Elektrodynamika z elementami teorii pola

Wykład 9

Pola zmienne w czasie.

Zastanawiając się nad sensem funkcji podcałkowej w prawie Biota – Savarta, dostrzegliśmy możliwą rolę zmiennego pola elektrycznego. Formalne podstawy do uogólnienia prawa krążenia dla *B*, daje – z jednej strony tożsamościowe znikanie dywergencji rotacji – z drugiej, znikanie dywergencji sumy gęstości prądu i pochodnej pola elektrycznego:

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{div}\vec{D} = \mathrm{div}(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E})$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E})$$

Powyższe argumenty to nie jest dowód! (Jak wykluczyć, na przykład, obecność po prawej stronie rotacji dowolnego wektora zbudowanego z wyższych pochodnych czasowych, albo nieliniowo z dowolnych potęg pól, w tym co najmniej jednej pochodnej po czasie?)

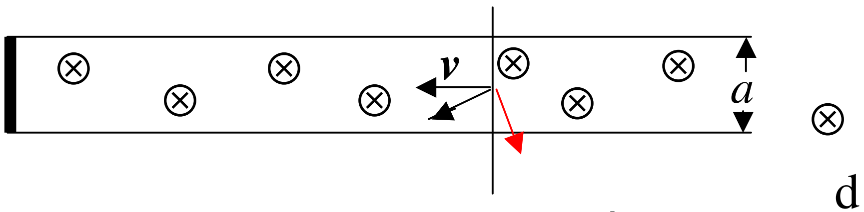
Zasada brzytwy Occama: dodawać tylko to, co absolutnie niezbędne.

Historycznie, a także w większości podręczników, wpływ zmienności pola w czasie na inne pola, został najpierw zbadany dla przypadku zmiennego pola magnetycznego.

Jest to szeroko dyskutowane na wszystkich szczeblach nauczania zjawisko indukcji elektromagnetycznej związane z nazwiskiem Michała Faradaya.

Pojawienie się siły elektromotorycznej indukcji (czyli całki po obwodzie z siły Lorentza) dla obwodów (w całości lub części) poruszających się w polu *B* jest zupełnie naturalne.

Szkolny przykład z prętem sunącym na szynach:



$$\boldsymbol{F}_L/\boldsymbol{e} = \left(\boldsymbol{v} + \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}}{\mathrm{d}\,t}\right) \times \boldsymbol{B}$$

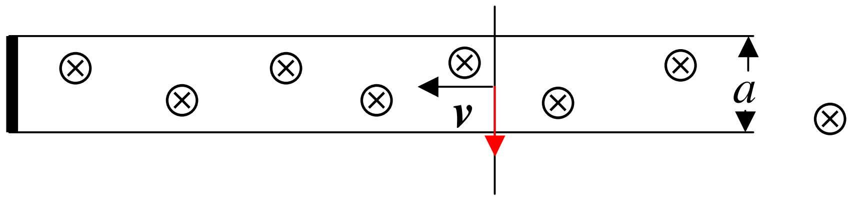
Siłą Lorentza ma dwie składowe: wzdłuż pręta i prostopadłą, hamującą ruch.

Praca przeciw sile $\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$ na drodze $\vec{v}\,dt$ wynosi

$$-\left(\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\,dt = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

I wygląda jak praca siły Lorentza, związana z prędkością pręta ***v*****,** na przesunięciu **wzdłuż** przewodnika.

To wygodna równoważność. Pozory są jakby sprzeczne z faktem, że siła Lorentza nie wykonuje pracy. Ale to nie siła Lorentza **naprawdę** pracuje, a czynnik zewnętrzny zmuszający pręt do ruchu.



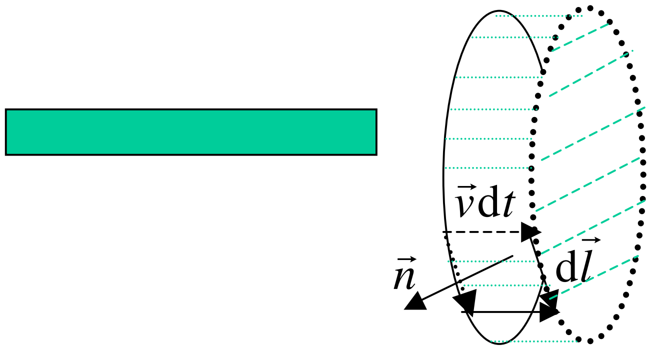
$$\mathrm{E} = avB = \dot{S}\,B$$

Kontur zorientowany zgodnie z prądem na rysunku ma strumień dodatni. Strumień ten maleje, więc:

$$\mathrm{E} = -\dot{\Phi}$$

Przykład powyższy wystarcza do ustalenia współczynnika, do zilustrowania pojęcia siły elektromotorycznej, oporu wewnętrznego, roli pola elektrycznego i różnicy potencjałów.

Dla uzyskania uogólnienia jest to przykład zbyt prosty.



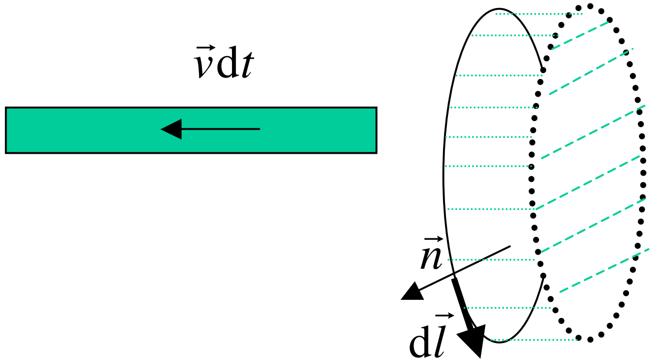
$$\mathcal{E} = \oint \vec{F}_L / e\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\oint \vec{B}\cdot(\vec{v}\times \mathrm{d}\vec{l})$$

$$\vec{v}\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\vec{l} = -\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Strumień w chwili późniejszej jest mniejszy: $\mathrm{d}\Phi = -\oint \vec{B}\,\vec{n}\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}t\oint \vec{B}\cdot(\vec{v}\times \mathrm{d}\vec{l}) = -\mathcal{E}\,\mathrm{d}t$

$$\mathcal{E}_v = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Ciekawa możliwość zastosowania zasady względności.



W układzie obwodu, to źródło pola się oddala, a pole magnetyczne słabnie. Jego strumień maleje w tym samym tempie, ale czy pojawia się SEM???

Faraday, już na samym początku odkrył, że TAK.

SEM to już nie praca przeciw składowej siły Lorentza - to musi być praca pola elektrycznego.

$$\mathcal{E}_{\dot{\vec{B}}} = \oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \iint \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{d}S$$

Zasada względności wymaga by te dwie SEM były równe!

$$\mathcal{E}_{\dot{\vec{B}}} = \iint \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{d}S = \mathcal{E}_v = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \vec{n}\vec{B}\,\mathrm{d}S$$

Tak wcześniej ustalił Faraday. Przez 80 lat wyglądało to na przypadek. Einstein od tej równości zaczął swoje argumenty za stosowalnością zasady względności ruchu do zjawisk elektromagnetycznych.

$$\iint \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{d}\,S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\iint \vec{n}\vec{B}\,\mathrm{d}\,S \quad = -\iint \vec{n}\dot{\vec{B}}\,\mathrm{d}\,S$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0\dot{\vec{E}}) \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

To jest komplet równań elektrodynamiki w próżni.

A to równania elektrodynamiki w materii:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

„Równania próżniowe” są prawdziwe też w materii, ale wtedy gęstości i prądy muszą być kompletne, z uwzględnieniem szybko zmiennych prądów i ładunków atomowych.

„Równania w materii” zawierają pola uśrednione, a gęstości prądu i ładunku dotyczą tylko ładunków makroskopowych. Ich niesprzeczność wewnętrzna jest widoczna, ale uzyskanie tych równań dla pól zmiennych wymaga więcej pracy niż to nas kosztowało dla pól statycznych. Wyniki są też mniej uniwersalne. Przy dużych częstościach łatwo dochodzi do naruszenia możliwości sensownego uśrednienia. Nie będziemy badać tego problemu.

Równania w całkowicie pustej przestrzeni (tj. bez ρ i bez $\vec{j}$)

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

są jednorodne, a mimo to (w przeciwieństwie do równań statycznych) mogą mieć rozwiązania.

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \mathrm{rot}\dot{\vec{E}} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \mathrm{rot}\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(-\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\vec{B} \right)$$

$$(\mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta)\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}\vec{B}$$

$$\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} - \Delta \right)\vec{B} = 0$$

To słynne równanie falowe. Identyczne obowiązuje dla składowych *E*.

Fala płaska w kierunku *x*:

$$\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(t, x) = 0$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(t,x)=0$$

$$\xi = ct + x \qquad\qquad x = (\xi - \eta)/2$$

$$\eta = ct - x \qquad\qquad t = (\xi + \eta)/2c$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}f(t(\xi,\eta),x(\xi,\eta)) = \left(\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}\right)f(t,x) =$$

$$\left(\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)f(t,x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(t,x)=0$$

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}f(t(\xi,\eta),x(\xi,\eta)) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\eta} = F'(\eta) \Rightarrow f = F(\eta)+G(\xi)$$

Ogólne rozwiązanie dwuwymiarowego równania d'Alemberta.Pole uwolnione od źródeł.

$$f = F(ct - x) + G(ct + x)$$

Nowa realność. Nie tylko sposób zapisu siły. Realność ta opisana jest równaniami dynamicznymi. Ma (zapewne) energię i pęd. Musimy to zbadać.