

# Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 14

$$\varphi(\vec{r}, t) = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Promieniowanie ze źródeł oscylujących harmonicznje.

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_{\omega}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{\omega}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Równanie ciągłości:

$$-i\omega\rho_{\omega}(\vec{r}) + \text{div}\vec{j}_{\omega}(\vec{r}) = 0$$

$$\rho_{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega} \text{div}\vec{j}_{\omega}(\vec{r})$$

Oznacza, że cała informacja o źródłach jest w prądzie, a o polach w potencjale wektorowym.

$$\vec{B}_{\omega}(\vec{r}) = \text{rot}\vec{A}_{\omega}$$

$$\epsilon_0\mu_0(-i\omega)\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = \text{rot}\vec{B}_{\omega}(\vec{r}) - \cancel{\mu_0\vec{j}_{\omega}}$$

$$\vec{E}_{\omega}(\vec{r}) = \frac{ic^2}{\omega} \text{rot}\vec{B}_{\omega}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{e^{-i\omega(t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)} \vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3 r' = e^{-i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3 r'$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3 r' \quad \text{gdzie } k \equiv \frac{\omega}{c}$$

Duże dł. fali:  $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$  oznaczają rozwiązanie quasistacjonarne.

Nas interesuje teraz duże  $r$ , także względem dł. fali.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots = \frac{1}{r} (1 + O(\frac{r'}{r})) \approx \frac{1}{r}$$

$$k|\vec{r}-\vec{r}'| = kr - k\vec{r} \cdot \vec{r}'/r (1 + O(\frac{r'}{r})) \approx kr - k\vec{r} \cdot \vec{r}'/r$$

Człony malejące szybciej niż  $1/r$  nie odpowiadają promieniowaniu.

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{e^{ik(r-\vec{r} \cdot \vec{r}'/r)} \vec{j}_\omega(\vec{r}')}{r} d^3 r' = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \iiint e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'/r} \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r'$$

Definiując wektor  $\vec{n}$  do punktu obserwacji:  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{k} \equiv k\vec{n}$

$$kr = \vec{k} \cdot \vec{r} \quad k \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{4\pi r} \iiint e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r'$$

Obserwowana w małym wycinku, fala wygląda jak fala płaska o malejącej łagodnie z odległością amplitudzie i o jakiejś zależności od kierunku obserwacji. Zależność ta może być rozmaita i dość „bogata”, gdy rozmiary źródła są rzędu długości fali. Wykorzystuje się to do kierunkowego wysyłania wiązki promieni.

Dla źródeł **małych** w porównaniu z długością fali, można przeprowadzić dalszą analizę. Przykładowo: widzialne: 400-700nm, atom: 0,1 nm. Promienie gamma to 1000fm,  $R=10\text{fm}$ .

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{4\pi r} \iiint (1 - i\vec{k} \cdot \vec{r}' + \dots) \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r'$$

Znów całka z prądu, z iloczynu prądu i pierwszej potęgi położenia, drugiej potęgi, itd..

Kolejne wyrazy mają coraz wyższe potęgi stosunku  $D / \lambda \ll 1$

Najciekawszy pierwszy **nieznikający** wyraz.

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{ik\vec{r}}}{4\pi r} \iiint \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r'$$

$$\text{div}(f \vec{j}) = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f + f \text{div} \vec{j} \propto 0$$

$$\iiint_{\infty} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f = - \iiint_{\infty} f \text{div} \vec{j}$$

$$\iiint_{\infty} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} x_i = - \iiint_{\infty} x_i \text{div} \vec{j} = \iiint_{\infty} x_i (-i\omega \rho_\omega) = \iiint_{\infty} j_i$$

$$\iiint_{\infty} \vec{j}_\omega = -i\omega \iiint_{\infty} \rho_\omega \vec{r} = -i\omega \vec{p}_\omega$$

### Dipolowy moment elektryczny!

Gdy, wskutek odpowiedniej symetrii moment dipolowy elektryczny znika, promieniowaniem rzadzi kolejny człon rozwinięcia, a promieniowanie drastycznie słabnie (w mechanice kwantowej poziomy metastabilne).

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = -i\omega \frac{\mu_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{4\pi r} \vec{p}_\omega$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}_\omega$$

$$E_\omega(\vec{r}) = \frac{ic^2}{\omega} \text{rot } \vec{B}_\omega(\vec{r})$$

Różniczkowanie mianownika podwyższa potęgę – taki człon nie daje wkładu do strumienia energii.  
Różniczkowanie eksponensu wystarcza.

$$\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{\nabla} e^{ikr} = ike^{ikr} \vec{\nabla} r = ike^{ikr} \frac{\vec{r}}{r} = i\vec{k}e^{ikr} = i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i\vec{k} \times -i\omega \frac{\mu_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{4\pi r} \vec{p}_\omega$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{ic^2}{\omega} i\vec{k} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = -c \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{4\pi c} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p}_\omega \frac{e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r} \times \left( \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p}_\omega \right) \frac{e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{r}$$

Polaryzacja fali zależy od kierunku obserwacji i od zespolonego  $p$ .

Dla konkretności przyjmijmy  $p$  rzeczywiste.

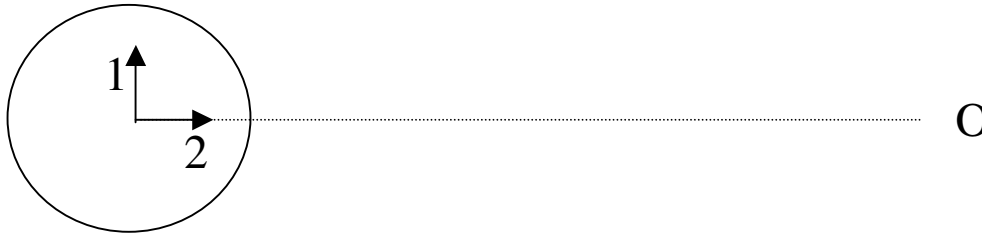
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{p}_\omega \frac{\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} (\vec{p}_\omega - \vec{n}(\vec{n}\vec{p}_\omega)) \frac{\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}{r}$$

Największe natężenie w płaszczyźnie „równikowej”. Zerowe równoległe do dipola.

Wektor polaryzacji, to składowa dipola prostopadła do kierunku obserwacji.





Jakkolwiek spolaryzowane światło, padając prostopadle na płaszczyznę rysunku, wywołuje drgania elektronu materii rozpraszającej będące superpozycją dwóch drgań.

Natężenie od „dipola” 2 w kierunku O jest zero. Polaryzacja od dipola 1 jest w płaszczyźnie rysunku. Promieniowanie rozproszone jest spolaryzowane (pszczoły, Vikingowie). Rozproszone pod kątem prostym jest spolaryzowane w 100%.

Wektor Poyntinga:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -c \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \vec{n} \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 =$$

$$= \vec{n} \frac{c}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} p \right)^2 \frac{\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}{r^2} \sin^2 \theta$$

Moc transmitowana w chwili  $t$  przez całą sferę o promieniu  $r$  wynosi:

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{c}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} p \right)^2 \frac{\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}{r^2} 4\pi r^2 =$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{3c} \left( -p\omega^2 \cos \omega(t - r/c) \right)^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{3c} \left( \ddot{p}(t_{\text{ret}}) \right)^2$$

Moc uśredniona po okresie jednej oscylacji:

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 p^2}{12\pi c}$$

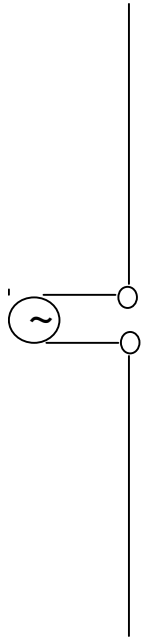
Jeśli oscyluje jeden ładunek,  $\vec{p} = q\vec{r}$ ,  $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{a}}$

$$P(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2q^2}{3c} \left( \ddot{\vec{a}}(t_{\text{ret}}) \right)^2$$

Jest to słynny wzór Larmore'a. Okazuje się poprawny przy ruchu nie tylko harmonicznym.

Przybliżenie dipolowe oznacza duże  $q$ , małą amplitudę i małą prędkość.

Krótką, cienką antena symetryczna:



Ładunek powierzchniowy (w danej chwili) stały na każdej z połówek.  
Dywergencja prądu, to pochodna po współrzędnej  $z$  – też stała:

$$I = I_0 \left( 1 - \frac{|z|}{l/2} \right) e^{-i\omega t}$$

$$\eta = -\frac{i}{\omega} \frac{dI}{dz} = \frac{2i}{\omega l} I_0 \text{sign}(z)$$

$$p = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{2i}{\omega l} I_0 \text{sign}(z) z dz = \frac{il}{2\omega} I_0$$

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 p^2}{12\pi c}$$

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 l^2}{12\pi c 4\omega^2} I_0^2 =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 l^2}{6c} \frac{I_0^2}{2}$$

Opór falowy:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 l^2}{6c} \approx 5(kl)^2 \cdot 1\Omega$$

Gdy znika moment dipolowy – jak na przykład prąd zmienny w pętli kołowej, prąd wzdłuż obwodu stały w każdej chwili, a więc o znikającej dywergencji – wtedy promieniowanie opisywane jest następnym członem:

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{4\pi r} \iiint (1 - i\vec{k} \cdot \vec{r}' + \dots) \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r'$$

Całka przypomina tę, która w magnetostatyce określała dipolowy moment magnetyczny rozkładu prądu. Jednak nie do końca jest tak samo!

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x_a x_b \vec{j}) &= x_a j_b + x_b j_a + x_a x_b \operatorname{div} \vec{j} \\ &= x_a j_b + x_b j_a + i\omega x_a x_b \rho \doteq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_a j_b &\doteq -x_b j_a - i\omega x_a x_b \rho \doteq \frac{1}{2}(x_a j_b - x_b j_a - i\omega x_a x_b \rho) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (\vec{r} \times \vec{j})_c - \frac{i}{2} \omega x_a x_b \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_b(\vec{r}) &= -i \frac{\mu_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{4\pi r} k_a \iiint x'_a j_b(\vec{r}') d^3 r' = \\
&= -i \frac{\mu_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{8\pi r} k_a \iiint \varepsilon_{abc} (\vec{r}' \times \vec{j})_c d^3 r' - \frac{\mu_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}}{8\pi r} k_a \iiint \omega x'_a x'_b \rho d^3 r' =
\end{aligned}$$

Te dwa składniki mają różny charakter. Można stworzyć takie prądy, że tylko jeden z tych członów jest różny od zera. W mechanice kwantowej, przy przejściach między stanami o określonej parzystości, zawsze tylko albo jeden, albo drugi element macierzowy jest różny od zera.

Dipol magnetyczny. Kwadrupol elektryczny.

Dla anteny kołowej opór falowy:  $\approx 50(kD)^4 \Omega$

Promieniowanie ładunku punktowego w ruchu dowolnym

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\vec{R}\vec{u})^3} \left( (c^2 - v^2)\vec{u} + \underline{\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \vec{u} = c \frac{\vec{R}}{R} - \vec{v}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \left( \frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \right) = \frac{1}{\mu_0 c} \left( E^2 \frac{\vec{R}}{R} - \cancel{\left( \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{E} \right) \vec{E}} \right)$$

Tylko człon z przyspieszeniem daje wkład do strumienia w nieskończoności. Jest on, szczęśliwie, prostopadły do kierunku obserwacji, zatem

$$\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \underline{E_{\text{rad}}^2} \frac{\vec{R}}{R}$$

W przeciwieństwie do mocy emitowanej przez źródło zlokalizowane, moc emitowana przez źródło ruchome w pewnej chwili  $t_{\text{ret}}$ , nie jest po prostu strumieniem przez powierzchnię sfery  $R$  obliczonym w czasie  $t = t_{\text{ret}} + R/c$

Moc w określony kąt bryłowy emitowana przez cząstkę: 
$$\frac{dW}{dt_{\text{ret}}} = \frac{dW/dt}{\partial t_{\text{ret}}/\partial t}$$

Strumień wektora Poyntinga określa licznik powyższego.

$$R \frac{\partial R}{\partial t_{\text{ret}}} = \vec{R} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_{\text{ret}}} = -\vec{v}(t_{\text{ret}}) \vec{R}$$

$$R = c(t - t_{\text{ret}})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t_{\text{ret}}} \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = \frac{-\vec{v}(t_{\text{ret}}) \vec{R}}{R} \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}(t_{\text{ret}}) \vec{R}}{Rc}} = \\ &= \frac{Rc}{Rc - \vec{v}(t_{\text{ret}}) \vec{R}} = \frac{Rc}{\vec{u} \cdot \vec{R}} \end{aligned}$$

$$\frac{dW}{dt_{\text{ret}}} = \frac{dW}{dt} \frac{\vec{u} \cdot \vec{R}}{Rc}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{R}}{Rc} \quad \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\vec{R}\vec{u})^3} \left( \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^5} R^3$$

W układzie w którym cząstka, w czasie retardowanym, akurat spoczywa, rachunek jest łatwy, bo  $\vec{u} = c\vec{R}/R$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{R^2 c^2 \sin^2 \theta}{c^5 R^5} R^3 = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \frac{e^2}{c} \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$$

$$P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3c} \vec{a}^2$$

Jest to taki sam wynik jak dla oscylującego dipola.



Scałkowanie po kątach gdy  $\vec{u} = c\vec{R}/R - \vec{v}$  jest dużo żmudniejsze. Dostaje się:

uogólnienie Lienarda wzoru Larmore'a:

$$P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3c} \frac{1}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^6} \left( a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right)$$

Rozkład tej mocy dany jest wzorem

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^5} R^3$$

W mianowniku:

$$\vec{R} \cdot \vec{u} = c\vec{R} \cdot \vec{R}/R - \vec{v} \cdot \vec{R} = cR - \vec{v} \cdot \vec{R} = cR(1 - \beta \cos \vartheta)$$

do potęgi piątej!

Dla cząstki relatywistycznej, promieniowanie emitowane jest praktycznie tylko do przodu i do tyłu.

$$P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3c} \vec{a}^2 = \tau_0 \vec{a}^2$$

Pracę siły zewnętrznej, równoważącej siłę samoodziaływania  $\vec{F}_{\text{rad}}$  można zapisać tak:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}_{\text{rad}} \cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{v} dt = \tau_0 \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} \cdot \vec{a} dt = \tau_0 \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} \cdot \dot{\vec{v}} dt \\ &= \tau_0 \vec{a} \cdot \vec{v} \Big|_{t_1}^{t_2} - \tau_0 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{a}} \cdot \vec{v} dt \end{aligned}$$

Praca ta (obok innej pracy na zwiększenie energii kinetycznej cząstki), idzie na zwiększenie energii pola – pola wypromieniowanego i pola „związanego”.

Człon „brzegowy” jest zmianą energii pola „przywiązanego” do cząstki. W ważnych przypadkach możemy go pominąć. Np. ruch po okręgu, albo gdy wystarczy nam siła średnia w sytuacji gdy przyspieszenia na początku i końcu były zerem.

Co daje siłę samoodziaływania:

$$\vec{F}_{rad} = \tau_0 \dot{\vec{a}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3c} \dot{\vec{a}}$$

Siła ta, traktowana dosłownie prowadzi do sprzeczności:

$$m\vec{a} = \tau_0 \dot{\vec{a}} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}(0)e^{t/\tau_0}$$

co jest nonsensem. Równanie jest trzeciego rzędu.

Na 3 (a raczej 3\*3) stałe całkowania trzeba narzucić więzy, powodujące iż po wyłączeniu siły, z 3 rozwiązań swobodnych:

$$C_1 + C_2 t + C_3 e^{t/\tau_0}$$

zostaną 2 pierwsze.

Równanie ruchu z siłą zewnętrzną i siłą samooddziaływania:  $m\vec{a} = \tau_0 m\dot{\vec{a}} + \vec{F}$

można rozwiązać metodą uzmienniania stałej:  $\vec{a} = \vec{C}(t)e^{t/\tau_0}$

$$\cancel{\vec{C}(t)e^{t/\tau_0}} = \tau_0 \dot{\cancel{\vec{C}(t)e^{t/\tau_0}}} + \cancel{\vec{C}(t)e^{t/\tau_0}} + \vec{F}/m$$

$$\dot{\vec{C}}(t) = -\frac{\vec{F}}{m\tau_0} e^{-t/\tau_0} \quad \vec{C}(t) = -\int_{C'} \frac{\vec{F}}{m\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau$$

$$\vec{a} = -e^{t/\tau_0} \int_{C'} \frac{\vec{F}(\tau)}{m\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau = \int_t^{C'} \frac{\vec{F}(\tau)}{m\tau_0} e^{(t-\tau)/\tau_0} d\tau$$

Istnieje tylko jeden wybór stałej  $C'$  eliminującej nonsens!

$$\vec{a} = \int_t^{\infty} \frac{\vec{F}(\tau)}{m\tau_0} e^{(t-\tau)/\tau_0} d\tau$$

$$m\vec{a}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_t^{\infty} \vec{F}(\vec{r}(\tau), \dot{\vec{r}}(\tau), \tau) e^{(t-\tau)/\tau_0} d\tau$$

Równanie to tak jak równania Newtona zależy od położenia początkowego i prędkości początkowej i nie „rozbiega się” po wyłączeniu siły.

Ma inny feler – chyba do przyjęcia.

Gdy stała siła nagle włączona w chwili  $t = 0$ , to już dla ujemnych czasów:

$$m\vec{a}(-|t|) = \frac{1}{\tau_0} \int_{-|t|}^{\infty} \vec{F}\Theta(\tau) e^{(-|t|-\tau)/\tau_0} d\tau = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\infty} \vec{F} e^{(-|t|-\tau)/\tau_0} d\tau = \vec{F} e^{-|t|/\tau_0}$$

W ruchu zbliżonym do periodycznego:

$$\dot{\vec{a}} \approx -\omega^2 \vec{v}$$

Gdy siła tarcia stanowi małe zaburzenie, można powyższy związek, słuszny dla ruchu niezaburzonego tą siłą, użyć do innego przedstawienia siły tarcia promienistego:

$$\vec{F}_{rad} = -\omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e^2}{3c} \vec{v}$$

Dodany do siły elastycznej, człon ten opisuje poprawnie tzw. „naturalną szerokość linii widmowej”.