

Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 3

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} + x'_a \frac{x_a}{1r^3} + (3x'_a x'_b - r'^2 \delta_{ab}) \frac{x_a x_b}{2!r^5} + \dots \right) d^3 r' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \iiint \rho(\vec{r}') d^3 r' + \frac{x_a}{r^3} \iiint x'_a \rho(\vec{r}') d^3 r' + \frac{x_a x_b}{2r^5} \iiint (3x'_a x'_b - r'^2 \delta_{ab}) \rho(\vec{r}') d^3 r' + \dots \right) \end{aligned}$$

Dielektryki – kolekcja **obojętnych mikroskopowych** molekuł.

Wszystkie odległości makroskopowe z kolei są olbrzymie w skali rozmiaru molekuł.

Molekuły wpływają na pole poprzez swoje **momenty dipolowe**.

Jeden problem! We wnętrzu materii, **zawsze** siedzimy we wnętrzu **jakiejś** molekuły i stosunkowo blisko pewnej liczby jej bliskich sąsiadów. Dla tej **szczególnej** molekuły i tych bliskich sąsiadów nie może być mowy o przybliżeniu dipolowym. Tak się przynajmniej wydaje.

Co robić ? Wprowadzić pole średnie! Jest to idea Lorentza.

Pole w materii (ta część od bliskich molekuł) jest niezwykle szybko zmienne w przestrzeni. Ani go nie poznamy, ani nam nie jest za bardzo potrzebne. Trochę tak jak gęstość (masa właściwa) substancji. Wchodzimy w domenę **elektrodynamiki makroskopowej**.

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \approx \text{elektronowolty} \quad \text{dla } a \sim 10^{-10} \text{ m}$$

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{a^2}{r^2} \frac{1}{ea} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \approx \frac{a^2}{r^2} \frac{V}{10^{-10} \text{ m}}$$

$$\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle \equiv \frac{1}{V} \iiint \vec{E} dV$$

V obszar **makroskopowo mały, mikroskopowo duży!**

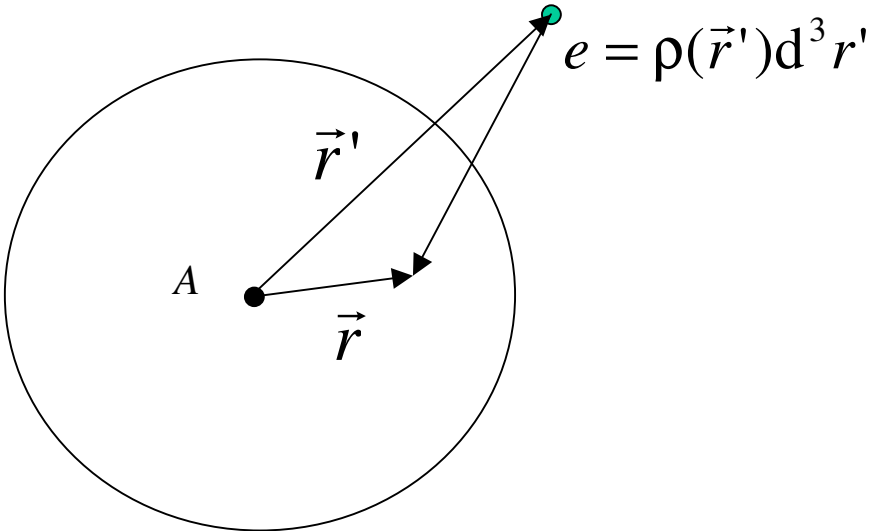
Dla konkretności uśredniamy po kuli

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{V} \iiint_{K(R, \vec{r})} \vec{E} dV$$

Pole ładunku makroskopowego, danego z góry, zewnętrznego, nie musi być uśredniane, ono jest z założenia gładkie. Uśrednić chcemy pole od ładunków wewnątrz-molekularnych. O polu takim, jak o każdym innym, możemy także myśleć jako o superpozycji pól kulombowskich.

Średnia superpozycji pól kulombowskich = superpozycja uśrednionych pól kulombowskich

$$\vec{E}_{e, \vec{r}'}(A) = \frac{1}{V} \iiint_{K(R,A)} \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r = - \iiint_{K(R,A)} \frac{e \cdot \frac{d^3 r}{V}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$



$$= \begin{cases} -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} & \text{dla } r' \geq R \\ -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \frac{r'^3}{R^3} & \text{dla } r' \leq R \end{cases}$$

$$\vec{E}(A) = \iiint \rho(\vec{r}') \vec{E}_{e=1, \vec{r}'}(A) d^3 \vec{r}' = - \iiint_{r' > R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3 \vec{r}' - \iiint_{r' < R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{R^3} d^3 \vec{r}'$$

Moment dipolowy neutralnej molekuly nie zalezy od wyboru poczatkku ukkladu

$$\int (\vec{r}' + \vec{a}) \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' + \vec{a} \int \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

Zatem

$$\iiint_{r' < R} \vec{r}' \sum \rho_i(\vec{r}') d^3 r' = \sum \iiint_{r' < R} \vec{r}' \rho_i(\vec{r}') d^3 r' = \sum_{i \in K(A,R)} \vec{d}_i = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P}(A)$$

$$\vec{P}(A) \equiv \frac{\sum_{i \in K(A,R)} \vec{d}_i}{V}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(A) &= -\iiint_{r' > R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3 \vec{r}' - \iiint_{r' < R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{R^3} d^3 \vec{r}' = \\ &= -\iiint_{r' > R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3 \vec{r}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P}(A) = -\iiint_{r' > R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3 \vec{r}' - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Z wkładem od molekuł „dalekich”, poradzimy sobie łatwo.

Całka z sumy gęstości = suma całek po pojedynczych molekułach.

Pojedyncza molekula =dipol

$$\vec{E}(A) = - \iiint_{r'>R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3\vec{r}' - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0} = \sum_{i>R} \frac{3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{d}_i) - \vec{d}_i r_i'^2}{4\pi\epsilon_0 r_i'^5} - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0}$$

$$= \boxed{\iiint_{r'>R} \frac{3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}') r_i'^2}{4\pi\epsilon_0 r_i'^5} d^3\vec{r}' - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0}}$$

$$\operatorname{div} \left(-\vec{P}(\vec{r}') \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \right) = \vec{a} \frac{3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}') r_i'^2}{4\pi\epsilon_0 r_i'^5} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}')$$

Całkujemy powyższą tożsamość po obszarze na zewnątrz kuli zamieniając całkę z **pełnej** dywergencji na całkę powierzchniową po sferze (daleko, poza izolatorem $P=0$)

$$\cancel{\vec{a}} \iiint_{r'>R} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') \frac{\vec{r}' d^3 r'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \cancel{\vec{a}} \boxed{\iiint_{r'>R} \frac{3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}') r_i'^2}{4\pi\epsilon_0 r_i'^5} d^3 r'} + \cancel{\vec{a}} \oint_{r'=R} \frac{-\vec{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \vec{r}' dS$$

Ale:

$$\oint_{r'=R} \frac{-\vec{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \vec{r}' dS \cong - \oint_{r'=R} \frac{\vec{n} \cdot \vec{P}(A)}{\epsilon_0 r'^3} r' \vec{n} r'^2 \frac{d\Omega}{4\pi} = - \frac{1}{\epsilon_0} \langle (\vec{n} \cdot \vec{P}(A)) \vec{n} \rangle = - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0}$$

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$$

Wyrażenia w ramach identyczne!!

Nasze pole jest jedną tylko całką z dywergencją polaryzacji:

$$\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{r' > R} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') r'^2 dr' d\Omega$$

Wyrażenie podcałkowe jest już **regularne**, wkład od wyciętej kuleczki infinytezymalny – można całkę rozszerzyć bezkarnie do całej przestrzeni.

Wracamy do oznaczenia punktu obserwacji wektorem \vec{r} zamiast literą A

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}')) d^3 r'$$

Polaryzacja wnosi do pola średniego wkład równoważny gęstości ładunku: $-\operatorname{div} \vec{P}$

Powyższą całkę po całej przestrzeni wygodnie jest (by uniknąć operowania dywergencją funkcji nieciągłej, czyli dystrybucją) sprowadzić *explicite* do całki po obszarze skończonego dielektryka i całkę po jego brzegu. Wydzielamy w tym celu cienką warstwę wokół brzegu w poprzek której zmienność wektorów położenia się nie liczy, a jedynie nieciągłość P .

$$\begin{aligned} \iiint_+ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' &= \iiint_- \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' + \iiint_{\text{warstwa}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' = \\ &= \iiint_- \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' + \iint_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}) dS' \end{aligned}$$

Jeszcze jedną postać pola od molekuł warto poznać.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' = \\
 &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' = \\
 &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\vec{P}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3 r' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3 r'
 \end{aligned}$$

Powyższy wzór – poprawny i prosty – bywa wypisywany jako punkt wyjścia, mimo oczywistego niepokoju o molekuły bliskie. Dają one istotny wkład, a przecież ich pole **nie** może być przybliżone polem dipola. Uśrednianie uczyniło cud! Dobrze jest to sprawdzić! A przynajmniej wiedzieć o tym, że takie sprawdzenie jest możliwe, choć odrobinę pracochłonne.

Oznaczając sumę pola średniego molekularnego $\vec{E}(\vec{r})$ i pola od ładunków zewnętrznych ponownie literą, $\vec{E}(\vec{r})$ mamy:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}') + \rho_{\text{zewn}}(\vec{r}')) d^3 r'$$

Z prawa Gaussa dostajemy:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') + \rho_{\text{zewn}}(\vec{r}')}{\epsilon_0}$$

Czyli:

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}')) = \rho_{\text{zewn}}(\vec{r}')$$

Nasze pole, jak widać z ostatniego wzoru na poprzedniej stronie (jest to znów superpozycja pól kulombowskich tyle, że ze zmodyfikowaną gęstością), jest potencjalne

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Powyższe dwa wyniki można zapisać w postaci całkowej:

$$\oiint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \vec{n} dS = Q_{\text{zewn}}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Skromna modyfikacja



Po to, by problem był rozwiązalny, potrzebny jest fizyczny związek \vec{P} z \vec{E}

Dla wielu izolatorów P jest – po prostu – proporcjonalne do E .

Wtedy także zachodzi i taka proporcjonalność:

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \propto \vec{E}$$

Współczynnik proporcjonalności można brać z doświadczenia. W prostych sytuacjach można powiązać go także (zrobimy to na następnym wykładzie) z wielkością polaryzowalności mikroskopowej

Ze względów historycznych przyjęto oznaczać $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \equiv \vec{D}$ a proporcjonalność zapisywać tak:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

ϵ_r - jest bezwymiarową wielkością, tzw. stałą dielektryczną.

Mamy układ równań:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{zewn}}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Ze względu na charakterystyczne skoki polaryzacji, konieczne jest zadbanie, by prawa całkowe były spełnione dla obszarów ogarniających nieciągłości.

E_{styczne} Jest ciągłe (jest to równoważne ciągłości potencjału)

D_{normalne} Jest ciągłe, chyba że występuje gęstość powierzchniowa ładunku zewnętrznego

Podstawa do rozwiązywania wielu ciekawych problemów.