

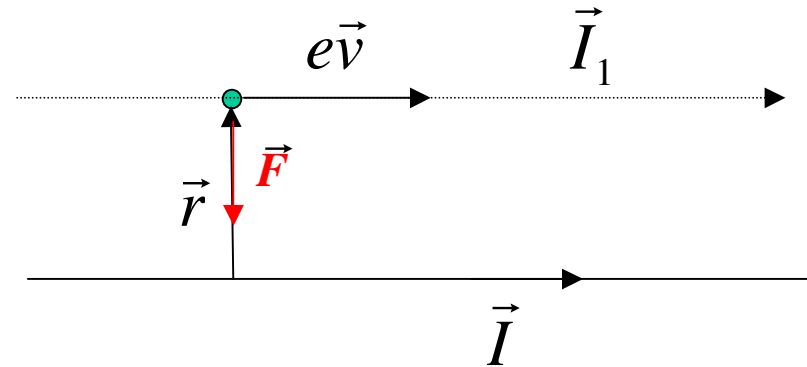
Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 6

$$\vec{F}_e = e\vec{v} \times \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{I} \times \vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{I}_1 = ne\vec{v}$$

$$I_1 d\vec{l}_1 = ndl_1 e\vec{v}$$



Dla pojedynczej cząstki
(siła Lorentza)

$$d\vec{F}_1 = ndl_1 \vec{F}_e = I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{I}_2 \times \vec{r}_{2 \rightarrow 1}}{r^2}$$

Dla równoległych
przewodów (wzór *prawie*
Ampera)

$$\frac{C}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \Rightarrow C = \epsilon_0 \mu_0 = 1,1 \cdot 10^{-17} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$$

A co z przewodnikami dowolnego kształtu?

To ciekawy problem.

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{I} \times \vec{r}}{r^2}$$

Kluczem do poradzenia sobie z tym problemem jest pojęcie pola magnetycznego.

Jego linie dla prostoliniowego przewodu są okręgami otaczającymi przewód – zamykają się w sobie: **strumień B jest równy zero!**

$$\oiint \vec{B}\vec{n}dS = 0$$

Krażenie to iloczyn B i obwodu okręgu:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$$

Powyższe dwa prawa ujmują swą prostotą, elegancją i podobieństwem do praw elektrostatyki. Historycznie ich pochodzenie jest obserwacyjne. Ostateczny kształt, w szczególności wzór na siłę Lorentza został napisany kilkadziesiąt lat po pierwszych odkryciach dotyczących magnetyzmu.

Przez długie lata nie zdawano sobie też sprawy, że badaniu podlega efekt „czysto relatywistyczny”, że nie byłoby magnetyzmu, gdyby Galileusz miał rację we wszystkim.

A co z rozwiązaniem ogólnym?

Niestety, dowolny rozkład prądów nie jest superpozycją prądów prostoliniowych!

Do uzyskania wyrażenia analogicznego do całki Poissona wiedzie dłuższa droga.

$$\oint \vec{B} \vec{n} dS = \iiint \operatorname{div} \vec{B} dV = 0 \quad \iint \vec{n} \operatorname{rot} \vec{B} dS = \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint \vec{n} \vec{j} dS$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} \equiv 0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$A_3 = 0$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = B_1(x, y, z)$$

$$A_2 = - \int_{z_0}^z B_1(x, y, \xi) d\xi$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = B_2(x, y, z)$$

$$A_1 = \int_{z_0}^z B_2(x, y, \xi) d\xi + \int_{y_0}^y B_3(x, \eta, z_0) d\eta$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{A})_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = - \int_{z_0}^z \frac{\partial B_1(x, y, \xi)}{\partial x} d\xi - \int_{z_0}^z \frac{\partial B_2(x, y, \xi)}{\partial y} d\xi + B_3(x, y, z_0) = \\ &= \int_{z_0}^z \frac{\partial B_3(x, y, \xi)}{\partial z} d\xi + B_3(x, y, z_0) = +B_3(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{\nabla} \chi)$$

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \vec{\nabla}\text{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{div}(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \text{div}\vec{A} + \Delta\chi = 0$$

$$-\Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$$\text{div}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\vec{j}(\vec{r}') (-1) \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{div}_{\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') \right) d^3 r' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\text{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' = 0$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{rot}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3 r'$$

$$\vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \Rightarrow I d\vec{l}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

W polu przewodu 2 siła na fragment przewodu 1 wynosi

$$d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 d\vec{l}_1 \times \oint \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

W przeszłości próbowano definiować siłę między **dwoma** elementami obwodów.

Prąd płynie w obwodzie zamkniętym, nie wiadomo co miałyby tak cząstkowa siła reprezentować. Wzór powyższy pozwala spróbować napisać

$$d^2 \vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Zdumiewające rzeczy.

$$\frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = d\vec{l}_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

Przy całkowaniu po 2 \vec{r} jest ustalone.

$$d\vec{l}_2 = -d(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= -d(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \\ &= -(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d \frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + (\vec{r} - \vec{r}') \cdot d \frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Wykonując różniczkowanie w ostatnim wyrazie, dostaję :

$$\frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \text{rozniczka zupelna} +$$

$$-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 + d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 - 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$d\vec{F}_1 = \oint_2 -2 \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(d\vec{l}_\perp \cdot d\vec{l}_\perp - \frac{1}{2} d\vec{l}_\parallel \cdot d\vec{l}_\parallel \right)$$

Autentyczny wzór Ampera:

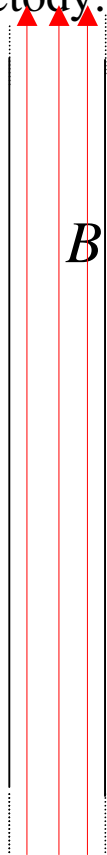
$$d^2 \vec{F}_1 = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2 \left(\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \frac{1}{2} \cos\alpha \cos\beta \right)$$

Siła centralna!!

Wyznaczanie pola poprzez liczenie całki Biota Savarta jest nudne i mało kształcące. Nie za bardzo kształci intuicję. Na przykład: czemu długi, cienki solenoid zachowuje się jakby miał bieguny? Policzenie całki poza osią niemożliwe. Rozwinięcie asymptotyczne działa dopiero daleko od **całego** solenoidu.

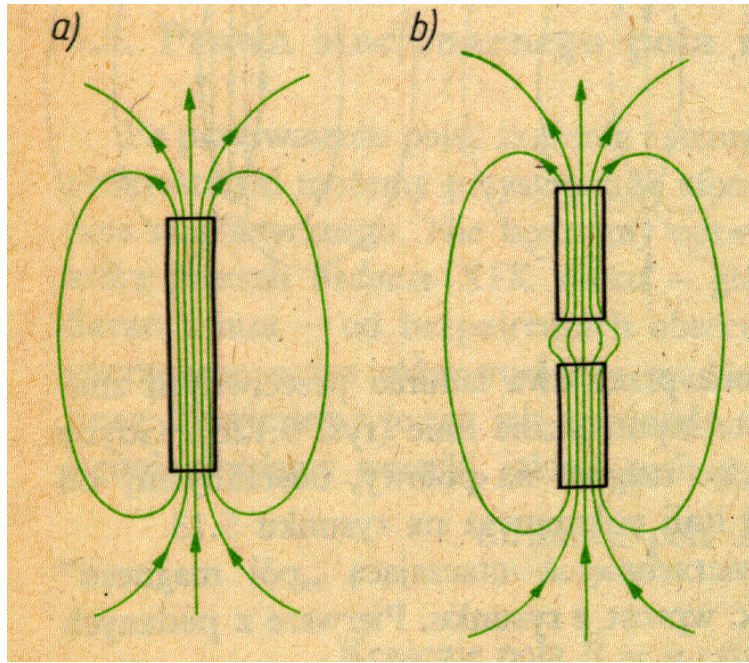
Wyznaczanie pola B wprost z prawa Oersteda-Ampera jest eleganckie, ale niewiele przykładów ma wystarczającą symetrię.

Chciałbym przedstawić metodę wyznaczania pola w sytuacjach wystarczająco interesujących, by się z nią zapoznać. Nie spotkałem (dziwne) w żadnej książce tej metody.

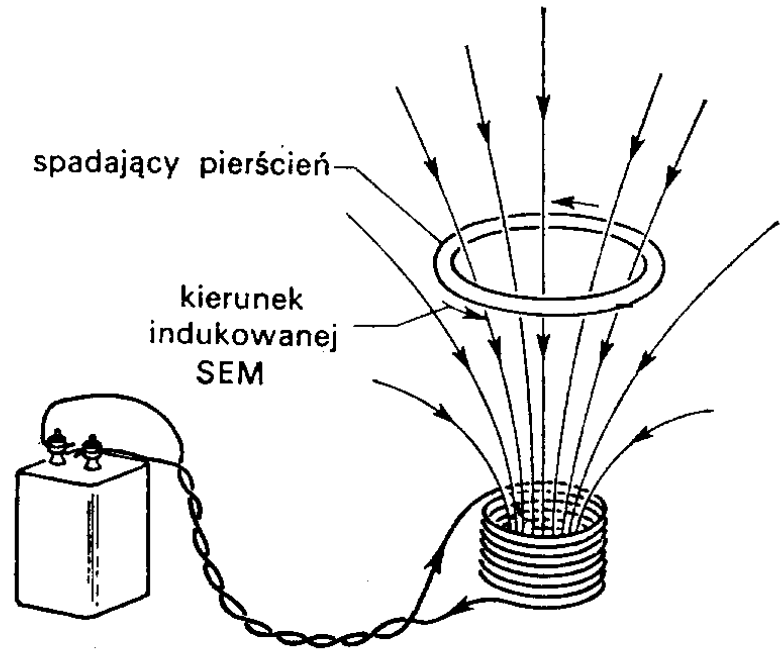
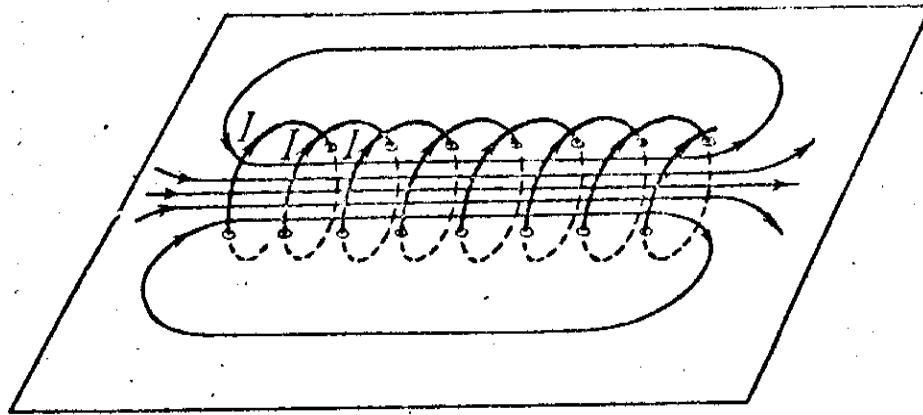
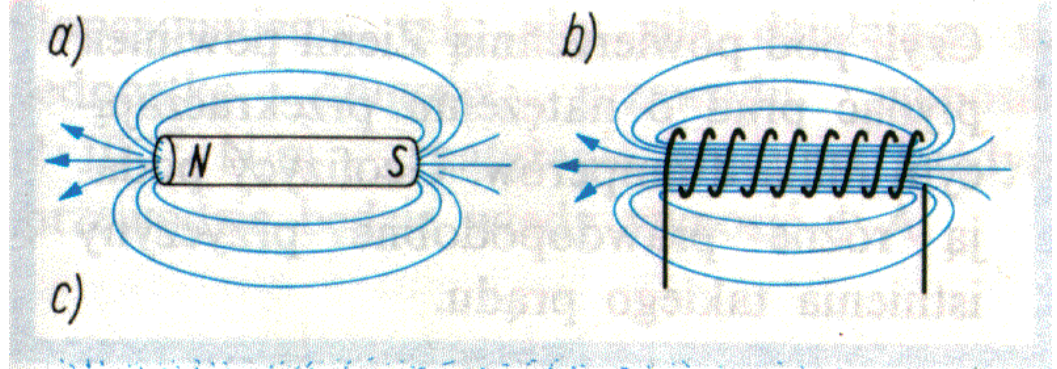


Zacznę od solenoidu nieskończonego. To robią wszyscy!

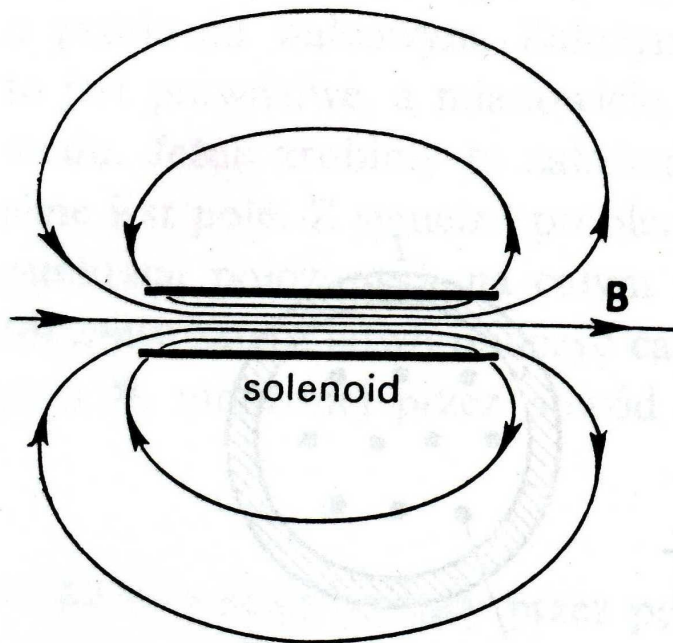
Opis zachowania przy końcach **realnego** solenoidu, to najczęściej „machanie rękami” z fundamentalnym błędem w większości książek

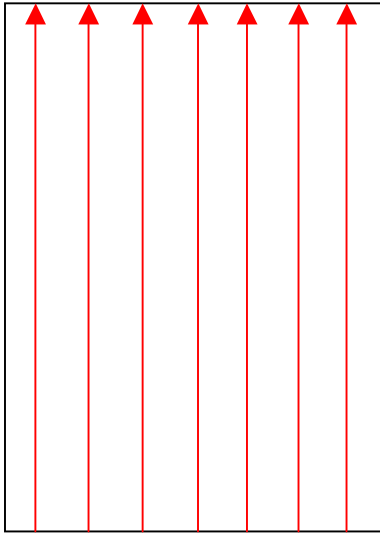


18.2. Różne rozkłady prądu



Co dzieje się z liniami sił pola \mathbf{B} , gdy wydostają się one na zewnątrz na końcach solenoidu? Zapewne rozpościerają się one jakoś i powracają, aby wejść do solenoidu jego drugim końcem, jak naszkicowaliśmy na rys. 13.9. Takie właśnie pole obserwujemy na zewnątrz magnesu sztabkowego. Ale czym w końcu *jest* magnes? Nasze równania mówią, że pole \mathbf{B} powstaje w obecności prądów. Wiemy jednakże, że zwykle sztabki żelazne (bez baterii czy generatorów) także wytwarzają pola magnetyczne. Można by oczekiwać, że po prawej stronie równań (13.12) czy (13.13) powinny występować jakieś inne wyrazy, które by reprezentowały „gęstość magnetycznego żelaza” lub inną wielkość tego rodzaju.





$$\vec{B}_0 = \begin{cases} \mu_0 j \vec{n} & \text{wewnątrz solenoidu} \\ 0 & \text{na zewnątrz solenoidu} \end{cases}$$

Jest to pole pomocnicze – **niezgodne z równaniami**

Jego linie zaczynają się (na podłodze) i kończą (na suficie)

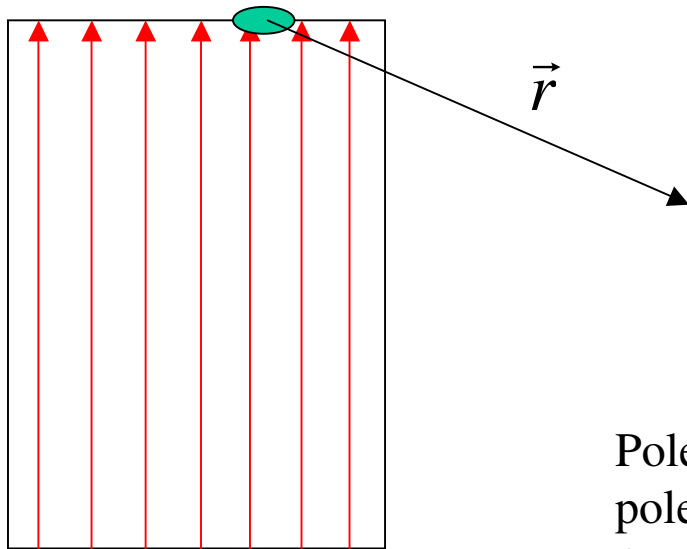
Ale jego krążenie jest jak trzeba!!!!

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

Krążenie B_1 musi być **zerem!!!!**

Rozwiązanie dla skończonego solenoidu sprowadzone do wyznaczenia pola potencjalnego, którego **źródła są minus źródłami** \vec{B}_0 , czyli siedzą na suficie (+) i na podłodze (-).

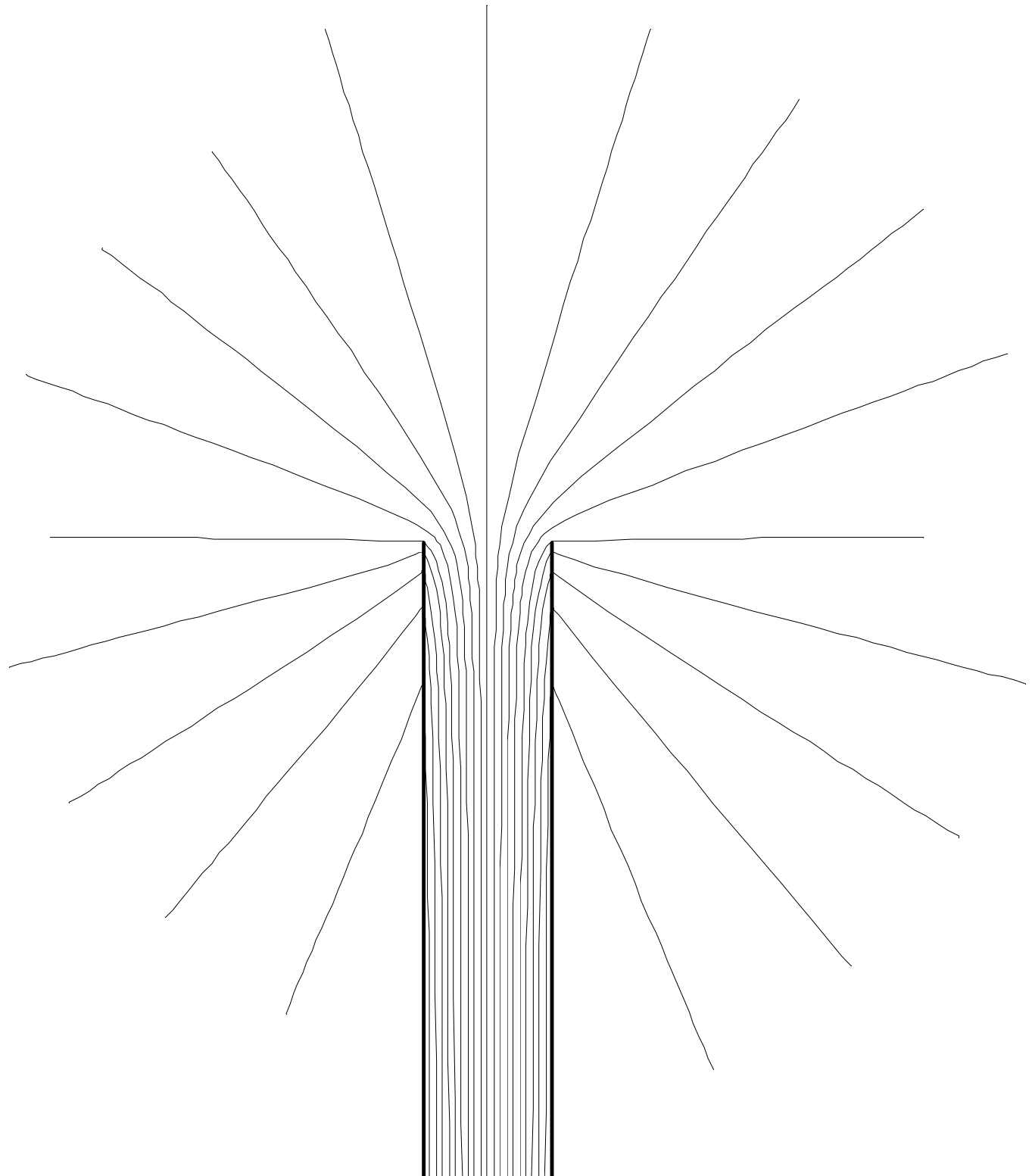
Pole \vec{B}_0 jest po prostu polem kulombowskim dwóch równomiernie „naładowanych” płyt.

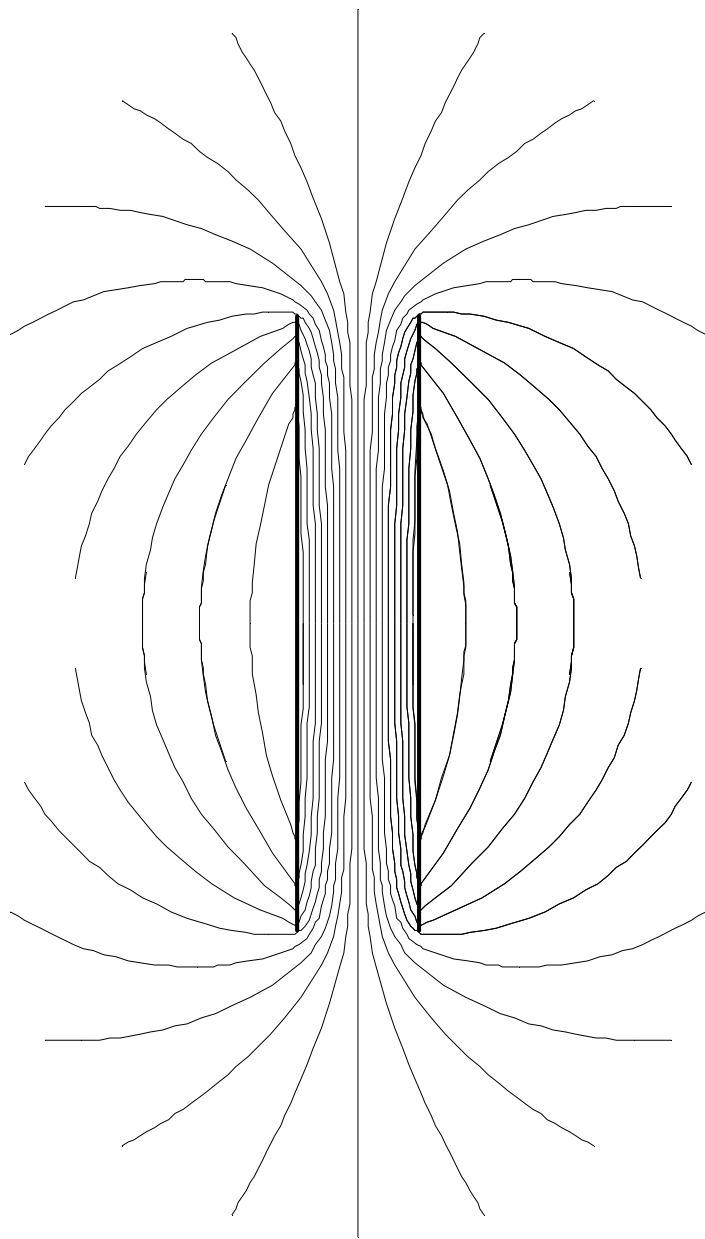


$$d\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 j dS}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Pole B na zewnątrz solenoidu **identyczne** z polem „elektrostatycznym” dwóch płytek („sufitu” i „podłogi”)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} j$$





Moment dipolowy solenoidu (dowolny kształt przekroju) możemy podać od razu:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} j, \quad d = \sigma Sh \Rightarrow m = jSh$$

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$$

Gdy h dąży do zera, zaś $jh=I$, solenoid zamienia się w płaski kontur. Jego moment $m=SI$.

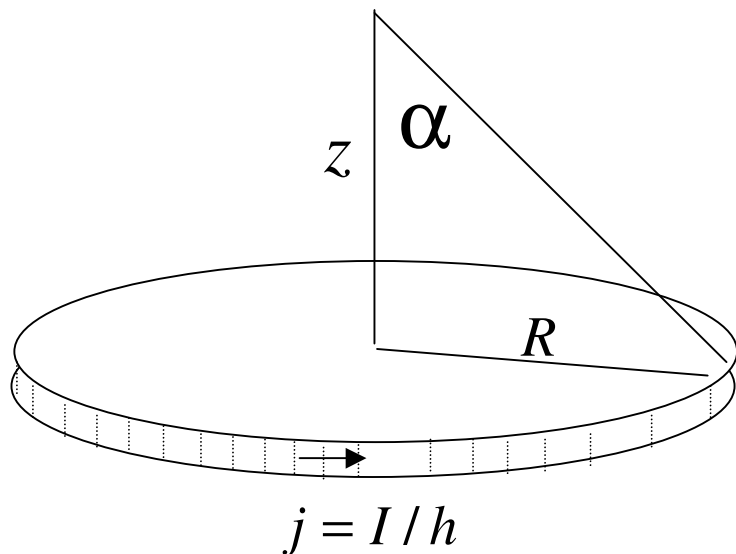
Pole B na osi ramki kołowej to tylko pole B_1 :

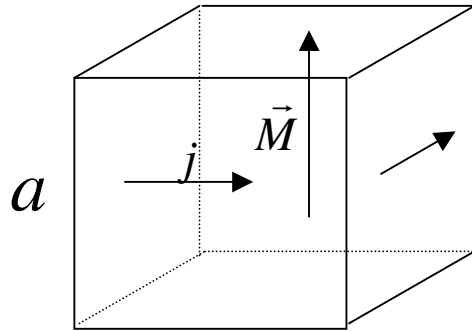
$$B(z) = \mu_0 j \frac{\Omega}{4\pi} = \mu_0 \frac{I}{h} \frac{\Omega}{4\pi}$$

$$\Omega = \frac{2\pi R h}{R^2 + z^2} \sin\alpha = \frac{2\pi R^2 h}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot \pi R^2 I}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$B(0) = \mu_0 \frac{I}{2R}$$





Pamiętamy, że w środku sześcianu:

$$E(0) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \sigma = -\frac{1}{3\epsilon_0} P \quad (d = Qa = \sigma a^2 a \equiv PV)$$

Dlatego:

$$B_1(0) = -\frac{\mu_0 j}{3}$$

$$B(0) = B_1(0) + B_0 = +\frac{2}{3}\mu_0 j$$

Każdy solenoid (idealny) jest dipolem o momencie:

$$m = jSh \equiv MV$$

$$B_0 = \mu_0 j = \mu_0 M$$

$$B(0) = +\frac{2}{3}\mu_0 M$$

Materia w polu.

$$\begin{aligned}\vec{B}(A) &= \Sigma' \vec{B} + B_1(A) + \mu_0 \vec{M}(A) + \vec{B}_{\text{zewn}}(A) = \\ &= \Sigma' \vec{B}_1 + B_1(A) + \mu_0 \vec{M}(A) + \vec{B}_{\text{zewn}}(A)\end{aligned}$$

$$\vec{B}(A) - \mu_0 \vec{M}(A) = \Sigma \vec{B}_1 + \vec{B}_{\text{zewn}}(A)$$

ALE $\Sigma \vec{B}_1$ jest bezwirowa!

Krażenie lewej strony identyczne jak krażenie pola zewnętrznego

$$\text{Krazenie } (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 I_{\text{zewn}}$$

$$\text{rot}(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{zewn}}$$

$$\text{Strumien } (\vec{B}) = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} / \mu_0 - \vec{M} \equiv \vec{H}$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{zewn}}$$

Pole magnetyczne ogólnego układu zlokalizowanego.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint j_i(\vec{r}') d^3 r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \iiint \vec{r}' j_i(\vec{r}') d^3 r'$$

$$\operatorname{div}(f \vec{g}) = \vec{g} \cdot \vec{\nabla} f + f \operatorname{div} \vec{g}$$

$$\iiint_{\infty} \vec{g} \cdot \vec{\nabla} f + f \operatorname{div} \vec{g} = 0$$

Kładąc $f = 1$ $\vec{g} = x'_i$, mamy: $\iiint_{\infty} 1 \operatorname{div} x'_i = 0 = \iiint_{\infty} j_i$

Kładąc $f = x'_i$ $\vec{g} = x'_j$ mamy: $\iiint_{\infty} (x_i j_j + x_j j_i) = 0$

$$\begin{aligned}
A_i(\vec{r}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint j_i(\vec{r}') d^3 r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_j}{r^3} \iiint x_j' j_i(\vec{r}') d^3 r' = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_j}{r^3} \iiint \frac{1}{2} (x_j' j_i(\vec{r}') - x_i' j_j(\vec{r}')) \cdot d^3 r'
\end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \iiint \frac{1}{2} \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{m} = \iiint \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3 r$$

$$\vec{m} = I \oint \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$