

Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 4

Polaryzacja wnosi do pola średniego wkład równoważny polu kulombowskiemu od pewnej gęstości ładunku $-\text{div}\vec{P}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r'$$

$$\iiint_+ \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' = \iiint_- \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' + \iint_{\Sigma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}) dS'$$

Równania (szczęśliwie) lokalne – rozwiązania globalne

Jeszcze jedną postać pola od molekuł warto poznać.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) d^3 r' = \\
 &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-\text{div}\vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' = \\
 &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\vec{P}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3 r'
 \end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3 r'$$

$$\vec{E}(A) = \iiint_{r' > R} \frac{3\vec{r}'(\vec{r}' \vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}') r'^2}{4\pi\epsilon_0 r'^5} d^3 \vec{r}' - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0}$$

Wyniki równoważne i oba poprawne. Trochę to **paradoksalne**.

$$-\partial_i \frac{\vec{r} \vec{d}}{|\vec{r}|^3} = -\partial_i \frac{x_j d_j}{|\vec{r}|^3} = d_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = d_j \frac{-r^2 \delta_{ij} + 3x_i x_j}{r^5}$$

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \text{PV} \frac{-r^2 \delta_{ij} + 3x_i x_j}{r^5} + A \delta_{ij} \delta(\vec{r})$$

Bierzemy ślad i po lewej mamy laplasjan!

Po prawej tylko wkład od delty Diraca. Zatem:

$$-4\pi \delta(\vec{r}) = \Delta \frac{1}{r} = A \cdot 3 \cdot \delta(\vec{r})$$

$$-\vec{\nabla} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{|\vec{r}|^3} = \text{PV} \frac{-r^2 \vec{d} + 3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{d})}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \vec{d} \delta(\vec{r})$$

$$\vec{E}_{\text{dipola}} = -\vec{\nabla} \frac{\vec{r} \vec{d}}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r}|^3} = \text{PV} \frac{-r^2 \vec{d} + 3\vec{r} \vec{d}}{4\pi \epsilon_0 r^5} - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{d} \delta(\vec{r})$$

Powiązanie (modelowe) stałej dielektrycznej z własnościami mikroskopowymi molekuł.

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_{\text{makro}}(A) + \iiint_{r' > R} \frac{3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) - \vec{P}(\vec{r}')r'^2}{4\pi\epsilon_0 r'^5} d^3\vec{r}' - \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0}$$

Jest w tym pewna nadmierna śmiałość, ale próbowano stosować powyższy wzór do kulki zawierającej **jedną** molekułę!

Ostatni człon jest więc polem **tej** molekuły. Molekuła sama na siebie **nie oddziałuje**. Polem zewnętrznym w stosunku do konkretnej molekuły jest więc:

$$\vec{E}(A) + \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0}$$

Moment dipolowy jaki pojawia się u molekuły, jest więc proporcjonalny do tego właśnie pola.

$$\langle \vec{d} \rangle = \alpha \left(\vec{E}(A) + \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0} \right)$$

Stała α jest stałą mikroskopową, niezależną od koncentracji, dla prostych molekuł policzalną w mechanice kwantowej.

Jeśli przyjmiemy, że koncentracja molekuł wynosi N , możemy napisać:

$$\vec{P} = N \langle \vec{d} \rangle = N\alpha \left(\vec{E}(A) + \frac{\vec{P}(A)}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3\epsilon_0} \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3\epsilon_0} \vec{E}$$

Stąd:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - N\alpha/3\epsilon_0}$$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = N\alpha/3\epsilon_0 \equiv \kappa/3$$

$$\kappa/3 = N\alpha/3\epsilon_0 \rightarrow 1$$

To czy jest kryzys, czy go nie ma zależy silnie od kształtu.

Pręt (płyta) wzdłuż pola pola

Zbadamy znaczenie owego kryzysu polaryzacji dla sytuacji sytuacji, gdy polaryzacja jest jednorodna. Wymaga to stałego zewnętrznego pola i szczególnych kształtów dielektryka.

Pole od dielektryka – tylko od górnych, **odległych** płaszczyzn, zaniedbywalne.

Może to być długi pręt, lub nawet płytka, byle wysokość $\gg \gg$ grubości.

$$E = E_0$$

Na molekuly działa pole „dziury”:

$$E + P/3\epsilon_0 = E_0 + P/3\epsilon_0, \text{ przeto}$$

$$P = N\alpha(E_0 + P/3\epsilon_0) = \epsilon_0 \kappa E_0 + \kappa P/3, \text{ i}$$

$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 - \kappa/3}$$

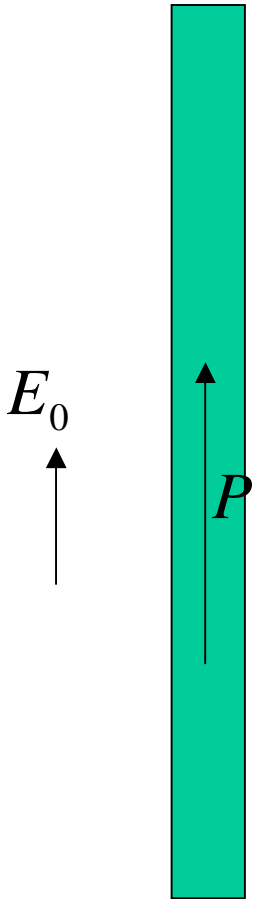
Kryzys jest realny

$$\kappa(0) > 3$$

$$\kappa(P_0) = 3$$

$$P = \cancel{\epsilon_0 E_0} + \kappa(P)P/3 \Rightarrow P = P_0$$

Spontaniczna polaryzacja bez pola



Płyta w poprzek pola

Teraz na **dużych** bliskich płaszczyznach ładunek polaryzacyjny P ,

Pole średnie:

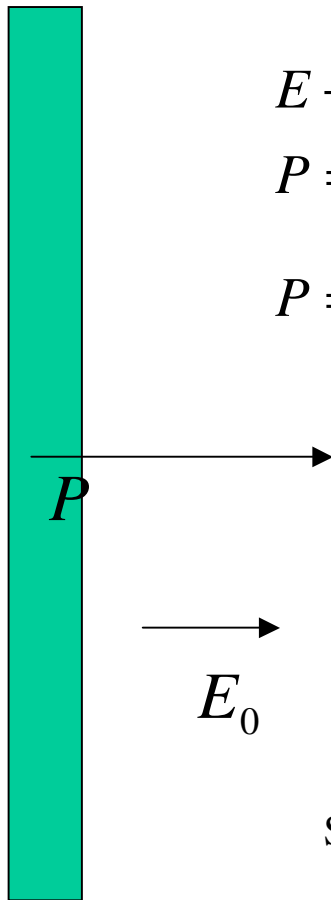
$$E = E_0 - P / \epsilon_0$$

Na molekuly działa pole „dziury”:

$$E + P / 3\epsilon_0 = E_0 - P / \epsilon_0 + P / 3\epsilon_0, \text{ przeto}$$

$$P = N\alpha(E_0 - 2P / 3\epsilon_0) = \epsilon_0 \kappa E_0 - 2\kappa P / 3, \text{ i}$$

$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 + 2\kappa / 3}$$

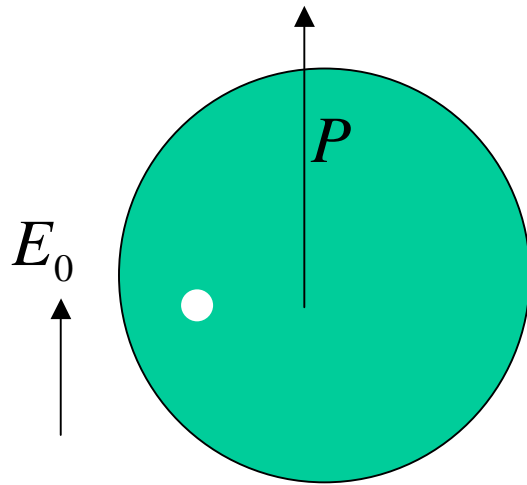


Kryzysu teraz nie ma, polaryzacja zmierza do wartości skończonej, gdy, $\kappa \rightarrow 3$

Ba! Jest ona mniejsza niż dla molekuł izolowanych (plus w mianowniku)

Sąsiedzi w kierunku dipola wzmacniają – sąsiedzi po bokach osłabiają!!!

kula



Jednorodnie spolaryzowana kula - $\vec{E}_{\text{dipoli}} = -\vec{P} / 3\epsilon_0$

Pole całkowite $\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{dipoli}} = \vec{E}_0 - \vec{P} / 3\epsilon_0$

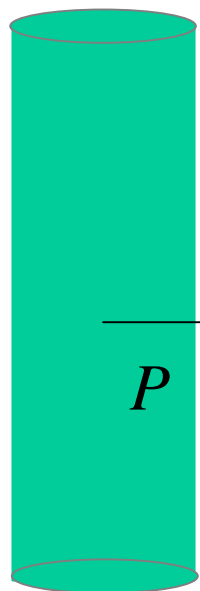
Pole polaryzujące: $\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{dipoli}} + \vec{P} / 3\epsilon_0 = \vec{E}_0$

Szczególny wynik

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_0 = \epsilon_0 \kappa\vec{E}_0$$

Żadnej katastrofy

Dla kompletności rozważmy jeszcze walec w poprzek pola. Przy jednorodnej polaryzacji znamy 3 metody: rozsunięte walce, ładunek powierzchniowy $\sim \cos$, rozwinięcie w cylindrycznych.



$$E_{\text{dipoli}} = -P / 2\epsilon_0$$

Pole całkowite $E_0 + E_{\text{dipoli}} = E_0 - P / 2\epsilon_0$

Pole polaryzujące: $E_0 + E_{\text{dipoli}} + P / 3\epsilon_0 =$
 $= E_0 - P / 2\epsilon_0 + P / 3\epsilon_0 = E_0 - P / 6\epsilon_0$

$$E_0 \quad P = N\alpha(E_0 - P / 6\epsilon_0) = \epsilon_0 \kappa E_0 - \kappa P / 6, \quad \text{i}$$

$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 + \kappa / 6}$$

$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 - \kappa/3}$$

pręt wzdłuż

$$P = N\alpha E_0 = \epsilon_0 \kappa E_0$$

kula

$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 + \kappa/6}$$

walec w poprzek

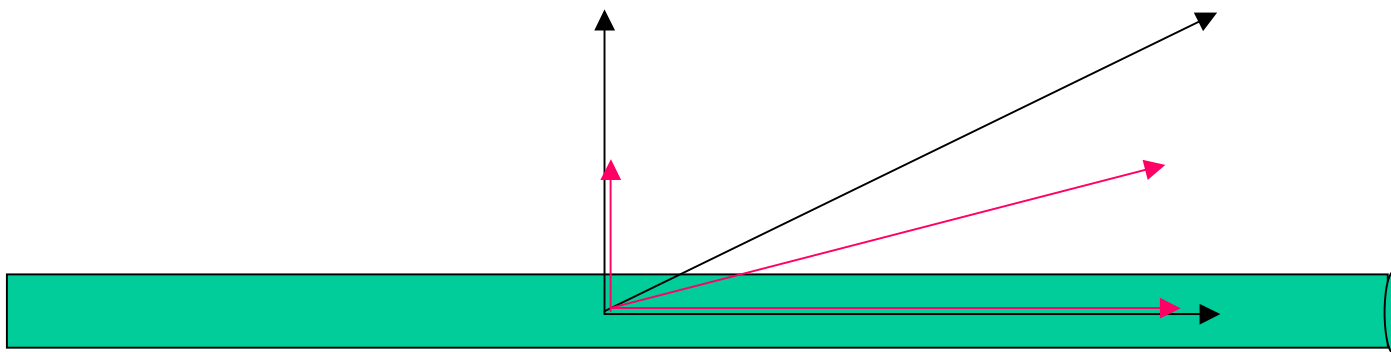
$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 + 2\kappa/3}$$

płytką w poprzek

Dlaczego wydłużone ciała ustawiają się równoległe do pola? Weźmy **długi walec**

$$P_{\parallel} = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 - \kappa/3}$$

$$P_{\perp} = \frac{\epsilon_0 \kappa E_0}{1 + \kappa/2}$$



Moment obrotowy wypadkowego dipola **zawsze** będzie obracał tak, by długość ustawiła się równoległe do pola!!!

Powyższe rozważania istotnie angażowały analizę wektorową. Wynik końcowy bardzo prosty.

Czy można go uzasadnić elementarnie?

$$\vec{E}(A) = \iiint \rho(\vec{r}') \vec{E}_{e,\vec{r}'}(A) d^3 \vec{r}' = - \iiint_{r'>R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} d^3 \vec{r}' - \iiint_{r'<R} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{R^3} d^3 \vec{r}'$$

Powyższy wynik oparty o własność pola jednorodnej kuli wygląda groźnie, ale daje się wysłowić i opowiedzieć przy zupełnie intuicyjnym rozumieniu superpozycji i uśredniania.

Ważne, że pole zależy tylko od polaryzacji!!

Można rozkłady molekularne zastąpić modelem o identycznej polaryzacji jak rzeczywista.

Molekuła -> sześcian o gęstości powierzchniowej: $\sigma_i = \pm P_i$

Sześcianami można obszar dielektryka zappełnić „na styk” uzyskując gładkie pole „mikroskopowe”.

Pole średnie staje się w tym modelu „zwykłym” polem mikroskopowym.

Pole od pojedynczej pary „sufit – podłoga” – bezwirowe, podobnie jak złożenie od trzech par..

Ale suma $\vec{E}_a - \vec{P}_a / \epsilon_0$, gdzie \vec{P}_a jest równe polaryzacji P wewnątrz sześcianu o numerze a , zaś zerem poza tym jest **bezzródłowa!** (Pole \vec{P}_a urywa się na ścianach mając źródła przeciwne do pola od naładowanego sześcianu)

Do wyrażenia na E dopisujemy **bezkaranie** wektory \vec{P}_a , które albo są zerem w A , albo się redukują:

„prim” oznacza sumę
z wyłączeniem A

$$\vec{E}(A) = \sum' (\vec{E}_a(A) + \vec{P}_a(A)/\epsilon_0) + \vec{E}_A(A) + \vec{P}_A(A)/\epsilon_0 - \vec{P}_A(A)/\epsilon_0 + \vec{E}_{zewn}(A)$$

To jest 0 w punkcie A

przenosimy

$$\vec{E}(A) + \vec{P}_A(A)/\epsilon_0 = \sum' (\vec{E}_a(A) + \vec{P}_a(A)/\epsilon_0) + \vec{E}_A(A) + \vec{P}_A(A)/\epsilon_0 + \vec{E}_{zewn}(A)$$

beźródłowe

Widzimy teraz, że:

$$\text{Strumien}(\vec{E} + \vec{P}/\epsilon_0) = \text{Strumien}(\vec{E}_{zewn.}) = Q_{zewn.} / \epsilon_0$$

oraz

$$\text{Krazenie}(\vec{E}) = 0$$

W prawach strumienia i krążenia są zawarte automatycznie warunki „zszycia” na granicy dielektryka

A to są właśnie istotne prawa elektrostatyki ośrodka dielektrycznego