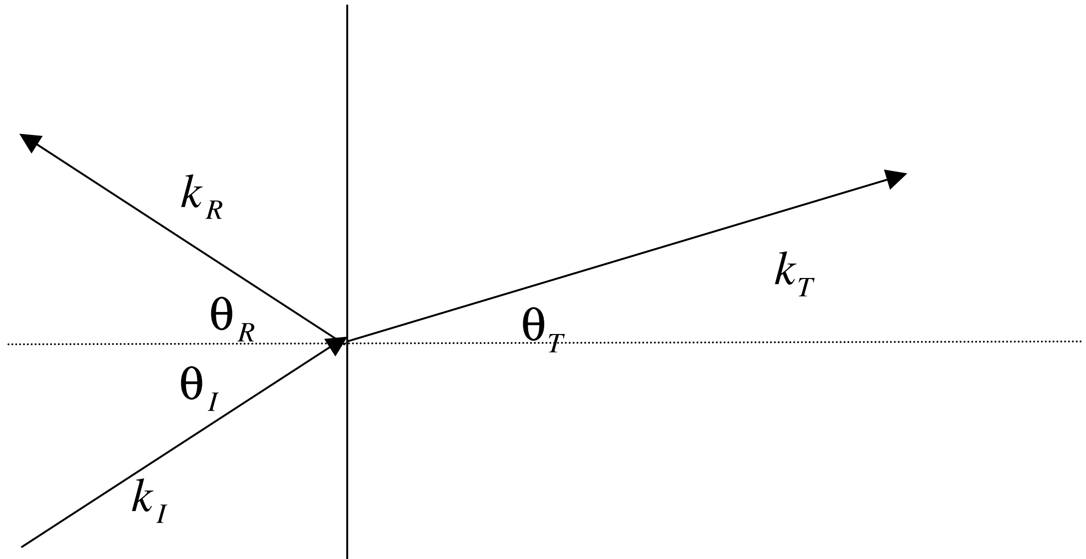
$$\cancel{\frac{1}{\mu_1}}\left(\frac{1}{v_1}E_I - \frac{1}{v_1}E_R\right) = \cancel{\frac{1}{\mu_2}}\frac{1}{v_2}E_T$$

$$E_I - E_R = \frac{v_1}{v_2}E_T \qquad 2E_I = (1+n)E_T$$

$$E_I + E_R = E_T \qquad (n-1)E_I + (n+1)E_R = 0$$

$$E_R = -\frac{n-1}{n+1}E_I = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}E_I$$

Dla powietrza i szkła: n=1,5 Moc odbita: $\left(\frac{1{,}5-1}{1{,}5+1}\right)^2 = 1/25 = 4\%$



Na płaszczyźnie $z = 0$ fazy muszą się zgadzać.

$$\vec{r}\vec{k}_{\parallel I} - \omega_1 t \equiv \vec{r}\vec{k}_{\parallel R} - \omega_1 t \equiv \vec{r}\vec{k}_{\parallel T} - \omega_2 t$$

$$\omega_1 = \omega_2$$

$$\vec{k}_{\parallel I} = \vec{k}_{\parallel R} = \vec{k}_{\parallel T}.$$

Zachodzi tez :

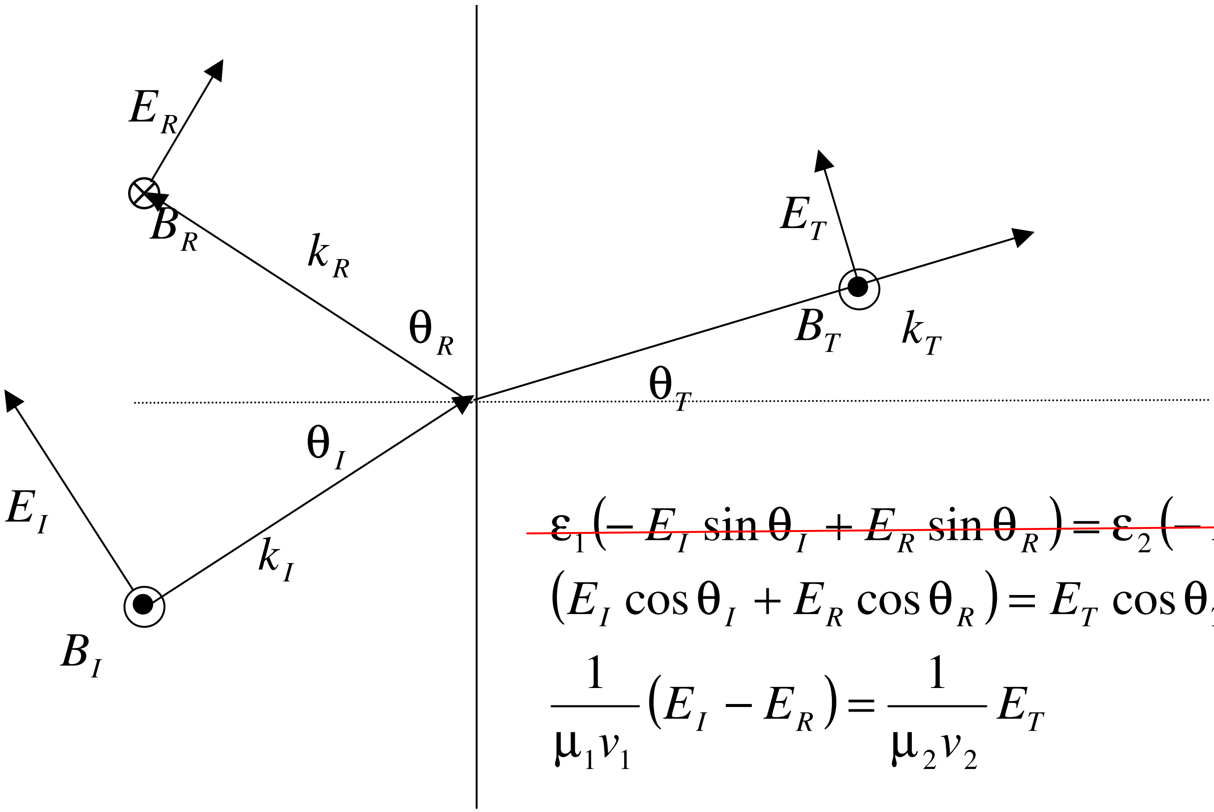
$$v_1 k_I = v_1 k_R = v_2 k_T = \omega$$

$$\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_I = k_{\parallel I} \equiv k_{\parallel R} = \frac{\omega}{v_1}\sin\theta_R \equiv k_{\parallel T} = \frac{\omega}{v_2}\sin\theta_T$$

1) Trzy promienie w 1 płaszczyźnie

2) Kąt padania = kąt odbicia: $\theta_I = \theta_R$

3) $\dfrac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{n_2}{n_1} \equiv n_{2/1}$



$$\cancel{\varepsilon_1\left(-E_I \sin\theta_I + E_R \sin\theta_R\right) = \varepsilon_2\left(-E_T \sin\theta_T\right)}$$

$$\left(E_I \cos\theta_I + E_R \cos\theta_R\right) = E_T \cos\theta_T$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}\left(E_I - E_R\right) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_T$$

$$(\cos\theta_I / \cos\theta_T)\left(E_I + E_R\right) = E_T$$

$$\frac{n_1}{n_2}(E_I - E_R) \approx \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1}(E_I - E_R) = E_T$$

$$\frac{\cos\theta_I}{\cos\theta_T}\left(E_I + E_R\right) = \frac{n_1}{n_2}(E_I - E_R)$$

$$E_R = \frac{n_1 / n_2 - \cos\theta_I / \cos\theta_T}{n_1 / n_2 + \cos\theta_I / \cos\theta_T} E_I$$

$$E_R = 0 \Rightarrow n_1 / n_2 - \cos\theta_I / \cos\theta_T = 0$$

$$n_1 / n_2 - \cos\theta_I / \cos\theta_T = 0$$

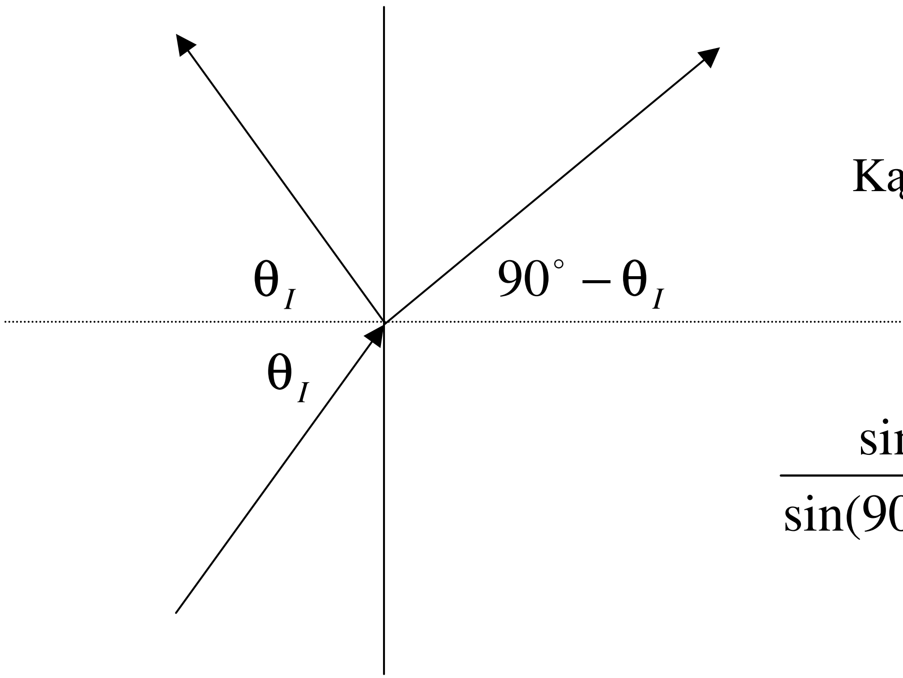
$$\sin\theta_T / \sin\theta_I = \cos\theta_I / \cos\theta_T$$

$$\sin\theta_I \cos\theta_I = \sin\theta_T \cos\theta_T$$

$$\sin 2\theta_I = \sin 2\theta_T$$

$$2\theta_I = 180^\circ - 2\theta_T$$

$$\theta_I + \theta_T = 90^\circ$$



Kąt Brewstera

$$\frac{\sin\theta_I}{\sin(90^\circ - \theta_I)} = \frac{n_2}{n_1} = \mathrm{tg}\,\theta_I$$

Fale w przewodnikach.

Prawo Ohma

$$U = E\cancel{l} = RI = \rho\frac{l}{S}I = \rho\cancel{l}\,j \Rightarrow j = \frac{1}{\rho}E \Rightarrow$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

W materiałach przewodzących wraz z polem elektrycznym wystąpi prąd konwekcyjny.

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \dot{\vec{D}} + \sigma\vec{E} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{div}\left(\dot{\vec{D}} + \sigma\vec{E}\right) = \dot{\rho} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}t\right)$$

Czas zaniku w „zwykłych” przewodnikach bardzo krótki.

W sytuacjach stacjonarnych $\rho = 0$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu\varepsilon\dot{\vec{E}} + \boxed{\mu\sigma\vec{E}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Nowe równanie falowe:

$$-\ \mathrm{grad}\ \cancel{\mathrm{div}\ \vec{B}} + \Delta\,\vec{B} = -\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\vec{B} = -\mathrm{rot}\left(\mu\varepsilon\,\dot{\vec{E}} + \mu\sigma\,\vec{E}\right) = \mu\varepsilon\,\ddot{\vec{B}} + \mu\sigma\,\dot{\vec{B}}$$

$$\left(\Delta - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = \mu\sigma\,\dot{\vec{B}}$$

I analogicznie:

$$\left(\Delta - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \mu\sigma\,\dot{\vec{E}}$$

Fale płaskie monochromatyczne

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

Liczba falowa *k* ma teraz część rzeczywistą i urojoną:

$$\tilde{k} = k + i\kappa$$

$$k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

Rozwiązanie układu równań na *k* i κ :

$$k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right]^{1/2} \qquad \kappa = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right]^{1/2}$$

Fala jest tłumiona:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t)}$$

Nadal jest poprzeczna, ale fazy *E* i *B* są przesunięte

$$\vec{B}_0 = \frac{k + i\kappa}{\omega}\vec{e}_k \times \vec{E}_0$$

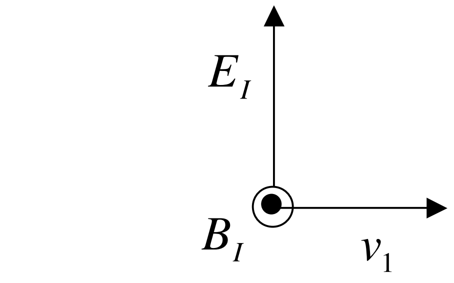
Dla dostatecznie dobrych przewodników $\sigma \geq \varepsilon\omega$, wnikanie na odl. ~dł. fali,

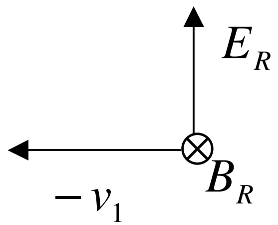
W przypadku przeciwnym, głębokość wnikania nie zależy od ω , jej

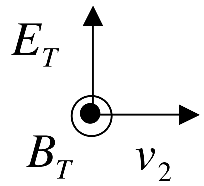
odwrotność wynosi

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} -1\right]^{1/2} \approx \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2}\varepsilon\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Znaczenie praktyczne ma odbicie od powierzchni przewodzącej (lustra, falowody)







$$i\omega\vec{B} = i\tilde{k} \times \vec{E}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{v_1}E_I - \frac{1}{v_1}E_R\right) = \frac{1}{\mu_2}\frac{\tilde{k}}{\omega}E_T$$

$\leftarrow$Ciągłość $H_{||}$

$$E_I - E_R = \frac{\mu_1 v_1 \tilde{k}}{\mu_2 \omega}E_T \equiv \beta E_T$$

$$E_I + E_R = E_T \quad \Big/ \times\beta$$

$\leftarrow$Ciągłość $E_{||}$

$$(\beta - 1)E_I + (\beta + 1)E_R = 0$$

$$E_R = -\frac{\beta - 1}{\beta + 1}E_I$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{c^2\tilde{k}^2}{\mu_r{}^2\omega^2} = \frac{c^2\mu\varepsilon}{\mu_r{}^2} + ic^2\frac{\mu_0\sigma}{\mu_r\omega} \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} i\infty$$

$$E_R \to -E_I$$

```
Abs[(Sqrt[1000 i + 1.] - 1) / (Sqrt[1000 i + 1] + 1)]        0.956257
```