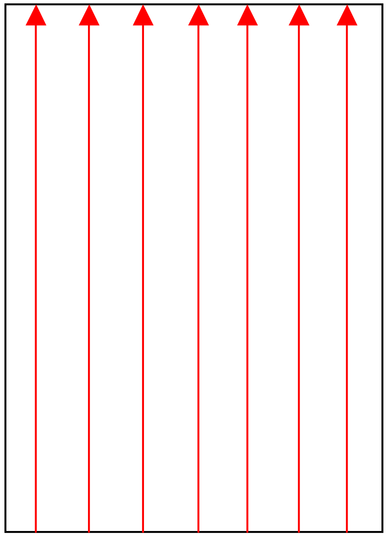
Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 7

Najprostsze i najważniejsze:

$$\oiint \vec{B}\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0$$

$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$



$$\vec{B}_0 = \begin{cases} \mu_0 j\vec{n} & \text{wewnatrz solenoidu} \\ 0 & \text{na zewnatrz solenoidu} \end{cases}$$

Jest to pole pomocnicze – **niezgodne z równaniami**

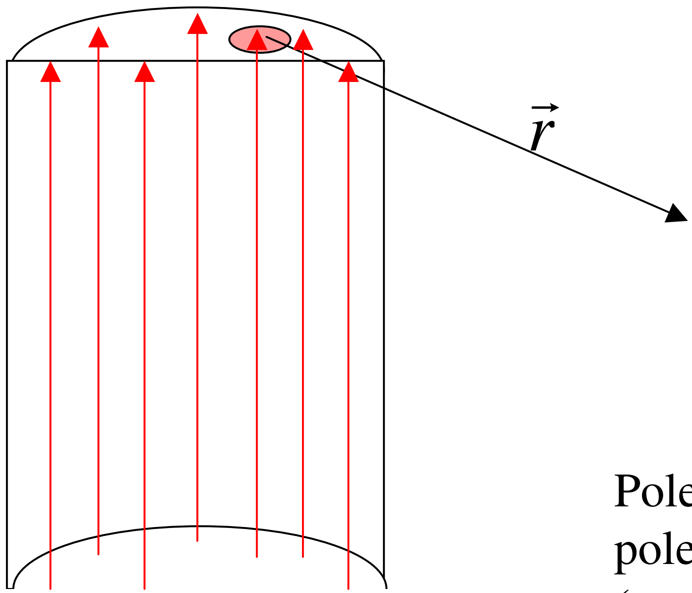
Jego linie zaczynają się (na podłodze) i kończą (na suficie)

Ale jego krążenie jest jak trzeba!!!!!

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

Krążenie B_1 musi być **zerem!!!!!**

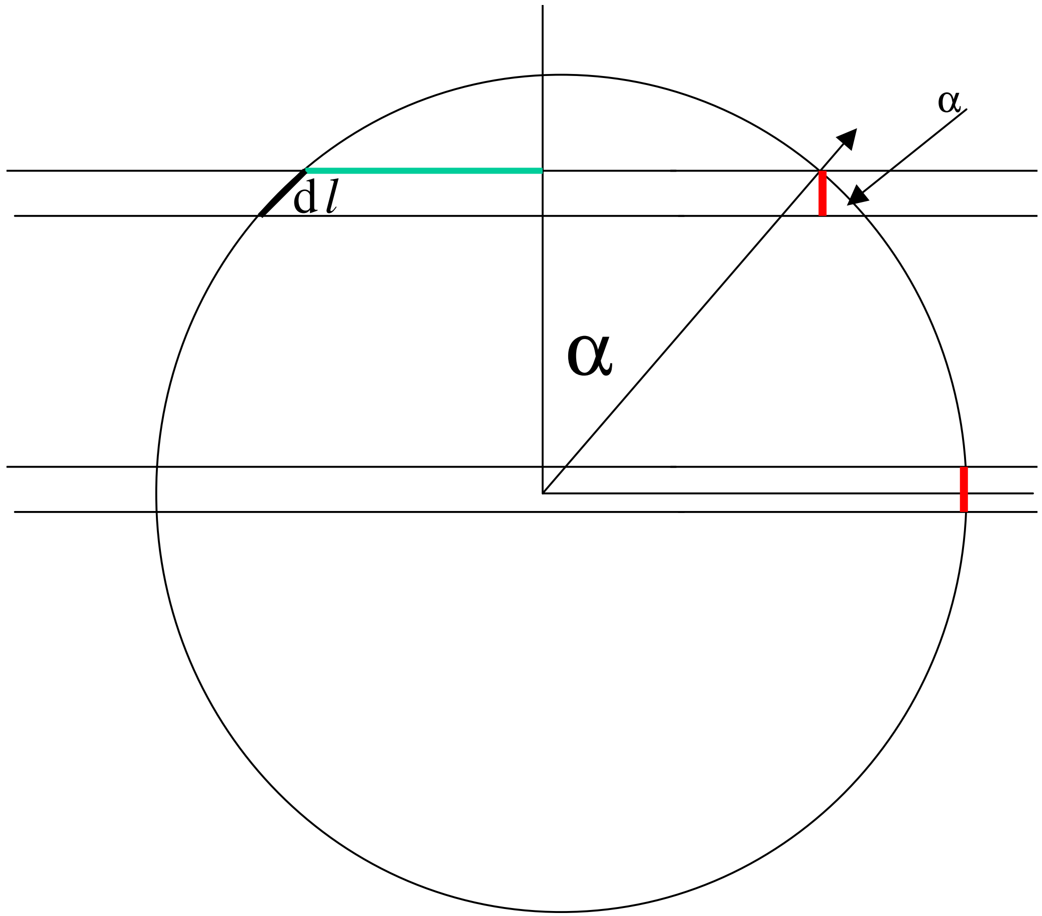
Rozwiązanie dla skończonego solenoidu sprowadzone do wyznaczenia pola potencjalnego, którego **źródła są minus źródłami** $\vec{B}_0$, czyli siedzą na suficie (+) i na podłodze (-). Pole $\vec{B}_0$ jest po prostu polem kulombowskim dwóch równomiernie „naładowanych” płyt.



$$\mathrm{d}\vec{B} = \pm\frac{\mu_0 j \mathrm{d}S}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \pm\frac{B_0 \mathrm{d}S}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Pole *B* na zewnątrz solenoidu **identyczne** z polem „elektrostatycznym” dwóch płytek („sufitu” i „podłogi”)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} j$$

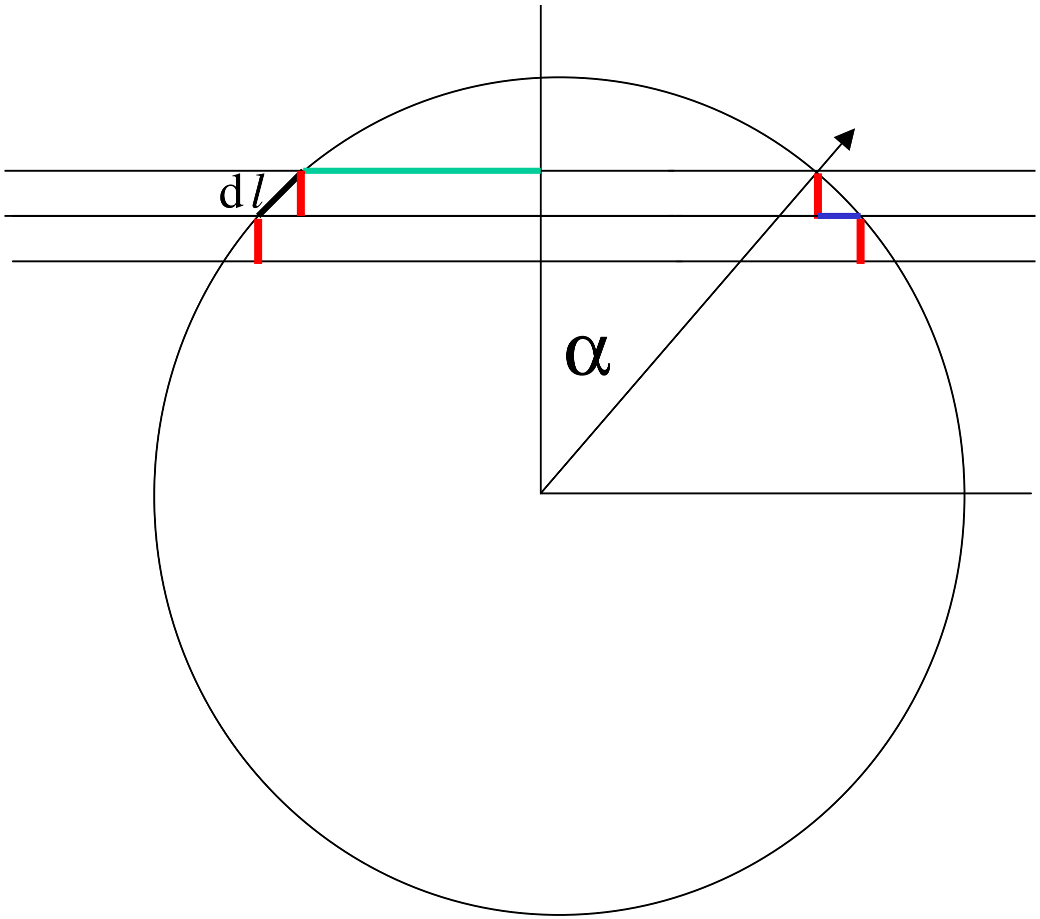


$$= h = \mathrm{d}l \sin\alpha$$

$$= R \sin\alpha$$

$$\mathrm{d}S = \frac{h}{\sin\alpha} 2\pi R \sin\alpha = 2\pi R h$$

Różne „talarki” o tej samej wysokości mają jednakowa powierzchnię boczną.



$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \sigma\frac{\mathrm{d}S}{T} = \sigma\frac{2\pi R}{T}h = \sigma\omega R h$$

$$= \mathrm{d}l\cos\alpha$$

Wiele solenoidów o **identycznym** *j* leżących jeden na drugim. Oczywiście w granicy coraz cieńszych talarków.

$$\vec{B}_0 = \mu_0\sigma R\,\vec{\omega}$$

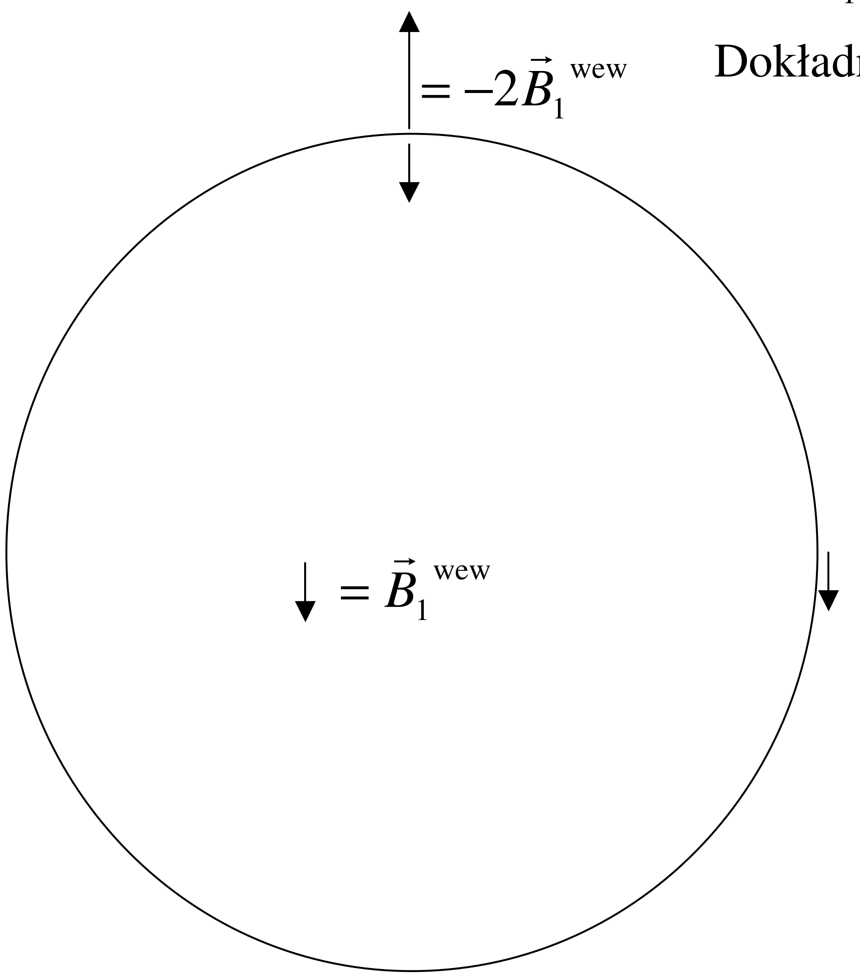
Ale „sufit" mniejszy od „podłogi"! (na górnej półkuli). Przez nieskompensowany „niebieski" pasek wycieka strumień *B*

$$\mathrm{d}\Phi = B_0\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}\Phi = B_0 \cos\alpha \,\mathrm{d}S$$

Pole B_1 od takich źródeł to nasz dobry znajomy!

Dokładny dipol na zewnątrz i pole jednorodne wewnątrz.



Ładunek powierzchniowy ~ do P_1, więc tylko

$r\cos\alpha = z$ dla $r < R$, oraz

$\cos\alpha / r^2 = z/r^3$ dla $r > R$

$$\vec{B}_{\mathrm{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$$

$$\vec{B}_1^{\,\mathrm{wew}} = -\frac{1}{3}\vec{B}_0 = -\frac{1}{3}\mu_0\sigma R\,\vec{\omega}$$

$$\vec{B}^{\,\mathrm{wew}} = +\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\,\vec{\omega}$$

$$\frac{-\vec{m}}{4\pi R^3} = -\frac{1}{3}\sigma R\,\vec{\omega} \qquad \vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\sigma R\,\vec{\omega}$$

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \sigma R \; \vec{\omega} = V \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0$$

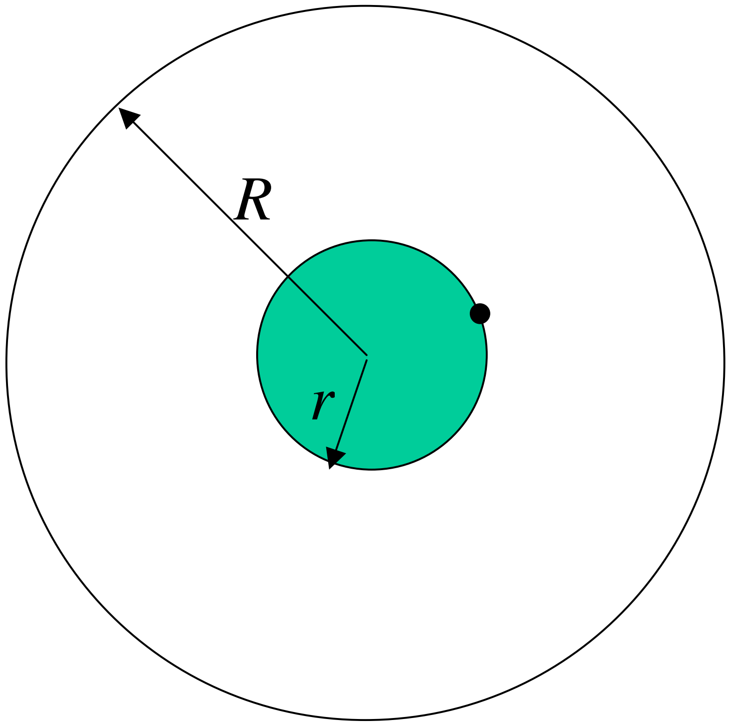
$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0$$

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \sigma R \; \vec{\omega} = \frac{R^2}{3} Q \vec{\omega} = \frac{2MR^2}{3} \cdot \frac{Q}{2M} \vec{\omega} = \frac{Q}{2M} \vec{J}$$

Dla kuli jednorodnej (dającej się w myśli rozłożyć na sfery), dodają się i momenty magnetyczne i momenty pędu. Dlatego:

$$\vec{m}_{\text{kuli}} = \frac{Q}{2M} \vec{J} = \frac{Q}{2M} \frac{2}{5} MR^2 \vec{\omega} = \frac{R^2}{5} Q \vec{\omega}$$

Pełna kula – superpozycja sfer



Część wewnętrzna (zielona) da pole dipola od wirującego **ułamka** ładunku.

$$\vec{B}_{\text{ziel}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q(r)r^2}{5}\frac{3(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r} - \vec{\omega}\, r^2}{r^5} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qr^3 r^2}{R^3\, 5}\frac{3(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r} - \vec{\omega}\, r^2}{r^5} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{R^3\, 5}\left(3(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r} - \vec{\omega}\, r^2\right)$$

Część zewnętrzna (biała) da **sumę** pól $2/3B_0$ od

„sfer" o grubości dr i gęstości $\sigma = \rho \mathrm{d}r$

$$\vec{B}_{\text{biala}} = \int_r^R \frac{2}{3}\mu_0\vec{\omega}\, r\rho \mathrm{d}r = \frac{1}{3}\mu_0\vec{\omega}(R^2 - r^2)\rho =$$

$$= \mu_0 \frac{Q}{4\pi R^3}\vec{\omega}(R^2 - r^2)$$

$$\vec{B}_{\text{wew}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{R^3\,5}\left(3(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r} - \vec{\omega}\,r^2\right) + \mu_0\frac{Q}{4\pi R^3}\vec{\omega}(R^2 - r^2) =$$

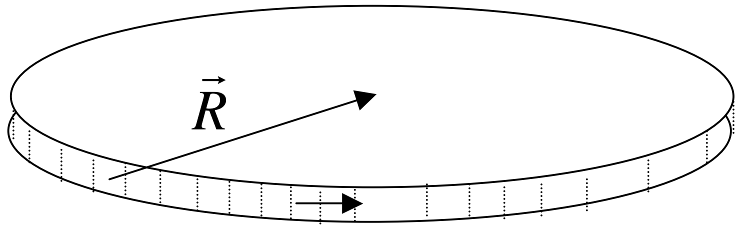
$$= \frac{\mu_0 Q}{4\pi R^3}\left(\frac{3}{5}(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r} - \frac{6}{5}\vec{\omega}\,r^2 + \vec{\omega}\,R^2\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{B}_{\text{wew}} = \frac{3}{5}\frac{\mu_0 Q}{4\pi R^3}\left(\operatorname{div}\left((\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}\right) - \operatorname{div}2\vec{\omega}\,r^2\right)$$

$$\operatorname{div}\left((\vec{r}\vec{\omega})\vec{r}\right) - \operatorname{div}2\vec{\omega}\,r^2 = (\vec{r}\vec{\omega})\cdot 3 + \vec{\omega}\,\vec{r} - 4\vec{\omega}\vec{r} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}_{\text{wew}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi R^3}\operatorname{rot}\left(\frac{3}{5}(\vec{r}\vec{\omega})\vec{r} - \frac{6}{5}\vec{\omega}\,r^2 + \vec{\omega}\,R^2\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 Q}{4\pi R^3}\left(\frac{3}{5}\vec{\omega}\times\vec{r} - \frac{6}{5}\cdot 2\vec{r}\times\vec{\omega}\right) = 3\frac{\mu_0 Q}{4\pi R^3}\vec{\omega}\times\vec{r} = \mu_0\rho\vec{v}$$



$j = I / h$

$$B(0) = B_0 - B_0 \frac{\Omega}{4\pi} = B_0 \frac{\Omega'}{4\pi} = \mu_0 \frac{I}{h} \frac{2\pi Rh / R^2}{4\pi} = \mu_0 \frac{I}{2R}$$

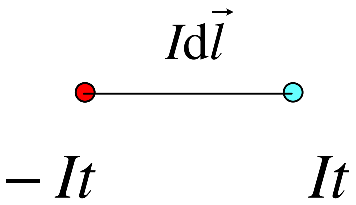
$$B(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R \frac{I}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sum dl$$

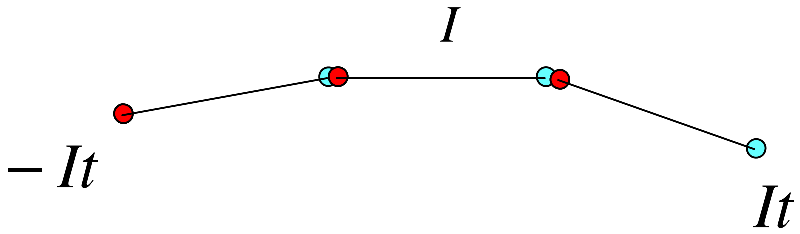
Chcąc zaznaczyć zwroty można nawet napisać:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^3} \sum d\vec{l} \times \vec{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

Symetria powoduje, że każdy segment (gdyby miał sens) musiałby dać tyle samo, a suma znana, więc każdy segment musiałby dawać właśnie to co się rozumie przez Biota – Savarta.

Konfiguracja „hantle” może (w zasadzie) być fizycznie zrealizowana, przez dostatecznie długi czas.

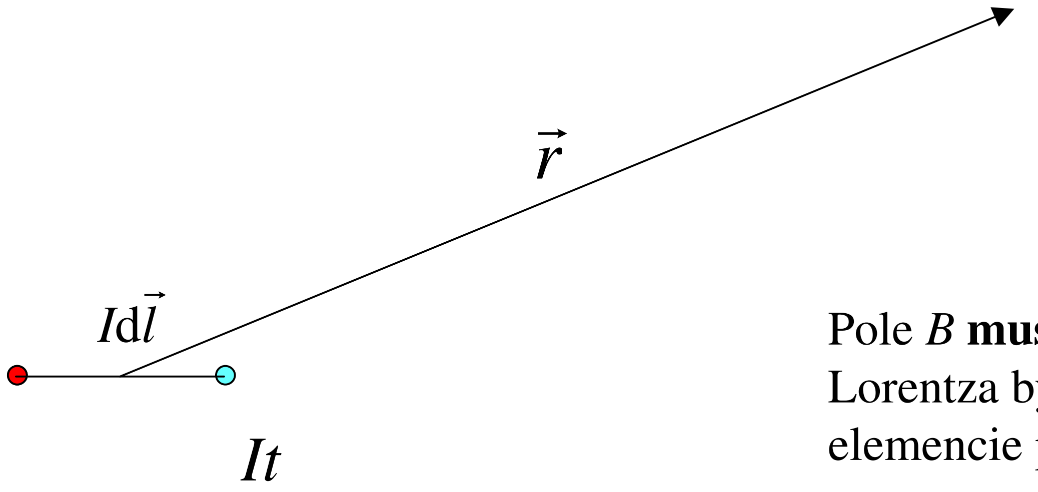




Dostawiając kolejne „hantle” tworzę przewód dowolnego kształtu i tylko 2 ładunki na końcach. Po zamknięciu pętli, ładunki w ogóle znikają!

Obwód zamknięty, to suma hantli.

Pole magnetyczne obwodu to suma pól od każdej z par hantli



Pole B **musi** być pseudowektorem (by siła Lorentza była wektorem), liniowym w elemencie prądu

$$\mathrm{d}\vec{B} = f(r) I \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}$$

Formuła powyższa jest ogólna – niezależnie od tego jakie inne hantle dodamy.

Jeśli dla okręgu ma wyjść to co wiemy że jest, to oczywiście musi być:

$$f(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}$$

Prawo Biota Savarta jest więc udowodnione na elementarnej drodze.

Interesujące jest sprawdzić, jakie „prawo krążenia" spełnia pole jednej pary hantli.

$$\mathrm{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}=\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{r})=(-\Delta+\mathrm{graddiv})\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}}{r}=$$

$$=\mu_0 I\mathrm{d}\vec{l}\,\delta(\vec{r})-\mu_0\mathrm{grad}\frac{1}{4\pi}\frac{I\,\vec{r}\mathrm{d}\vec{l}}{r^3}$$

Zastąpmy prąd pochodną ładunku i dopiszmy w liczniku i mianowniku ε_0

$$\mathrm{rot}(\mathrm{d}\vec{B})=\mu_0 I\delta(\vec{r})-\mu_0\varepsilon_0\mathrm{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{Q}\,\vec{r}\mathrm{d}\vec{l}}{r^3}=$$

$$=\mu_0\left(I\mathrm{d}\vec{l}\,\delta(\vec{r})+\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E}_{\mathrm{dipola}Q\mathrm{d}\vec{l}}\right)$$

Rozkładając obwód na segmenty, musieliśmy wprowadzić rosnący ładunek i zmienne pole elektryczne. Odkryliśmy na tej drodze słynny człon „prąd przesunięcia" Maxwella.

Równanie ciągłości:

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{div}\vec{D} = \mathrm{div}(\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{D}) = \mathrm{div}(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E})$$

Rotacja *B* musi być wyrażona przez wektor o znikającej dywergencji. Gęstość prądu ma tę własność w sytuacji stacjonarnej. Wektorem **stale** mającym znikającą dywergencję jest – jak widzimy suma gęstości prądu i pochodnej *D*. Równanie:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{D}) =$$

$$= \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E})\ \text{(w prozni)}$$

które otrzymaliśmy dla pola „hantli”, jest właściwym uogólnieniem prawa Ampera. Przy założeniu liniowości jedynym możliwym.

Pole magnetyczne ogólnego układu zlokalizowanego.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \cdots$$

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{j_i(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r' \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\iiint j_i(\vec{r}')\mathrm{d}^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}\iiint \cdot\,\vec{r}'\, j_i(\vec{r}')\mathrm{d}^3r'$$

$$\mathrm{div}(f\ g\ \vec{j}) = g\ \vec{j}\,\vec{\nabla}f + f\ \vec{j}\,\vec{\nabla}g$$

$$\iiint_{\infty} g\ \vec{j}\,\vec{\nabla}f + f\ \vec{j}\,\vec{\nabla}g = 0$$

Kładąc $f = 1 \quad g = x'_i$, mamy: $\iiint_{\infty} 1\,\vec{j}\,\vec{\nabla}x_i = 0 = \iiint_{\infty} j_i$

Kładąc $f = x'_i \quad g = x'_j$ mamy: $\iiint_{\infty} (x_i j_j + x_j j_i) = 0$

$$A_i(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\cancel{\frac{1}{r}\iiint j_i(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r'} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{x_j}{r^3}\iiint \cdot\, x_j{}'\, j_i(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{x_j}{r^3}\iiint \frac{1}{2}\Big(x_j{}'\, j_i(\vec{r}\,') - x_i{}'\, j_j(\vec{r}\,')\Big)\cdot \mathrm{d}^3 r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}\times \iiint \frac{1}{2}\vec{r}\,'\times \vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{m} = \iiint \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\mathrm{d}^3 r$$

$$\vec{m} = I\oint \frac{1}{2}\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{A}(\vec{r})_{\mathrm{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \mathrm{rot}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r}$$

$$\vec{B}(\vec{r})_{\mathrm{dip}} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}(-\Delta + \mathrm{grad}\,\mathrm{div})\frac{\vec{m}}{r} = \mu_0\vec{m}\delta(\vec{r}) - \mathrm{grad}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{dip}} = \text{-grad}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} = \mathrm{P}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{d}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{d}}{r^5} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{d}\,\delta(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r})_{\mathrm{dip}} = \mathrm{P}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5} + \frac{2}{3}\mu_0\vec{m}\delta(\vec{r})$$