Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 13

Dyspersja.

Polaryzacja dielektryka ~E dla pola stałego. Dla pola oscylującego uwzględnić trzeba bezwładność elektronów. Model oscylatora:

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^{\;2} x = eE_0 \exp(-i\omega t)$$

$$x = x_0 \exp(-i\omega t)$$

$$x_0 = \frac{e/m}{\omega_0^{\;2} - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0$$

$$p = ex = \frac{e^2/m}{\omega_0^{\;2} - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 \exp(-i\omega t)$$

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \sum \frac{f_j}{\omega_j^{\;2} - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \vec{E}_{\text{lokalne}}$$

Pomijając różnicę między polem lokalnym a średnim (stała dielektryczna niewiele różna od 1), mamy

$$\varepsilon_r = \frac{D}{\varepsilon_0 E} = \frac{\varepsilon_0 E + P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum \frac{f_j}{\omega_j^{\ 2} - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$$

Równanie falowe, jak pamiętamy, zawiera ε :

$$\left(\Delta - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0$$

Zespolona stała dielektryczna jest innym źródłem zespolonego *k*.

$$\tilde{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

$$\tilde{k} = k + i\kappa \qquad \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

Kwadrat amplitudy fali maleje jak $e^{-2\kappa z}$

Dlatego $2\kappa \equiv \alpha$ nazywa się współczynnikiem absorpcji.

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} \cong \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\sum \frac{f_j}{\omega_j^{\ 2} - \omega^2 - i\gamma_j\omega}\right)$$

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\sum \frac{f_j(\omega_j^{\ 2} - \omega^2)}{(\omega_j^{\ 2} - \omega^2)^2 + \gamma_j^{\ 2}\omega^2}$$

$$\alpha = 2\kappa \cong \frac{Ne^2\omega^2}{m\varepsilon_0 c}\sum \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^{\ 2} - \omega^2)^2 + \gamma_j^{\ 2}\omega^2}$$

Z dala od rezonansów

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\sum \frac{f_j}{\omega_j^{\ 2} - \omega^2}$$

Gdy zaczynamy od małych częstości, wszystkie człony są dodatnie i rosną. To dyspersja „normalna”.

Falowody (idealne).

Nieskończone przewodnictwo oznacza 0-ową głębokość wnikania fali.

Znika w ścianie falowodu pole *E*, a pole *B* musi być „zamrożone" – efektywnie 0.

W obszarze falowodu przeto:

$$\vec{E}_{\parallel} = 0 = \vec{B}_{\perp}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_z$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x$$

$$ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \qquad ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_y$$

Czy mogą istnieć fale poprzeczne? Nie za bardzo

$$E_z = 0 = B_z \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial 0}{\partial z}} = 0$$

Pole to ma znikającą rotację i dywergencję. Jest potencjalne z potencjałem spełniającym równanie Laplace'a, stałym na przewodniku. W falowodzie jednospójnym pole musi znikać. Co innego przewód koncentryczny. Inny potencjał na przewodzie wewnętrznym, inny na ekranie.

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$$

$$E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

Prawo Gaussa: $$0 = \frac{(\omega/c)^2 - k^2}{i}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial(k\partial E_z/\partial x)}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial(\omega\partial B_z/\partial y)}{\partial x}} + \frac{\partial(k\partial E_z/\partial y)}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial(\omega\partial B_z/\partial x)}{\partial y}} + \frac{(\omega/c)^2 - k^2}{\cancel{i}}\cancel{i}kE_z$$

$$\partial^2 E_z/\partial x^2 + \partial^2 E_z/\partial y^2 + \left((\omega/c)^2 - k^2\right)E_z = 0$$

$$\boxed{\left(\Delta_\perp + (\omega/c)^2 - k^2\right)E_z = 0}$$

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)$$

$$E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

$$B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2}E_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(\cancel{k\frac{\partial B_z}{\partial y}} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) +$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(\cancel{k\frac{\partial B_z}{\partial x}} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

Prawo Gaussa: $$0 = \frac{(\omega/c)^2 - k^2}{i}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial(k\partial E_z/\partial x)}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial(\omega\partial B_z/\partial y)}{\partial x}} + \frac{\partial(k\partial E_z/\partial y)}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial(\omega\partial B_z/\partial x)}{\partial y}} + \frac{(\omega/c)^2 - k^2}{\cancel{i}}\cancel{i}kE_z$$

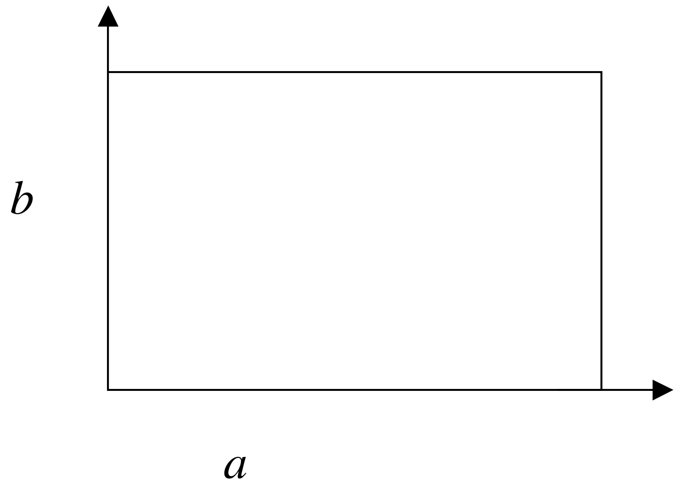
$$\partial^2 E_z/\partial x^2 + \partial^2 E_z/\partial y^2 + \left((\omega/c)^2 - k^2\right)E_z = 0$$

$$\boxed{\left(\Delta_\perp + (\omega/c)^2 - k^2\right)E_z = 0}$$

$$\left(\Delta_\perp + (\omega/c)^2 - k^2\right)E_z = 0 \qquad E_z\Big|_{\text{brzeg}} = 0$$

$$\left(\Delta_\perp + (\omega/c)^2 - k^2\right)B_z = 0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial n}\bigg|_{\text{brzeg}} = 0$$

Równania własne dla 2-wymiarowego operatora Laplace'a.



$$E_z = X(x)\cdot Y(y)$$

$$X''Y + XY'' + \left(\omega^2/c^2 - k^2\right)XY = 0$$

$$X''/X + Y''/Y + \omega^2/c^2 - k^2 = 0$$

$$-k_x^{\ 2} - k_y^{\ 2} + \omega^2/c^2 - k^2 = 0$$

$$E_z = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$k_x a = m\pi \qquad k_y b = n\pi$$

$$-k_x{}^2 - k_y{}^2 + \omega^2 / c^2 - k^2 = 0$$

$$\omega_{\mathrm{mn}}{}^2 = c\sqrt{k_x{}^2 + k_y{}^2} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{\mathrm{mn}}{}^2} \qquad v_{\mathrm{g}} = \frac{\partial\,\omega}{\partial\,k} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - \omega_{\mathrm{mn}}{}^2}}{\omega}$$

Rezonator (jak w mikrofalówce), musi pole E_z znikać jeszcze na ścianach o ustalonym z. Jasne, że musi być:

$$E_z{}^{mnl}(x, y, z, t) = A\sin(\pi mx / a)\sin(\pi ny / b)\sin(\pi lz / L)$$

$$kL = l\pi$$

$$\omega = \pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{L^2}}$$

Ogólne rozwiązanie r. Maxwella ze źródłami.

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r},t)$$

Wstawiamy to do prawa Faradaya:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) = -\dot{\vec{B}}(\vec{r},t) = -\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{A}}(\vec{r},t)$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{A}}(\vec{r},t)\right) = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{A}}(\vec{r},t) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\dot{\vec{A}}(\vec{r},t) - \mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r},t)$$

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \mathrm{grad}\,f(\vec{r},t)$$

$$\varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \dot{f}(\vec{r},t)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} =$$

$$= (\mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta)\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\dot{\vec{A}} - \mathrm{grad}\,\varphi\right)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}\right)$$

$$\mathrm{div}\left(-\dot{\vec{A}} - \mathrm{grad}\,\varphi\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \mathrm{div}\dot{\vec{A}}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}\right)$$

Równania wyglądają skomplikowanie (sprzężone 4 szukane funkcje).

Wybór cechowania może je drastycznie uprościć!

Jeśli nawias nie jest zerem dla jakiegoś zestawu potencjałów, to po wyborze nowego przecechowanego funkcją f, będziemy mieli:

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}' = \operatorname{div}\left(\vec{A} + \operatorname{grad} f\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(\vec{r},t) - \dot{f}(\vec{r},t)\right) =$$

$$= \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} - \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f$$

Istnieją rozwiązania powyższego równania falowego na f (i to nawet wiele). W klasie równoważnych potencjałów, istnieje mniejsza podklasa, dla której spełniony jest warunek:

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}' = 0$$

W dalszym ciągu taki zestaw potencjałów oznaczać będziemy literami bez primów. Mówimy, iż posługujemy się „cechowaniem Lorentza”. Wybór tego cechowania upraszcza bardzo równania na potencjały (gwarantujące spełnienie r. Maxwella przez B i E.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}=\mu_0\vec{j}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Będziemy zainteresowani tylko takimi rozwiązaniami powyższych równań, które spełniają warunek Lorentza.

Można się zaniepokoić, czy takie rozwiązania istnieją. Czy aby nie ma sprzeczności między równaniami, a tym warunkiem? Otóż biorąc dywergencję pierwszego i pochodną czasową drugiego podzieloną przez c^2, dostaniemy po prawej stronie ZERO, na mocy równania ciągłości.

Operator falowy działając na warunek Lorentza, daje zero. Źle by było tylko, gdyby warunek ciągłości nie obowiązywał. Ale wtedy równania Maxwella byłyby sprzeczne.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)u\equiv\Box u(\vec{r},t)=z(\vec{r},t)$$

Rozwiązanie ogólne takiego równania można skonstruować przez dodanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (dowolna superpozycja harmonicznych fal płaskich) do **jakiegokolwiek jednego, szczególnego** rozwiązania równania niejednorodnego.

$$u(\vec{r},t) = \int e^{-i\omega t}\, u_\omega(\vec{r})\,\mathrm{d}\,\omega \qquad z(\vec{r},t) = \int e^{-i\omega t}\, z_\omega(\vec{r})\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$0 = \int e^{-i\omega t}\left((\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} + \Delta) u_\omega(\vec{r}) + z_\omega(\vec{r}) \right)\mathrm{d}\,\omega$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \Delta \right) u_\omega(\vec{r}) = -z_\omega(\vec{r})$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \Delta \right) G_\omega(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$$

Chcemy znaleźć choć jedno rozwiązanie, szukajmy najbardziej symetrycznych. Poza początkiem:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} \right) G_\omega(r) = 0$$

Oznaczamy: $\omega^2 / c^2 = k^2$ I podstawiamy: $G_\omega(r) = \chi / r$

$$0 = \left(k^2 + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\right)\frac{\chi}{r} = k^2\frac{\chi}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} r^2\left(\frac{\chi'}{r} - \frac{\chi}{r^2}\right) =$$

$$= k^2\frac{\chi}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}(r\chi' - \chi) = \frac{1}{r}\left(k^2\chi + \chi''\right)$$

Szczególnie przydatne są dwa rozwiązania tego równania:

$$G_\omega^{\mathrm{ret}}(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{oraz} \quad G_\omega^{\mathrm{adv}}(r) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

Współczynnik 4π , taki jak w rozwiązaniu kulombowskim.

$$G_\omega^{\mathrm{ret}}(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{oraz} \quad G_\omega^{\mathrm{adv}}(r) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

$$u_\omega(\vec{r}) = \iiint z_\omega(\vec{r}\,') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'$$

$$u(\vec{r},t) = \int e^{-i\omega t} \left(\iiint z_\omega(\vec{r}\,') \frac{e^{i\omega|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r' \right) \mathrm{d}\omega$$

Łatwo wykonać całkę po ω

Różni się ona od całki definiującej transformatę źródła tylko tym, że funkcja wykładnicza wyniesie: $e^{-i\omega(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}$, zamiast pierwotnej: $e^{-i\omega t}$

W wyniku tego całkowania dostaniemy funkcję źródła w chwili **retardowanej:**

$$t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c \equiv t_r$$

Ostatecznie: $$u(\vec{r},t) = \iiint \frac{z(\vec{r}\,', t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\iiint\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\iiint\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'$$

Wstawiając do wzorów wiążących E i B z potencjałami, po dość pracochłonnym różniczkowaniu, dostaje się:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)\vec{R}}{|\vec{R}|^3}+\frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_r)\vec{R}}{c|\vec{R}|^2}-\frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,',t_r)}{c^2|\vec{R}|}\right)\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{R}|^2}+\frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,',t_r)}{c|\vec{R}|}\right)\times\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}\,\mathrm{d}^3r'$$

Gdzie $\quad \vec{R}\equiv\vec{r}-\vec{r}\,'$

Dla ładunku punktowego wygodniej wrócić do potencjałów kładąc:

$$\rho(\vec{r},t) = e\delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t)),$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = e\dot{\vec{\xi}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{\xi}(t))$$

Potencjał skalarny:

$$\varphi(\vec{r},t) = \iiint \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{\xi}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}^3 r'$$

wymaga trochę staranności.

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{\xi}(t_r)|} \iiint \delta(\vec{r}' - \vec{\xi}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)) \mathrm{d}^3 r'$$

Gdzie: $t_r(\vec{r},t) = t - |\vec{r} - \vec{\xi}(t_r)|/c$

$$\iiint \delta^3(\vec{r}' - \vec{\xi}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c))\,\mathrm{d}^3 r' = \iiint \delta^3(\vec{u}) \frac{1}{\dfrac{D(\vec{u})}{D(\vec{r}')}} \mathrm{d}^3 u$$

Macierz do jakobianu:

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right) = \mathrm{Det}\left(\delta_{ij} - \frac{v_i(x_j - x'_j)}{c\,|x_j - x'_j|}\right) = 1 - \frac{\vec{v}(\vec{r} - \vec{r'})}{c\,|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Zatem:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r} - \vec{\xi}(t_r)|\,(1 - \vec{v}(t_r)(\vec{r} - \vec{\xi}(t_r)/|\vec{r} - \vec{\xi}(t_r)|\,c)}$$

Oznaczając $\vec{R}(\vec{r},t)=\vec{r}-\vec{\xi}(t_r)\equiv\vec{R}$ $\quad t_r(\vec{r},t)=t-|\vec{r}-\vec{\xi}(t_r)|/c$

Można zapisać przejrzyściej:

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{R}|\,(1-\vec{v}/c\cdot\vec{R}/R)}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0(R-\vec{v}\vec{R}/c)}$$

Potencjał wektorowy, dodatkowa prędkość. Subtelności z deltą Diraca identyczne

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0(R-\vec{v}\vec{R}/c)}$$

Są to potencjały Lienarda - Wiecherta.

Pola *E* i *B* otrzymuje się przez dość żmudne, ale „straightforward" różniczkowania. Żmudność stąd, że czas retardowany określony jest równaniem, a nie wyrażeniem jawnym (zależność uwikłana).

Definiując wektor pomocniczy $\vec{u} = c\frac{\vec{R}}{R} - \vec{v}$

można pola, uzyskane z różniczkowania potencjałów Lienarda-Wiecherta, zapisać w postaci:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\vec{u})^3}\Big((c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\Big)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\vec{F} = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\vec{u})^3}\left(\begin{array}{l}\Big((c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\Big) + \\ \frac{\vec{V}}{c}\times\left(\frac{\vec{R}}{R}\times\Big((c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\Big)\right)\end{array}\right)$$