Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 8

$$\vec{A}(\vec{r})_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \operatorname{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r} \qquad \vec{m} = \iiint \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$$

$$\vec{B}(\vec{r})_{\text{dip}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}(-\Delta + \operatorname{grad}\operatorname{div})\frac{\vec{m}}{r} = \mu_0\vec{m}\delta(\vec{r}) - \operatorname{grad}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{dip}} = \text{-grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} = \mathrm{P}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{d}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{d}}{r^5} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{d}\,\delta(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r})_{\text{dip}} = \mathrm{P}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5} + \frac{2}{3}\mu_0\vec{m}\delta(\vec{r})$$

$$\vec{m} = \iiint \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\mathrm{d}^3 r = -\iiint \frac{1}{2}\vec{j}(\vec{r})\times\vec{r}\mathrm{d}^3 r$$

$$0 = \iiint_\infty j_i \mathrm{d}^3 r \qquad \iiint_\infty (x_i j_j + x_j j_i)\mathrm{d}^3 r = 0 \Rightarrow \iiint_\infty (x_i j_j)\mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2}\iiint_\infty (x_i j_j - x_j j_i)\mathrm{d}^3 r$$

$$\Downarrow$$

$$\iiint_\infty (x_i j_i + x_i j_i)\mathrm{d}^3 r = \iiint 2\vec{r}\cdot\vec{j}\mathrm{d}^3 r = 0$$

$$\iiint_\infty x_1 j_2 \mathrm{d}^3 r = -\iiint_\infty x_2 j_1 \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2}\iiint_\infty (x_1 j_2 - x_2 j_1)\mathrm{d}^3 r = m_3$$

$$\iiint_\infty x_i j_j \mathrm{d}^3 r = \varepsilon_{ijk'} m_{k'}$$

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'} \qquad m_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\iiint_\infty x_i j_j \mathrm{d}^3 r$$

Moment siły w polu magnetycznym (*B* – stałe w **małym** obszarze lokalizacji):

$$\vec{N} = \iiint \vec{r} \times \left(\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}\right) \mathrm{d}^3 r = \iiint \left(\vec{r} \cdot \vec{B}\right) \vec{j}(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r - \cancel{\vec{B} \iiint \left(\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r})\right) \mathrm{d}^3 r}$$

$$N_i = B_k \iiint x_k \, j_i(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r = B_k \varepsilon_{kij} m_j = \varepsilon_{ijk} m_j B_k$$

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Siła w polu magnetycznym (rozkład prądu **dobrze** zlokalizowany):

$$F_i = \varepsilon_{ijk} \iiint (j_j(\vec{r})(\cancel{B_k} + (x_a - \cancel{x_a^0})B_{k,a})\mathrm{d}^3 r = \varepsilon_{ijk} B_{k,a} \iiint x_a j_j(\vec{r})\mathrm{d}^3 r$$

$$\begin{aligned} F_i &= \varepsilon_{ijk} B_{k,a} \varepsilon_{ajp} m_p = \left(\delta_{ia}\delta_{kp} - \delta_{ip}\delta_{ak}\right) B_{k,a} m_p = \\ &= B_{k,i} m_k - B_{k,k} m_i = \\ &= \left(B_k m_k\right)_{,i} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Ze względu na tożsamość:

$$\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Gdy układ i źródła pola rozdzielone (pole zewnętrzne bezwirowe na dipolu), jest też:

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

W polu elektrycznym było prościej:

$$\vec{N} = \iiint \vec{r} \times (\rho(\vec{r})\vec{E})\mathrm{d}^3 r = \iiint (\vec{r}\rho(\vec{r}))\mathrm{d}^3 r \times \vec{E} = \vec{d} \times \vec{E}$$

$$F_k = \iiint (\rho(\vec{r})(\cancel{E_k} + (x_a - \cancel{x_a^0})E_{k,a})\mathrm{d}^3 r$$

$$\vec{F} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

Dla pola bezwirowego (w elektrostatyce), jest też:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{d} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla}(-\vec{d} \cdot \vec{E})$$

Pole w materii.

Podobnie jak elektryczne, pole magnetyczne musi być uśrednione po obszarach mikroskopowo dużych a makroskopowo małych.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)\mathrm{d}^3 r'$$

Uśredniamy całkując po zmiennej $\vec{r}$ we wnętrzu kuli o środku w punkcie *A*.

Raz już to robiliśmy! Dla punktu $\vec{r}\,'$ leżącego poza kulą, wychodził wektor:

$$\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|^3}$$

A dla punktów wewnętrznych:

$$\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}\,')}{R^3}$$

Taki uśredniony wektor, był superponowany dla wszystkich $\vec{r}\,'$ z gęstością $\rho(\vec{r}\,')$.

Całka rozpadała się na część zewnętrzną i wewnętrzną. Pole od dalekich molekuł – przybliżenie dipolowe. Pole od tych z wnętrza kuli wyrażało się przez sumaryczny moment dipolowy.

Teraz podobnie, choć znamienna różnica dla wnętrza!!

$$\vec{m} = \iiint \frac{1}{2}\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' = \iiint \frac{1}{2}(\vec{r}\,'-\vec{r}_A)\times\vec{j}(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r' =$$

$$= \iiint \vec{j}(\vec{r}\,')\times\frac{1}{2}(\vec{r}_A-\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r'$$

$$\vec{d} = \iiint \rho(\vec{r}\,')(\vec{r}\,'-\vec{r}_A)\mathrm{d}^3 r' = -\iiint \rho(\vec{r}\,')(\vec{r}_A-\vec{r}\,')\mathrm{d}^3 r'$$

Dodatkowy „minus” i dodatkowe ½ w porównaniu z polem elektrycznym.

$$\left\langle \vec{B}(A) \right\rangle = \frac{1}{4\pi R^3} \iiint_{K(R)} \frac{\mu_0}{4\pi} \mathrm{d}^3 r \iiint \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) \mathrm{d}^3 r' =$$

$$= \iiint_{|\vec{r}_A - \vec{r}\,'| > R} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}\,')}{|\vec{r}_A - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}^3 r' + \iiint_{|\vec{r}_A - \vec{r}\,'| < R} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}\,')}{R^3} \mathrm{d}^3 r' =$$

$$= \iiint_{|\vec{r}_A - \vec{r}\,'| > R} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{r}_A - \vec{r}\,') \cdot \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A - \vec{r}\,'|^5} (\vec{r}_A - \vec{r}\,') - \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A - \vec{r}\,'|^3} \right) \mathrm{d}^3 r' + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}(A)$$

$$\left\langle \vec{B}(A)\right\rangle = \iiint\limits_{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|>R} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{r}_A-\vec{r}\,')\cdot\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}_A-\vec{r}\,') - \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|^3}\right)\mathrm{d}^3 r' + \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}(A) =$$

$$= \boxed{\underset{\text{bezwirowe}}{\iiint\limits_{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|>R} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{r}_A-\vec{r}\,')\cdot\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}_A-\vec{r}\,') - \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|^3}\right)\mathrm{d}^3 r' - \frac{1}{3}\mu_0\vec{M}(A)}} + \mu_0\vec{M}(A)$$

$$\boxed{} = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-\,\mathrm{div}\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{A}(\vec{r})_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \operatorname{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r}$$

$$\vec{B}(\vec{r})_{\text{dip}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}(-\Delta + \operatorname{grad}\operatorname{div})\frac{\vec{m}}{r} = \mu_0\vec{m}\delta(\vec{r}) - \operatorname{grad}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{dip}} = \text{-grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} = \mathrm{P}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{d}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{d}}{r^5} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{d}\,\delta(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r})_{\text{dip}} = \mathrm{P}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r}) - r^2\vec{m}}{r^5} + \frac{2}{3}\mu_0\vec{m}\delta(\vec{r})$$

$$\mathrm{rot}\left(\left\langle \vec{B}_{\mathrm{mol}}(\vec{r})\right\rangle + \vec{B}_{\mathrm{ex}t}\right) = \mathrm{rot}\mu_0\vec{M}(\vec{r}) + \mathrm{rot}\vec{B}_{\mathrm{ex}t}(\vec{r}) = \mu_0(\mathrm{rot}\vec{M}(\vec{r}) + \vec{j}_{\mathrm{ex}t}(\vec{r}))$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\mathrm{rot}\vec{M}(\vec{r}) + \vec{j}_{\mathrm{ext}}(\vec{r}))$$

$$\mathrm{rot}(\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = \vec{j}_{\mathrm{ext}}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\mathrm{ext}} \qquad \vec{B}/\mu_0 - \vec{M} = \vec{H} \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r\mu_0\vec{H}$$

Komplikacje magnetyzmu – nieliniowa zależność B(H).
W materiałach liniowych, sytuacja podobna jak w elektrostatyce.
Kluczowa sprawa – warunki brzegowe:
i) ciągłość składowej stycznej ***H*** (chyba że płynie prawdziwy prąd powierzchniowy),
ii) ciągłość składowej normalnej ***B*** – zawsze.

W elektrostatyce **zawsze** ciągłość stycznej składowej ***E*** i ciągłość składowej normalnej ***D*** (chyba że ład. pow.)

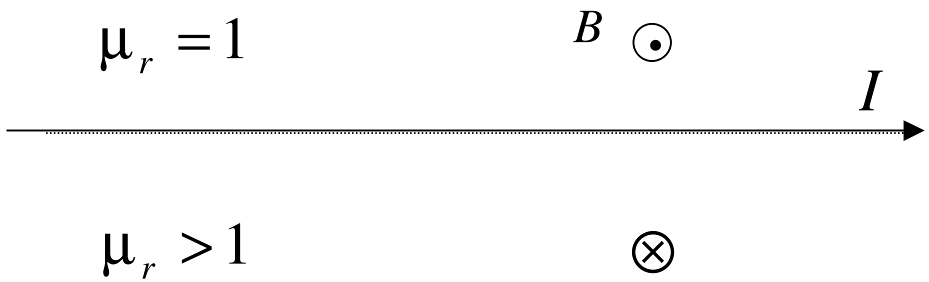
Przykład:

$$B = \alpha \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$

$$\pi r \frac{B}{\mu_0 \mu_r} + \pi r \frac{B}{\mu_0} = I$$

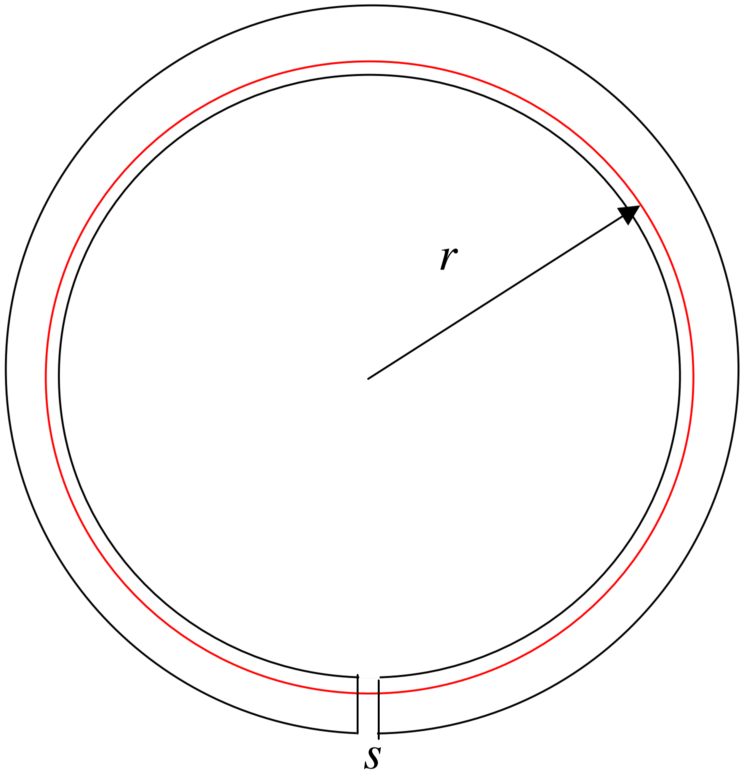
$$\alpha \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}\left(\frac{\pi r}{\mu_0 \mu_r} + \frac{\pi r}{\mu_0}\right) = I$$

$$\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_r} + 1\right) = 1$$



$$B = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{2}{1+\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$



$$B = \alpha / r$$

$$s \cdot \frac{1}{\mu_0} \alpha / r + (2\pi r - s) \frac{1}{\mu_r \mu_0} \alpha / r = NI$$

$$\alpha / r = B = \frac{NI\mu_0}{s + (2\pi r - s)/\mu_r} = \frac{NI\mu_0\mu_r}{s\mu_r + (2\pi r - s)}$$

Dla szczeliny **bardzo** wąskiej i cienkiego solenoidu:

$$B \approx \mu_r \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} \approx \mu_r \mu_0 j$$

$$M = B/\mu_0 - H = B/\mu_0 - B/\mu_r\mu_0 =$$

$$= (\mu_r - 1) j$$