Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 2

Przypomnienie $\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ $\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'$

Funkcja Greena dla zagadnienia Dirichleta

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

$$G(\vec{r} \in \Sigma, \vec{r}\,') = 0 \qquad Q/\varepsilon_0 = 1$$

$$\iiint \mathrm{div}\left(\Phi\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}^3 r =$$

$$\iiint \left(\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi\right)\mathrm{d}^3 r = \oiint \left(\Phi\vec{n}\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{n}\vec{\nabla}\Phi\right)\mathrm{d}S$$

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \left(\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} G(\vec{r}\,', \vec{r}) \right) \mathrm{d}^3 r' - \oiint \left(\varphi(\vec{r}\,')\vec{n}\vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}\,', \vec{r})\right)\mathrm{d}S$$

Dla półprzestrzeni:

$$G(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}$$

Kula (wnętrze i zewnętrze)

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Z tych samych powodów co przy równaniu Schroedingera, kątowa część rozwiązania rozseparowanego jest jedną z funkcji kulistych $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ o wartości własnej $-l(l+1)$ a odpowiadająca jej część radialna R spełnia następujące równanie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r^2 \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} = l(l+1)R(r)$,

O rozwiązaniu ogólnym $R(r) = ar^l + \frac{b}{r^{l+1}}$

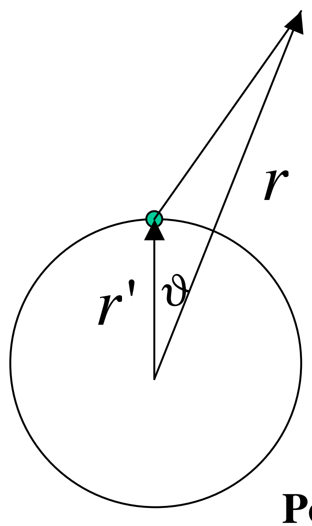
$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_l \sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Symetria osiowa upraszcza do sumy pojedynczej (m=0):

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\vartheta)$$

Na samej zaś osi ($P_l(\cos 0) = 1$):

$$\Phi(r,\vartheta=0) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right)$$



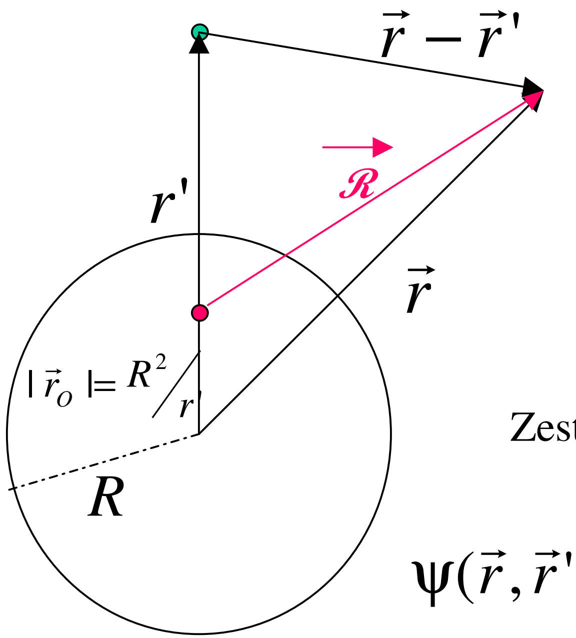
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}$$ ← Ważne rozwiązanie

Na zewnątrz, na osi
$$\frac{1}{r-r'}=\frac{1}{r}\frac{1}{1-r'/r}=\frac{1}{r}\sum\left(\frac{r'}{r}\right)^l=\sum\frac{r'^l}{r^{l+1}}$$

Poza osią:
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}=\sum\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta)$$

Wewnątrz i zewnątrz:
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}=\sum\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\vartheta)$$

Funkcja Greena dla zewnętrza kuli



$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \psi(\vec{r},\vec{r}\,')$$

$$\psi(R,\vartheta;r') \equiv -\frac{1}{4\pi\sqrt{R^2+r'^2-2Rr'\cos\vartheta}}$$

Zestawmy rozwinięcia funkcyj $\psi(\vec{r},\vec{r}\,')$ i $\psi(R,\vartheta;r')$

$$\psi(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum\frac{a_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) \xrightarrow[r\to R]{} \sum\frac{a_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\vartheta)$$

$$\psi(R,\vartheta;r') = -\sum\frac{R^l}{4\pi r'^{l+1}}P_l(\cos\vartheta)$$

$$a_l = -R^{l+1}\frac{R^l}{4\pi r'^{l+1}} = -\frac{R/r'}{4\pi}\left(\frac{R^2}{r'}\right)^l = -\frac{R/r'}{4\pi}(r_O)^l$$

$$\psi(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{R/r'}{4\pi}\sum\frac{(r_O)^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) = -\frac{R/r'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_O|}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{R/r'}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_O|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} - \frac{R}{4\pi\sqrt{R^4+r^2r'^2-2R^2rr'\cos\gamma}}\Bigg|$$

Dla obszaru wewnętrznego – **ten sam wzór**, wtedy , oczywiście, $r_O = \dfrac{R^2}{r'} > R$

Pochodna normalna funkcji Greena (obsz. wew..):

$$\frac{\partial G}{\partial r'} = \frac{\partial}{\partial r'}\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}} - \frac{\partial}{\partial r'}\frac{R}{4\pi\sqrt{R^4+r^2r'^2-2R^2rr'\cos\gamma}}\Bigg|_{r'=R}$$

$$\frac{r'-r\cos\vartheta}{4\pi(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma})^3} - \frac{R(r^2r'-R^2r\cos\vartheta)}{4\pi(\sqrt{(R^2)^2+r^2r'^2-2(R^2)rr'\cos\gamma})^3} =$$

$$\frac{R-r\cancel{\cos\vartheta}}{4\pi(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\gamma})^3} - \frac{R(Rr^2\cancel{-R^2r}\cos\vartheta)}{4\pi R^3(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\gamma})^3} =$$

$$\frac{R-r^2/R}{4\pi(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\gamma})^3} = \frac{R^2-r^2}{4\pi R(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\gamma})^3}$$

Kąt γ jest mierzony między punktem całkowania na sferze a punktem obserwacji. Można jego cosinus wyrazić przez współrzędne kątowe punktu obserwacji i współrzędne punktu bieżącego: $\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$

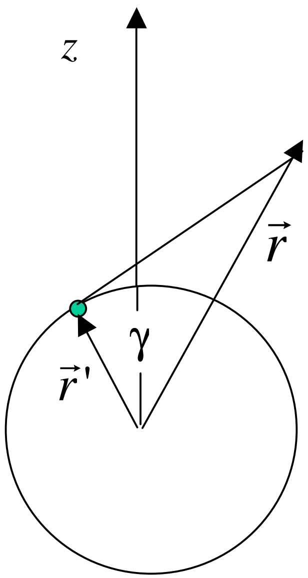
$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$\iint \Phi(R,\vartheta',\varphi') \frac{(R^2 - r^2)R\mathrm{d}\Omega'}{4\pi\left(\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi'))}\right)^3}$$

Wynik bardzo się upraszcza dla środka kuli

$$\Phi(0,0,0) = \frac{1}{4\pi}\iint \Phi(R,\vartheta',\varphi')\mathrm{d}\Omega'$$

Funkcja harmoniczna w każdym punkcie jest średnią swoich wartości na każdej ze sfer otaczających dany punkt.



Oś układu współrzędnych nie jest już osią symetrii!!!

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\sum_{l}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}r^{l}+\frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Z powodu symetrii, musi być

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\sum_{l}\sum_{m=-l}^{l}c_{lm}\left(\frac{r_{<}^{l}}{r_{>}^{l+1}}\right)Y_{lm}(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Dla f. kulistych unormowanych do 1 na sferze jest:

$$\sum_{l}\left(\frac{r_{<}^{l}}{r_{>}^{l+1}}\right)P_{l}(\cos\gamma)=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=4\pi\sum_{l}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r_{<}^{l}}{r_{>}^{l+1}}\right)Y_{lm}(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$P_{l}(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$\cos\gamma=\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$$

Rozwinięcie multipolowe:

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \mathrm{d}^3 r' \qquad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = 4\pi \sum_l \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \sum_l \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \mathrm{d}^3 r'$$

Na zewnątrz źródła:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_l \sum_{m=-l}^{l} \frac{\iiint r'^l \rho(\vec{r}\,') Y_{lm}(\vartheta', \varphi') \mathrm{d}^3 r'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

Daleko od źródeł, dominuje pierwszy **nieznikający** człon.

Multipol rzędu l ma $2l+1$ składowych. Tyle całek z gęstością go determinuje.

Multipole niskiego rzędu wygodnie opisywać wprost we współrzędnych kartezjańskich.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{|\vec{r}\,|}+\frac{x'_a}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x'_a}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bigg|_{\vec{r}\,'=0}\right)+\frac{x'_a\,x'_b}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x'_a}\frac{\partial}{\partial x'_b}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\bigg|_{\vec{r}\,'=0}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}\,|}+\frac{x'_a}{1}\frac{x_a}{r^3}+\frac{x'_a\,x'_b}{2!}\frac{3x_a x_b-r^2\delta_{ab}}{r^5}+\cdots$$

$$\delta_{ab}(3x_a x_b-r^2\delta_{ab})\equiv 0 \qquad\qquad x'_a\,x'_b\to x'_a\,x'_b-\frac{1}{3}r'^2\,\delta_{ab}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{|\vec{r}\,|}+x'_a\frac{x_a}{1r^3}+(3x'_a\,x'_b-r'^2\,\delta_{ab})\frac{x_a x_b\cancel{-\frac{1}{3}r^2\delta_{ab}}}{2!r^5}+\cdots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}\,|} + x'_a \frac{x_a}{1r^3} + (3x'_a\, x'_b - r'^2\, \delta_{ab}) \frac{x_a x_b}{2!\, r^5} + \cdots \right) \mathrm{d}^3 r' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} \iiint \rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' + \frac{x_a}{r^3} \iiint x'_a\, \rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' + \frac{x_a x_b}{2r^5} \iiint (3x'_a\, x'_b - r'^2\, \delta_{ab}) \rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' + \cdots \right)$$

Dielektryki – kolekcja **obojętnych** molekuł.

Wszystkie odległości makroskopowe – z kolei – są olbrzymie w skali rozmiaru molekuł.

Molekuły wpływają na pole poprzez swoje **momenty dipolowe.**

Jeden problem! We wnętrzu materii, **zawsze** siedzimy we wnętrzu **jakiejś** molekuły i stosunkowo blisko pewnej liczby jej bliskich sąsiadów. Dla tej **szczególnej** molekuły i tych bliskich sąsiadów nie może być mowy o przybliżeniu dipolowym. Tak się przynajmniej wydaje.

Co robić ? Wprowadzić pole średnie! Jest to idea Lorentza.

Zajmiemy się tym na następnym wykładzie