Wykład 12

W pierwszym przybliżeniu, planety krążą wokół Słońca po okręgach. Istnienie przyspieszenia dośrodkowego w ruchu po okręgu, przyspieszenia skierowanego do Słońca wskazuje, wręcz dosłownie, iż to oddziaływanie Słońca z planetą dostarcza planecie coraz to nowy pęd, który dodając się do starego, powoduje ciągłą zmianę prędkości, owo obracanie się. Siła wydaje się działać na odległość – po stuleciach zrozumiano lepiej sens tego, co się dzieje, ale ograniczając się do próby opisu tylko tego, co widzimy, a rezygnując z bardziej szczegółowego wnikania w charakter rozciągającego się wokół Słońca pola, chcielibyśmy wiedzieć, jak owo oddziaływanie zależy od odległości.

Nie znając, nie rozumiejąc mechanizmu oddziaływania, (przypomnijmy sobie z rozrzewnieniem, jak prosto udało się wydedukować siłę na tłok uderzany **niewidocznymi przecież gołym okiem** atomami gazu) ilościowy opis oddziaływania można uzyskać jedynie z obserwacji zachowania ciał, powiedzmy planet.

A planety, w swym zachowaniu, w swym ruchu, testują różne odległości! Po pierwsze są różne planety o bardzo różnych (średnich) odległościach od Słońca, a po wtóre, jak wiemy – i jak wiedział Newton – każda z planet ma orbitę trochę różną od okręgu, więc i jedna planeta raz jest bliżej, raz dalej i reguła, według której siła zależy od odległości, ma wpływ na kształt orbity, gdy różni się ona od okręgu.

Na ostatnim wykładzie zauważyliśmy, iż rzuty na kierunki osi współrzędnych cząstki poruszającej się równomiernie po okręgu, wykonują ruch harmoniczny, a rzuty przyspieszenia są (ze znakiem minus) wprost proporcjonalne do wychylenia.

Zatem jednostajny ruch po okręgu jest **możliwym**, choć oczywiście nie jedynym dopuszczalnym ruchem cząstki w polu sił:

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = (-kx, -ky) = -k\vec{r}$$

Z drugiej strony, ogólne rozwiązanie równań ruchu dla tego przypadku:

$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$ (czyli $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}$)

znamy z **doskonałą kompletnością:**

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_{x0}}{\omega}\sin\omega t,$$

$$y = y_0 \cos\omega t + \frac{v_{y0}}{\omega}\sin\omega t,$$

Jeśli wybierzemy warunki początkowe: $\begin{array}{ll} x_0 = R & , v_{x0} = 0 \\ y_0 = 0 & , \dfrac{v_{y0}}{\omega} = R \end{array}$,

to punkt pięknie biegnie po okręgu:

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\omega t,$$

ale jeśli nie utrafimy z prędkością początkową (prostopadłą do początkowego położenia) dokładnie w wartość ωR, to i okręgu nie będzie! Niech, na przykład prędkość wyniesie $\omega R' < \omega R$. Rozwiązaniem będzie:

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R'\sin\omega t,$$

To już nie jest równanie okręgu, a figury powstającej z okręgu, przez jego równomierne ściśnięcie w kierunku *y*. To elipsa o środku w środku oscylatora, czyli w centrum siły.

Wszyscy słyszeliście o pierwszym prawie Keplera, który analizując tabele dokładnych pomiarów położeń Marsa wykonanych przez Tychona de Brache dopatrzył się, iż jego orbita to właśnie jest elipsa!

Ale uwaga! Elipsa Marsa (i innych planet) jest położona względem Słońca zupełnie inaczej niż elipsa oscylatora. Słońce nie leży w środku elipsy, a na dużej półosi w pewnej od środka odległości, w punkcie zwanym ogniskiem (jednym z dwóch) elipsy. Dlaczego, i co to za punkt, dowiecie się dokładnie dzisiaj.

Kepler, oprócz dopatrzenia się kształtu elipsy i lokalizacji Słońca w ognisku, odkrył jeszcze dwie inne prawidłowości. Drugie prawo mówi o zakreślaniu przez promień planety segmentów owej elipsy o równych polach w równych czasach, a trzecie o proporcjonalności kwadratów okresów obiegu do trzecich potęg dużej półosi.

Droga rozumowania Newtona zbliżona była do następującej. Jeśli jest prawidłowością, iż wszystkie orbity są możliwe, także kołowe (wszak koło, to graniczny przypadek elipsy), a to że planety z nich akurat nie korzystają to przypadek (tak jak przypadkowa z punktu widzenia praw ruchu jest sama liczba planet, na przykład, czy ich rozmiary), to i dla tych kołowych stosować się powinno trzecie prawo Keplera. A dla kołowych orbit sprawa jest prosta!

Przyspieszenie na orbicie *R* musi wynosić:

$$a(R) = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

Trzecie prawo Keplera mówi, że: $T^2 = KR^3$ (Stałą oznaczam K na cześć Keplera:-), ze stałą niezależną ani od promienia, ani od masy planety. Jest to wspólna wartość dla wszystkich planet układu Słonecznego, przez to Słońce dyrygowanych.

Nic prostszego niż wstawić T^2 z prawa Keplera do ogólnego wzoru na przyspieszenie wyrażone przez R i T:

$$a(R) = \frac{4\pi^2}{KR^3} R = \frac{4\pi^2 / K}{R^2}$$

No i mamy **prawo odwrotnych kwadratów!**

Grawitacja określa od razu **przyspieszenia**, nie są potrzebne masy planet! Dopiero Einstein stworzył teorię grawitacji, w której identyczność przyspieszeń (małych) ciał w polu grawitacyjnym jest oczywistością. Newton chciał operować siłą. Proszę bardzo. Uzyskane powyżej równanie można przecież obustronnie pomnożyć przez masę planety. Nic to, iż i tak się skraca, więc jest niepotrzebna:

$$ma = F = \frac{(4\pi^2 / K)m}{R^2}$$

Taki zapis odegrał jednak pozytywną rolę. Bo teraz pora zastanowić się nad stałą K. Jest ona stała dla wszystkich planet, bo wszystkie one oddziałują z tym samym Słońcem. A co by było, gdyby zamienić Słonce czymś innym? Jak zmieniłaby się stała K? Jak zależy ona od masy przyciągającego centrum?

Newton podkreślał symetrię oddziaływania (nawet, jeśli jest duża asymetria wielkości oddziałujących ciał. Tutaj Słońce jest tak ogromne, że jego ruch wywołany działaniem planet, jest do zaniedbania, przynajmniej w pierwszym przybliżeniu). Oddziaływanie jest **wzajemne**. Skoro jest ono proporcjonalne do masy planety, to powinno być i proporcjonalne do masy Słońca. Powinna więc istnieć **nowa** stała proporcjonalności, pozwalająca ten fakt uwzględnić:

$$4\pi^2 / K = GM_\Theta$$

Dla siły oddziaływania napisał Newton:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Wprawdzie Słońce jest jedno, ale możliwych centrów grawitacji, już Newton dostrzegł więcej. Dla Księżyca, takim centrum jest Ziemia! Ale jest Ziemia źródłem grawitacji także dla jabłka! Zatem, przyspieszenie spadania na powierzchni Ziemi:

$$g = \frac{GM_Z}{R_Z^{\ 2}}$$

Przyspieszenie ziemskie i promień Ziemi znane były od dość dawna przed Newtonem. Tym samym GM_Z znane było Newtonowi już na etapie obmyślania całej tej teorii. Z prawa Keplera dla planet, bezpośrednio wynika też wartość GM_{Θ}. Mógł, więc, Newton wyznaczyć ile razy masa Słońca jest większa od masy Ziemi. Zaiste, zważenie Słońca to zajęcie dla giganta!

Taki wynik, choć napawający dumą, był i tak nie do sprawdzenia w owym czasie. (W dzisiejszych czasach, znajomość temperatury, promienia, składu chemicznego na powierzchni, znajomość reakcji jądrowych generujących ciepło i znajomość praw jego transportu, pozwala odtworzyć profil gęstości materii Słońca i wyznaczyć jego całkowitą masę w sposób niezależny. Tak zresztą wyznacza się masy gwiazd, dla których nie obserwujemy towarzyszących im planet). Ale inny wynik był możliwy do natychmiastowego sprawdzenia.

Dla Księżyca mamy bowiem:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} R_{\mathrm{Z-K}} = \frac{GM_Z}{R_{\mathrm{Z-K}}^{\ 2}} = \frac{gR_Z^{\ 2}}{R_{\mathrm{Z-K}}^{\ 2}}$$

Tu wszystkie wielkości są znane! Albo się ten wzór zgadza, albo nie. Podobno Newton tak był wzruszony, że prosił przyjaciela o dokończenie działań. Zamiast o sprawdzaniu wzoru, można powiedzieć, że wkładając odległość Księżyca (znaną z triangulacji), Newton był w stanie powiedzieć **ile czasu musi trwać miesiąc**. To robiło wrażenie!.

Ale to tylko początek pasma sukcesów teorii Newtona.

Jeśli rzeczywiście prawo Newtona jest akuratne, to powinny z niego wynikać nie tylko takie proste relacje dla orbit (w przybliżeniu) kołowych, ale wszelkie subtelności orbit planet. Czy rzeczywiście, gdy ciału w polu grawitacyjnym, nadać, w położeniu r prędkość prostopadłą do promienia, ale nieco inną niż ta właściwa dla orbity kołowej ($v^2 / r = GM / r^2 \Rightarrow v = \sqrt{GM / r}$), to orbita będzie eliptyczna? Czy jej ognisko wypadnie w centrum siły, jak to odkrył Kepler?

To jest dopiero wyzwanie!

No, a dalej. Czy inne orbity niż eliptyczne są możliwe? Czy można zaobserwowawszy nagle widoczną kometę przepowiedzieć jej dalszy bieg na niebie? Można. I to się robi.

Domyślacie się, że zadanie, jakie przed nami stoi, to rozwiązać ogólne zadanie ruchu w polu siły Newtona. Wyznaczyć możliwe orbity i ustalić jak one zależą od warunków początkowych.

Zadanie jest trudniejsze niż dla siły centralnej oscylatora izotropowego, ale skoro potrafił to zrobić Newton, ponad 300 lat temu, to chyba musi to też umieć dzisiejszy student fizyki.

W rozważaniach przydatny jest bardzo iloczyn wektorowy, o którym była mowa już w poniedziałek. W szczególności chcemy poznać współrzędne iloczynu wektorowego wyrażone przez współrzędne mnożonych wektorów. Stwierdziliśmy, że z definicji długości iloczynu wektorowego zawierającej **sinus**, wynika, iż $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}_\perp=\vec{a}_\perp\times\vec{b}$. Ponieważ rzut sumy jest sumą rzutów, to mamy:

$$\vec{a}\times(\vec{b}_1+\vec{b}_2)=\vec{a}\times(\vec{b}_1+\vec{b}_2)_\perp=\vec{a}\times(\vec{b}_{1\perp}+\vec{b}_{2\perp}).$$

Mnożenie wektorowe wektora prostopadłego sprowadza się (oprócz pomnożenia go przez wartość a) do obrotu o 90°. Jest obojętne, czy wektory $\vec{b}_{1\perp}$ i $\vec{b}_{2\perp}$ najpierw dodamy i potem obrócimy w ich płaszczyźnie, czy najpierw każdy obrócimy, a potem dodamy. Dlatego możemy dalej przekształcić:

$$\vec{a}\times(\vec{b}_1+\vec{b}_2)=\vec{a}\times(\vec{b}_{1\perp}+\vec{b}_{2\perp})=\vec{a}\times\vec{b}_{1\perp}+\vec{a}\times\vec{b}_{2\perp}=\vec{a}\times\vec{b}_1+\vec{a}\times\vec{b}_2$$

Z zupełnie identycznych powodów:

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b}$$

Własności te pozwalają z iloczynem wektorowym rozwijać nawiasy, tak jakby to były liczby. Obowiązuje również wzór dla przyrostów:

$$(\vec{a}+\mathrm{d}\vec{a})\times(\vec{b}+\mathrm{d}\vec{b})-\vec{a}\times\vec{b}\cong\vec{a}\mathrm{d}\vec{b}+\mathrm{d}\vec{a}\times\vec{b},$$

powodujący, że przy różniczkowaniu iloczynu wektorowego pojawiają się takie same dwa człony, jak przy różniczkowaniu iloczynu zwykłych funkcji.

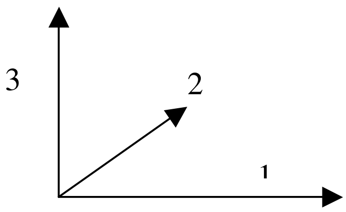
Gdy mówimy o współrzędnych, mówimy też o wersorach, a o współrzędnych wektora możemy myśleć jako o współczynnikach rozkładu wektora na wersory osi:

$$\vec{a}=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z$$
$$\vec{b}=b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z$$

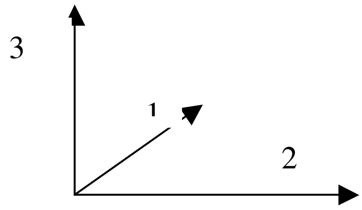
Nim wymnożymy takie dwa nawiasy, rozstrzygnijmy co wiemy o iloczynach wektorowych wersorów. Podstawowe pytanie jest czy $\vec{e}_x\times\vec{e}_y$ to jest $\vec{e}_z$ czy $-\vec{e}_z$?

Tu ogniskuje się sprawa nieco podejrzanego rodowodu iloczynu wektorowego.

Jeśli upieramy się by iloczyn wektorowy określany był regułą prawej ręki, to znak plus wystąpi wtedy, gdy sam układ współrzędnych jest **prawoskrętny**, a minus, gdy jest lewoskrętny. Jeśli zaś postanowimy, by zawsze było $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = +\vec{e}_z$, wtedy zwrot iloczynu, przy ustalonych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ będzie zależny od tego, czy nam się ponazywało osi *x,y,z* w taki:



czy taki:



s

sposób.

Umawiamy się korzystać z prawoskrętnych układów współrzędnych, a iloczyn wektorowy definiować tak, by $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = +\vec{e}_z$. Jest to równoważne regule prawej ręki dla iloczynu wektorowego.

Dla pozostałych wersorów jest

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = +\vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = +\vec{e}_x,$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = +\vec{e}_y,$$

i ze znakiem minus dla odwrotnych kolejności.

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x,$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y,$$

Teraz „zdobycie” wartości współrzędnych dowolnego iloczynu wektorowego, w trzech wymiarach jest proste:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)\times(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) = \\
&= a_x b_x \vec{e}_x \times \vec{e}_x + a_x b_y \vec{e}_x \times \vec{e}_y + a_x b_z \vec{e}_x \times \vec{e}_z + \\
&+ a_y b_x \vec{e}_x \times \vec{e}_x + a_y b_y \vec{e}_x \times \vec{e}_y + a_y b_z \vec{e}_x \times \vec{e}_z + \\
&+ a_z b_x \vec{e}_x \times \vec{e}_x + a_z b_y \vec{e}_x \times \vec{e}_y + a_z b_z \vec{e}_x \times \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Te 9 wyrazów wygląda trochę deprymująco, ale 3 wyrazy (na przekątnej) od razu odpadają (wektor sam z sobą tworzy kąt 0, którego sinus jest 0), zaś 6 iloczynów różnych wersorów sprowadza się tylko znów do 3 wersorów (połowa z plusem, połowa z minusem):

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_y)\vec{e}_z$$

Wracając do naszego wektorowego równania ruchu w polu sił skierowanych do centrum:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

możemy pomnożyć je stronami przez wektor położenia:

$$\vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Ale uwaga! Wektor pędu i prędkości są równoległe, więc

$$\dot{\vec{r}}\times\vec{p} = 0$$

Po dodaniu stronami, po lewej stronie utworzy się pochodna iloczynu wektorowego:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{r}\times\vec{F}$$

Na scenę wkroczyła nowa **ważna** wielkość. Wielkość rangi tej samej, co energia i pęd. Jest to **moment pędu:**

$$\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p}$$

Jak dotąd siła F jest zupełnie ogólna. Iloczyn wektorowy wektora wodzącego i siły, to znany z elementarnej fizyki **moment siły**. Teraz jest to wektor (taki „pseudo”), ale o wartości tej, o której mówią w szkole: „siła razy ramię siły”. A to ramię to rzut na kierunek prostopadły do siły, wektora wodzącego punktu, na który działa siła, bo tak to jest z iloczynem wektorowym.

Z równań ruchu wynika, więc natychmiast, stwierdzenie, że szybkość zmian momentu pędu (na razie pojedynczego ciała) jest równa momentowi siły działającej na to ciało. Gdy siła jest centralna i znika ramię siły, znika też moment siły, a moment pędu **pozostaje stały w czasie ruchu**.

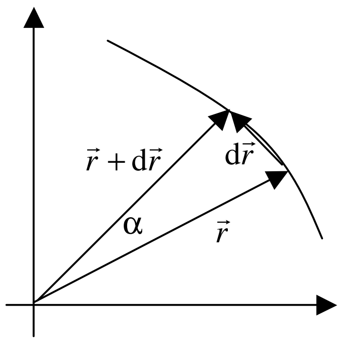
Wykrycie w problemie (każdym problemie, w którym interesuje nas ewolucja systemu fizycznego) wielkości zbudowanej z ewoluujących wielkości, której wartość, mimo to, się nie zmienia, **zawsze jest cenne**. Znajomość takiej wielkości znacznie posuwa do przodu problem ostatecznego wyznaczenia ewolucji, a często, gdy wszystkie szczegóły ewolucji nie są dla nas istotne, pozwala na odpowiedź dotyczącą stanu końcowego układu, bez konieczności śledzenia sytuacji krok po kroku.

Wyciągnijmy wnioski, jakie prawo zachowania momentu pędu implikuje dla ruchu w każdym (nie koniecznie niutonowskim) polu sił.

Po pierwsze, iloczyn wektorowy jest prostopadły do (każdego) z czynników. Zatem i $\vec{r}$ i $\vec{p}$ są **prostopadłe do stałego** $\vec{J}$, czyli, leżą w **stałej** płaszczyźnie wyznaczonej przez to stałe $\vec{J}$. Ruch w polu centralnym jest ruchem płaskim. Płaszczyzną ruchu jest płaszczyzna wyznaczona przez początkowe wektory położenia i pędu. Dokładnie tak samo było dla oscylatora izotropowego.

Po drugie, w płaszczyźnie ruchu (wybieranej jako *x,y*), wielkość proporcjonalna do momentu pędu: $\left(2^{-1}\vec{r}\times\vec{v}\right)_z$, **a więc też stała w czasie ruchu**, ma ciekawą interpretację kinematyczną. Obliczmy iloczyn tej wielkości i przyrostu czasu d*t*:

$$\left(2^{-1}\vec{r}\times\vec{v}\right)_z \mathrm{d}t = \left(2^{-1}\vec{r}\times(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r})\right)_z = (r_1 r_2 \sin\alpha)/2 = \mathrm{d}S$$



Stosunek $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ nazywa się **prędkością polową.** Jest ona, jak widzimy, wielkością stałą. Jest to słuszne dla dowolnego pola centralnego. W astronomii stanowi to treść **drugiego prawa Keplera**.

Wyrażając prędkość przez pęd wyrazimy prędkość polową przez moment pędu:

$$\dot{S} = \left(2^{-1}\vec{r}\times\vec{v}\right)_z = \left(2^{-1}\vec{r}\times\vec{p}/m\right)_z = \frac{J}{2m}$$

Zadanie Wiązka protonów przyspieszona napięciem *U* pada z daleka na metalową kulę o promieniu *R* z parametrem zderzenia *a*. Do jakiego napięcia *V* naładuje się ostatecznie kula?

Rozwiązanie. Osiadające na kuli protony, ładują ją dodatnio, co odchyla kolejne protony coraz bardziej od biegu prostoliniowego, aż do sytuacji „muskania” kuli. O ile moment pędu początkowy był *ap*, to ta sama wartość utrzymywana jest w chwili muskania $ap=Rp_R$. Prawo zachowania energii daje:

$$eU = p^2/2m = eV + p_R^{\,2}/2m = eV + (ap/R)^2/2m = eV + eUa^2/R^2,$$ czyli

$$V = U(1-a^2/R^2)$$

Prawo zachowania momentu pędu, czyli stałość prędkości polowej, zachodzi dla każdego pola centralnego. Dalszy postęp w wyznaczaniu orbity możliwy jest już dla konkretnej siły. Nas interesuje równanie:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\vec{n}, \text{ gdzie } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Piękne rozwiązanie problemu, 100 lat po Newtonie podał Laplace. Jest ono ściśle związane z kwadratową zależnością siły od odległości, i gdybyśmy chcieli rozwiązać zadanie z inną siłą, metoda byłaby nieskuteczna. Istnieje też inny, bardziej „rzemieślniczy” sposób zaatakowania problemu, skuteczny dla dowolnej zależności siły od odległości do centrum, ale zostawmy go na mechanikę teoretyczną za rok. Powiem tylko, że metoda polega na wprowadzeniu współrzędnych biegunowych, prawa zachowania energii, i ostatecznie policzeniu pewnej całki.

Wektor $\vec{r} = r\vec{n}$, a jego pochodna, czyli prędkość może być zapisana jako $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{n} + r\dot{\vec{n}}$. Jest to naturalny rozkład na składową radialną i składową „transwersalną”. Wstawiając to do definicji momentu pędu mamy:

$$\vec{J} = m\vec{r}\times\vec{v} = mr\vec{n}\times(\cancel{\dot{r}\vec{n}} + r\dot{\vec{n}}) = mr^2\vec{n}\times\dot{\vec{n}}$$

Moment pędu wnosi tylko składowa transwersalna (jak to przy iloczynie wektorowym bywa)

Obliczmy wreszcie pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\times\vec{J}) = \dot{\vec{v}}\times\vec{J} = -\frac{GM}{r^2}\vec{n}\times(mr^2\vec{n}\times\dot{\vec{n}}) = -GMm\cdot\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{n}})$$

Wektory $\vec{n}$ i $\dot{\vec{n}}$ oraz $\vec{n}\times\dot{\vec{n}}$ są wzajemnie prostopadłe! W dodatku $\vec{n}$ jest wektorem jednostkowym. Ich mnożenie to czysta przyjemność. Wykonujemy to w pamięci. Mnożenie przez $\vec{n}$ obraca $\dot{\vec{n}}$ o $90°$ bez zmiany wartości, a powtórne mnożenie obraca jeszcze raz o $90°$, co prowadzi ostatecznie do zmiany znaku. (prawie jak przy podwójnym mnożeniu przez prędkość kątową $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2\vec{r}$). Wynikiem tego podwójnego mnożenia jest:

$$\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{n}}) = -\dot{\vec{n}}$$

Zatem

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\times\vec{J}) = GMm\cdot\dot{\vec{n}}$, a po przeniesieniu na jedną stronę:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}\times\vec{J} - GMm\cdot\vec{n}) = 0$, czyli:

$$\vec{v}\times\vec{J} - GMm\cdot\vec{n} = \vec{C}$$

Oba wyrazy, składające się na stałą wielkość $\vec{C}$, są prostopadłe do $\vec{J}$, czyli leżą w płaszczyźnie ruchu, sama wielkość $\vec{C}$ też leży w płaszczyźnie ruchu.

Ogólne rozwiązanie równania Newtona w 3 wymiarach powinno charakteryzować się 6 stałymi dowolnymi, pozwalającymi spełnić dowolny warunek początkowy. Prawie tych 6 stałych dowolnych już jest. Prawie, bo wektor $\vec{C}$ musi leżeć w płaszczyźnie ruchu, więc tylko dwie jego składowe są dowolne. Szóstą stałą dowolną może być dowolny wybór początku liczenia czasu.

Szczególnie interesujące jest dostrzec kształt orbity. Jest on zawarty w dwóch równaniach wektorowych:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{J} / m ,$$

$$\vec{v} \times \vec{J} - GMm \cdot \vec{n} = \vec{C}$$

Trzeba wyeliminować prędkość, wtedy zostanie równanie zawierające samo położenie. Nie trzeba już będzie rozwiązywać równań różniczkowych! Robi się to tak:

$$\vec{J}^2 = \vec{J} \cdot (\vec{r} \times m\vec{v}) .$$

W tym miejscu potrzebna jest nam dość prosta własność **iloczynu mieszanego** 3 wektorów.

Wiemy, że pole trójkąta rozpiętego na dwóch wektorach jest równe połowie wartości iloczynu wektorowego, a pole równoległoboku to akurat cały iloczyn wektorowy. Mnożenie **skalarne** tego wektora przez trzeci wektor, daje dokładnie objętość **równoległościanu rozpiętego na tych 3 wektorach.** Ale objętość równoległościanu nie zależy od tego, którą ścianę przyjmiemy za podstawę. Stąd:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\cdots$$

Korzystając z tej własności mamy:

$$J^2 = \vec{J} \cdot (\vec{r} \times m\vec{v}) = m\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{J}) = m\vec{r} \cdot (GMm\vec{r} / r + \vec{C}) =$$
$$= GMm^2 r + m\vec{r} \cdot \vec{C} = mr(GMm + C \cos\varphi)$$

lub inaczej:

$$r = \frac{J^2 / m}{GMm + C \cos\varphi} = \frac{J^2 / GMm^2}{1 + (C / GMm) \cos\varphi}$$

Jest to równanie we współrzędnych biegunowych. Kąt φ mierzony jest od kierunku wektora $\vec{C}$, a dla $\varphi=0$ mianownik jest najmniejszy, zaś promień *r* najmniejszy. Wektor $\vec{C}$ jest więc skierowany od centrum do perihelium. Od tegoż perihelium mierzony jest kąt w ostatnim wzorze.

Tradycyjnie współczynnik przy cosinusie zwie się mimośrodem i oznacza literą ε, zaś licznik oznacza się literą *p*. Równanie orbity:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

Orbita jest krzywą zamkniętą. To raczej wyjątkowy wynik. Można dowieść, że tylko dla dwóch potencjałów centralnych : $F\sim r$ oraz $F\sim r^{-2}$, mających zresztą największe znaczenie w fizyce, orbita rzeczywiście się zamyka. W polach sił o jakimkolwiek odstępstwie od powyższych zależności, orbita (o ile ruch pozostaje ograniczony) mieści się w pierścieniu o dwóch promieniach, przy czym wartość r periodycznie (choć nie harmonicznie) zmienia się od minimum, do maksimum, po czym w odwrotnej kolejności od maksimum do minimum. Jednocześnie rośnie (choć nierównomiernie, ale monotonicznie) kąt azymutalny. Orbita jest zamknięta, gdy okres ruchu radialnego jest współmierny z czasem potrzebnym na zmianę kąta φ o 360°. Dla sił Newtona (i Coulomba) okresy te są równe, dla oscylatora, pełny obieg zajmuje dwa razy dłużej, niż przejście od „perihelium" do „aphelium" i z powrotem, do „perihelium". Dla innych sił, współmierność może zajść dla konkretnego warunku początkowego, ale po dowolnie małym zaburzeniu, współmierność się psuje.

Co to za krzywa, dla której $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$?

Odpowiedź nie jest trudna.

Przekształcić możemy tak:

$$r + \varepsilon r\cos\varphi = p$$

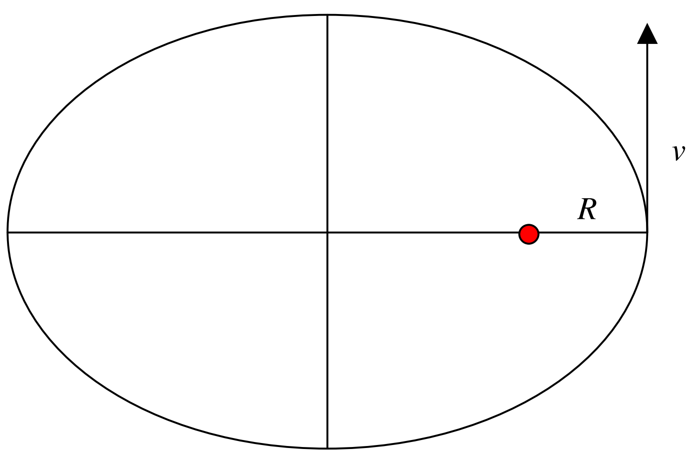
$$r = p - \varepsilon x$$

$$x^2 + y^2 = (p-\varepsilon x)^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$$

$$(1-\varepsilon^2)(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2})^2 + y^2 = p^2 + \frac{p^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

Dla $\varepsilon = 0$ jest to niewątpliwie równanie okręgu. Przypadek ten będzie miał miejsce, gdy, na mocy warunków początkowych, C=0.

Aby zbytnio nie komplikować, rozpatrzmy sytuację jak na rysunku:



$$\vec{v} \times \vec{J} - GMm \cdot \vec{n} = \vec{C}$$

$$J = mvR$$
$$C = vmvR - GMm$$
$$\varepsilon = C / GMm = \frac{v^2}{GM/R} - 1$$

Warunek C=0, oznacza

$$\frac{v^2}{GM/R} = 1, \text{ czyli } \frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2},$$

co jest elementarnym warunkiem równości siły grawitacji i siły dośrodkowej.

Gdy prędkość jest większa od $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, ale mniejsza od $v_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, sytuacja jest jak na rysunku. Mianownik jest stale dodatni, więc ciało nie oddala się do nieskończoności, a krzywa jest znaną już nam elipsą („spłaszczonym okręgiem").

Dla $v = v_{\mathrm{II}}$, czyli dla $\varepsilon = 1$, nie próbujemy uzupełnić wyrażenia do „pełnego kwadratu", bo to nie ma sensu, tylko wstawiamy $\varepsilon = 1$do równania, otrzymując:

$$x^2 + y^2 = (p - x)^2 = p^2 - 2px + x^2$$
$$y^2 + 2px = p^2$$

co jest równaniem paraboli.

Dla prędkości jeszcze większych, równanie wygodnie jest przepisać w postaci:

$$(x - \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1})^2 - \frac{y^2}{(\varepsilon^2 - 1)} = \frac{p^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2},$$

Co jest równaniem hiperboli.

Gdy prędkość jest mniejsza od v_{I}, parametr ε staje się ujemny. Krzywa nadal jest elipsą, ale teraz punkt startowy, przy naszym założeniu, nie jest perihelium, a aphelium. Przenosząc początek liczenia kąta o 180°, dostalibyśmy znów równanie z mimośrodem dodatnim, mniejszym od jedynki.

Pierwsze prawo Keplera jest już prawie dowiedzione – elipsa jako konsekwencja prawa odwrotnych kwadratów. Ale co z tym ogniskiem? No cóż! Jedna z definicji ogniska mówi, że to taki punkt na dużej osi elipsy, że odległość od każdego punktu na elipsie do tego punktu, jest w stałej proporcji do odległości od pewnej prostej, zwanej kierownicą („Elipsa jest miejscem geometrycznym punktów takich, że stosunek odległości do stałego punktu zwanego ogniskiem i odległości do ustalonej prostej, zwanej kierownicą, jest stały").

Jeśli kierownicę ustawimy równolegle do osi y w odległości p/ε od początku, to odległość do kierownicy wyniesie $p/\varepsilon - x$, a odległość do początku układu r. Stały stosunek ε oznacza, iż $r/(p/\varepsilon - x) = \varepsilon$, czyli $r = p - \varepsilon x = p - \varepsilon r \cos\varphi$, czyli właśnie to sunek ε oznacza, iż $r/(p/\varepsilon - x) = \varepsilon$, czyli $r = p - \varepsilon x = p - \varepsilon r\cos\varphi$, czyli właśnie to co mamy.

Półosie naszej elipsy wynoszą:

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Końce dłuższej osi leżą w punktach $x_{\mathrm{P}} = r_{\mathrm{P}} = p/(1+\varepsilon)$, $x_{\mathrm{A}} = -r_{\mathrm{A}} = -p/(1-\varepsilon)$. Środek ma współrzędną będącą średnia arytmetyczną, czyli

$$x_{\mathrm{S}} = \left(p/(1+\varepsilon) - p/(1-\varepsilon)\right)/2 = -\varepsilon\frac{p}{1-\varepsilon^2} = -\varepsilon a$$

Słowo mimośród kojarzy się z punktem **obok** środka okręgu.

Otóż warto zwrócić uwagę, jak wygląda sytuacja dla małych wartości ε. Np. Ziemia ma mimośród równy 0,0167. Mimośród Jowisza to 0,0484.

Wartość mimośrodu wyznacza wprost zmianę odległości planety w położeniach skrajnych. Raz odległość (od Słońca) wynosi $p/(1+\varepsilon)$ drugi raz $p/(1-\varepsilon)$. Różnica tych odległości to $2\varepsilon a$. Dla Ziemi to 3% średniej odległości, dla Jowisza 9%. Takie różnice dostrzegali już starożytni, posługującymi się prostymi, bezsoczewkowymi przyrządami.

A jak wygląda różnica odległości planety od środka elipsy? To różnica między a , a b. Ale $b = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,a \approx a - \frac{\varepsilon^2}{2}a$.

Zamiast $2\varepsilon a$ mamy teraz $\frac{\varepsilon^2}{2}a$. To **kolosalna** różnica. 3% można było dostrzec, ale $0{,}0167^2/2 \approx 0{,}00015$, czyli 0,015% **było poza zasięgiem.** Ta cholernie mało zdeformowana elipsa wygląda jak, niemal idealne **koło!!!!**

Dlatego **biedny i nieszczęśliwy Kopernik**, unieruchamiając Słońce, nie mógł umieścić środka (w „oczywisty" sposób kołowej) orbity Ziemi w Słońcu!!! Tym bardziej było to wyraźne dla Jowisza. Środek orbity Ziemi lokował Kopernik w odległości 2,7 promieni Słonecznych od jego środka, a środek orbity Jowisza w punkcie bliskim orbity Mercurego. To wyglądało na zupełny nonsens. Każda planeta miała środek swej „kołowej" orbity zupełnie gdzie indziej.

Okrąg ma tylko jeden wyróżniony punkt. Gdy jedynego wyróżnionego ciała Układu Słonecznego nie można tam umieścić, to głowa boli. Słońce było umieszczone **mimośrodowo**, obok środka domniemanego okręgu.

Już odkrycie przez Keplera, że orbity są elipsami, stanowi szalony postęp, o charakterze nie tylko estetycznym, a wręcz fundamentalnym. Elipsa ma i środek i ognisko (a nawet dwa). Nagle okazało się, że ogniska **wszystkich** planet są wspólne i wypadają idealnie w środku Słońca! To był prawdziwy przełom w pojmowaniu Nieba.

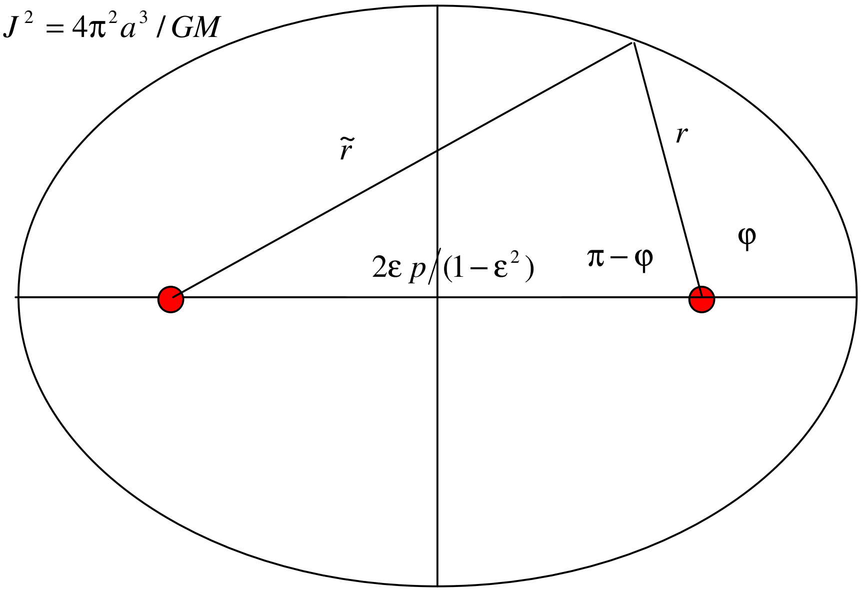
I na koniec trzecie prawo. Pole elipsy wynosi πab. Prędkość polowa związana jest z momentem pędu i wynosi $J/2m$. Zatem okres obiegu wynosi $T = 2\pi abm/J$. Podnosimy do kwadratu i korzystamy z tego, iż $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$

$$T^2 = 4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2) m^2 / J^2$$

Ale $a = \dfrac{p}{1-\varepsilon^2}$, czyli $a(1-\varepsilon^2) = p = J^2/GMm^2$,

czyli, $a(1-\varepsilon^2)m^2/J^2 = 1/GM$ więc:

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 a(1-\varepsilon^2)m^2/J^2 = 4\pi^2 a^3/GM$$



$$\tilde{r}^2 = r^2 + 4\varepsilon^2 p^2/(1-\varepsilon^2)^2 + 4r\varepsilon p/(1-\varepsilon^2)\cos\varphi =$$

$$= \frac{p^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + \frac{4\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{4p^2(\varepsilon\cos\varphi + 1 - 1)}{(1+\varepsilon\cos\varphi)(1-\varepsilon^2)} =$$

$$= \frac{p^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} - \frac{4p^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)(1-\varepsilon^2)} + \frac{4\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{4p^2}{1-\varepsilon^2}\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} =$$

$$= \left(\frac{2p}{1-\varepsilon^2} - \frac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)}\right)^2$$

Zatem **suma odległości do ognisk** $\tilde{r} + r = \dfrac{2p}{1-\varepsilon^2} - \dfrac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)} + \dfrac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)} = 2a$ jest rzeczywiście stała. Jeśli tę własność przyjąć za definiującą własność elipsy, to potwierdziliśmy jeszcze raz, że centrum siły jest ogniskiem.