Wykład 3

Dla wyznaczenia wartości stałej C **musimy** odwołać się do jakiegoś doswiadczenia, do jakiegoś realnego pomiaru. W pomiarze tym powinniśmy zmierzyć bezpośrednio wszystkie wielkości występujące w jakimkolwiek wzorze zawierającym tę nową stałą C.

Najprościej byłoby zmierzyć trzy boki trójkąta w czasoprzestrzeni: odległość x pomiędzy zegarami, odstęp czasu t mierzony na tych dwóch zegarach wyznaczający czas przelotu z prędkością *x/t* jakiegoś ciała (będącego zegarem) i upływ czasu na **tym** lecącym zegarze. Dzisiaj takie pomiary są możliwe i potwierdzaja one nieodmiennie, że $t \neq t'$ i to dokładnie według wzoru $t' = \sqrt{t^2 - Cx^2}$ z **pewną konkretną** wartością stałej C, o której za chwilę.

Historycznie najstarszym doświadczeniem, którego wynik jasno wskazuje (choć nie od razu taka interpretacja była mu nadana) iż stała $C \neq 0$ jest doświadczenie Fizeau, który zmierzył prędkość światła w wodzie (na przyrządach nieruchomych względem wody – w praktyce chodzi o przyrządy i wodę nieruchomą w laboratorium), a następnie prędkość światła w wodzie płynącej z pewną znaną prędkością względem laboratorium.

Można te trzy prędkości zobrazować następująco. Wyobraźmy sobie nieruchomy samolot, na nim działko strzelające pociskami, których prędkość mierzymy. Następnie samolot wraz z działkiem wprawiamy w ruch, strzelamy pociskami w kierunku ruchu samolotu i mierzymy jeszcze raz prędkość pocisków względem laboratorium.

Rozważania, któreśmy przeprowadzili każą spodziewać się, że ta nowa prędkość v wyrazi się przez prędkość „samolotu" (albo wody) V i prędkość względem samolotu (wody) v' wzorem:

$$v = \frac{V + v'}{1 + CVv'}$$

Oczekiwanie „naiwne”, zgodne z fizyką osiemnasto- i dziewiętnastowieczną (i kawałkiem wieku 17) to „zwykła” suma prędkości, tak jakby stała *C*=0. Jeśli wypadkowa prędkość, czyli prędkość w płynącej wodzie okaże się < od sumy *V*+*v’*, oznaczać to będzie iż *C*>0 i na odwrót.

Warto wspomnieć, iż Fizeau był pierwszym, który zmierzył bezpośrednio prędkość światła i w próżni i w wodzie (a także innych płynach) stwierdzając bezapelacyjnie wyższość (słuszność) teorii falowej Huyghensa nad teorią korpuskularną Newtona. Według tej pierwszej *v’*=*c/n*, według drugiej *c*n*, gdzie *n* jest współczynnikiem załamania, a *c* prędkością swiatła w próżni.

Nim podam wynik Fizeau dla wody w ruchu względem przyrządów pomiarowych, przekształcę wzór na ***spodziewaną*** prędkość uwzględniając, że występuje **szalona** dysproporcja między wartością prędkością światła w wodzie, wynoszącą: 300 000/(4/3)=225000km/s, a prędkością wody, wyrażaną w małym ułamku kilometra na sekundę.

$$v = \frac{V + v'}{1 + CVv'} = v' + \left(\frac{V + v'}{1 + CVv'} - v'\right) = v' + V\frac{1 - Cv'^2}{1 + CVv'} \approx v' + (1 - Cv'^2)V$$

W mianowniku poprawka do 1 jest mniejsza od poprawki w liczniku tyle razy ile prędkość wody jest mniejsza od prędkości światła w wodzie. Wstawiając współczynnik załamania, mamy spodziewany wynik w postaci:

$$v = c / n + (1 - Cc^2 / n^2)V$$

Wynik Fizeau to:

$$v = c / n + V(1 - 1 / n^2)$$

pokryje się z naszym wzorem teoretycznym, jeśli

$$Cc^2 = 1\text{, czyli } C = 1{,}1 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2 \qquad (3)$$

Wartość *C* jest, jak widzimy, bardzo mała. W opisie doświadczenia Fizeau jest ona mnożona przez kwadrat prędkości światła w wodzie, który to iloczyn osiąga wartość 9/16, czyli wcale nie mało! A więc pokazaliśmy, że dająca się wydedukować teoretycznie z samej zasady równouprawnienia układów odniesienia geometria, świetnie sobie radzi z objaśnieniem doświadczenia Fizeau, bez **żadnych** dodatkowych założeń.

Ostatecznie ważne wzory wyrażające geometryczne właściwości czasoprzestrzeni przyjmują postać:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$t = \frac{t' + CVx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$v = \frac{V + v'}{1 + Vv'/c^2}$$

Łatwo jest teraz sprawdzić, że złożenie prędkości c z dowolną prędkością V daje:

$$v = \frac{V + c}{1 + Vc/c^2} = c\frac{V/c + 1}{1 + V/c} = c$$

W przedstawionym ujęciu istnienie uniwersalnej prędkości jest wnioskiem płynącym z zastosowania zasady względności, a nie punktem wyjścia.

Omówmy pokrótce ważniejsze własności czasoprzestrzeni zawarte w powyższych wynikach.

Jedną z ciekawszych jest istnienie niezmiennika. Niezmiennik to wielkość zbudowana z wyrażeń zależnych, dla danej sytuacji fizycznej, od układu odniesienia, ale tak zbudowana, że jej wartość od układu odniesienia (czyli od układu współrzędnych) NIE zależy.

Zauważmy na początek, co dzieje się z wyrażeniami $x - ct$, oraz $x + ct$. W tym celu dodajemy i odejmujemy oba równania transformacji Lorentza (po wcześniejszym pomnożeniu stronami, drugiego z nich przez c.

$$x + ct = \frac{x' + Vt' + c(t' + x'V/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{x' + ct' + V/c(x' + ct')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = (x' + ct')\frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = (x' + ct')\sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}$$

$$x - ct = (x' - ct')\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$$

Różnica mnoży się przez odwrotność tego czynnika, przez który mnoży się suma. Zatem iloczyn sumy i różnicy jest niezmiennikiem!

$$(x+ct)(x-ct)=(x'+ct')(x'-ct')$$

Lub inaczej

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2=\text{invariant}$$

Po podzieleniu przez c^2, zmianie znaku i powrocie do C możemy też napisać:

$$t^2-Cx^2=\text{inv}$$

W geometrii Euklidesa takim inwariantem jest oczywiście:

$$x^2+y^2$$

Z inwariantu można korzystać np. w ten sposób, że do punktu *t,x* (albo *y,x*) prowadzimy z początku układu nową oś, tak by w nowym układzie *x*'=0. Wtedy t' (albo) *y*' jest tym, co byśmy chcieli nazwać długością odcinka od (0,0) do (*t,x*). Jednak *x'*=0, oznacza iż:

$$t^2-Cx^2=t'^2-0,\ \text{lub}$$
$$y^2+x^2=y'^2+0$$

Powyższy wywód twierdzenia Pitagorasa jest niezależnym dowodem, nie korzystającym z rysunku.

Podstawowa relacja STW jest równie głęboka jak twierdzenie Pitagorasa! Jedyna różnica jest w znaku.

W przypadku ruchu w kierunku nie pokrywającym się z żadną z trzech osi jakie trzeba wprowadzić w świecie realnym, z czasoprzestrzenią 4 wymiarową, kwadrat odległości wyraża się przez 3 współrzędne zwykłym twierdzeniem Pitagorasa, niezmiennikiem w przestrzeni 4 wymiarowej jest:

$$t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)$$

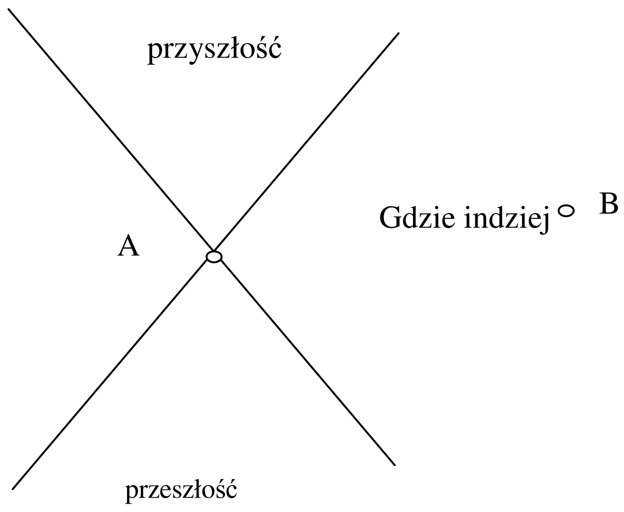
W przeciwieństwie do przestrzeni Euklidesa, niezmiennik, związany bezpośrednio z wynikami pomiarów „po skosie” NIE jest dodatnio określony! Ma to bardzo ważne konsekwencje.

Jedną z nich już poznaliśmy. Dla ruchu z prędkością światła, który rozpoczyna się w początku układu, mamy $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$, więc niezmiennik $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ jest ZERO. Skoro to jest niezmiennik, to i w każdym układzie będzie zachodziło $c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, co oznacza, iż rozbiegająca się fala kulista, będzie postrzegana w każdym układzie jako kulista i rozchodząca się z prędkością c.

Ciało wysłane w chwili 0 z początku układu, poruszając się z prędkością v dociera do punktu, do którego odległość $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = vt < ct$, więc $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0$. Relacja ta będzie spełniona, oczywiście dla każdego innego obserwatora. Ciało w każdym układzie mieć będzie prędkość $<c$.

Do punktów, dla których interwał jest ujemny, dotrzeć by mogły tylko ciała o prędkości $>c$, a takich nie ma.

Jeśli narysować tylko dwa wymiary przestrzenne i jeden czasowy, równanie $c^2t^2 - (x^2 + y^2) = 0$ opisuje stożek. Nazywa się go stożkiem świetlnym. Stożek świetlny dzieli czasoprzestrzeń na trzy rozłączne obszary: przyszłość, przeszłość i gdzie indziej.



Dla punktu „gdzie indziej” można dobrać taki nowy układ odniesienia, że punkt ten będzie miał identyczną współrzędną jak początek układu.

Faktycznie, biorąc $V = c\dfrac{ct}{x}$, dostaniemy $t' = (t - Vx/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2} = 0$. Dla prędkości mniejszej, *t’* będzie dodatnie, dla większej dodatnie. Oznacza to iż w pewnych układach odniesienia zdarzenie B będzie **późniejsze** od A, w innych **wcześniejsze.** Może się to wydawać niepokojące. Przecież, gdy A jest przyczyną zdarzenia B, A powinno być wcześniejsze. Czy inny obserwator może stwierdzić, że A (czyli przyczyna) jest późniejsza?

Wszystko jest w porządku!!! Taka dowolność znaku $t_B - t_A$ jest możliwa tylko dla zdarzeń, między którymi NAWET światło nie doleci. Zdarzenia takie nie mogą być przyczynowo połączone.

Za to o zdarzeniach z wnętrza (lub z powierzchni) stożka jesteśmy pewni, że znak różnicy $t_B - t_A$ jest **też niezmiennikiem**. Dodatnim dla przyszłości, ujemnym dla przeszłości.

Dowód jest prosty. Gdyby dla jakiegoś układu odniesienia, czas zdarzenia B ze stożka przyszłości, był ujemny, to dla rodziny układów o prędkościach zmieniających się od 0 do *V* musiałby w sposób ciągły zmieniać się od wartości dodatniej do ujemnej. Gdzieś (tj. dla pewnej prędkości pośredniej) wartość ta **musiałaby** być zerem. Ale w tym układzie obliczony niezmiennik: $0^2 - x'^2$ byłby **ujemny**, gdy wiadomo, że jest dodatni. Tym samym założenie o zmianie znaku czasu jest teraz niedorzeczne.

Zróbmy jeszcze jedną pożyteczną obserwację:

Jeśli mamy 3 układy: trzeci (x’’,t’’) porusza się względem drugiego(x’,t’) z prędkością $v_{3/2}$, a drugi względem pierwszego(x,t) z prędkością $v_{2/1}$, to mamy:

$$x + ct = \sqrt{\frac{1 + v_{2/1}/c}{1 - v_{2/1}/c}}(x' + ct') = \sqrt{\frac{1 + v_{2/1}/c}{1 - v_{2/1}/c}}\sqrt{\frac{1 + v_{3/2}/c}{1 - v_{3/2}/c}}(x'' + ct'') = \sqrt{\frac{1 + v_{3/1}/c}{1 - v_{3/1}/c}}(x'' + ct''),$$ a to oznacza, iż:

$$\frac{1+v_{3/1}/c}{1-v_{3/1}/c}=\frac{1+v_{2/1}/c}{1-v_{2/1}/c}\cdot\frac{1+v_{3/2}/c}{1-v_{3/2}/c}$$

W szczególności, jeśli proces rozpędzania ciała (np. pojazdu) składa się z n jednakowych etapów, w którym ciało zyskuje niewielką prędkość Δv **względem** układu inercjalnego o prędkości równej prędkości ciała po ukończeniu etapu poprzedniego. (Można sobie wyobrazić, że na koniec etapu od pojazdu oddziela się jakiś kawałek już dalej się nie rozpędzający. Główny pojazd rozpędza się względem tego właśnie ciała o Δv, wystawia nowe i znów, względem tego nowego rozpędza się ponownie o Δv).

Dzięki poznanemu wzorowi łatwo podać związek końcowej prędkości ciała z liczbą etapów i przyrostem prędkości w jednym etapie:

$$\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{(1+\Delta v/c)^n}{(1-\Delta v/c)^n}.$$

Jeśli proces rozpędzania **ciągłego i równomiernego** rozbijamy na jednakowe etapy **w myśli**, możemy liczbę kawałków uczynić dowolnie wielką, a prędkość zyskiwaną w jednym etapie, Δv, dowolnie małą.

Pozwala nam to uznać, iż opis ruchu przyspieszonego w takim jednym etapie, trwającym dla pasażerów $1/n$-tą całkowitego czasu własnego τ, kończącym się uzyskaniem małej prędkości może być opisany prosto przybliżonym równaniem

$\Delta v = a\tau/n$, co prowadzi do związku:

$$\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{(1+a\tau/nc)^n}{(1-a\tau/nc)^n}.$$

Związek powyższy jest tym dokładniejszy, im n większe.

A **tak naprawdę** związek powyższy jest ścisły, gdy po prawej stronie weźmie się **granicę** dla n dążącego do nieskończoności.

Na ćwiczeniach albo już znajdowaliście (albo znajdziecie na najbliższych), związek między końcową prędkością w relatywistycznym ruchu jednostajnie przyspieszonym a przebytą drogą i zużytym czasem mierzonym w stale jednym i tym samym układzie inercjalnym (w którym ciało na początku spoczywało – jeśli to ma być zadanie o podróży kosmicznej, to myślimy o układzie Ziemi).

Powyższy związek pozwoli powiązać czas własny z czasem w układzie inercjalnym i porównać wiek podróżnika po powrocie z wiekiem jego brata bliźniaka, który pozostawał w domu).

Zobaczycie, a właściwie już widzicie, że pojawi się tu liczba *e*.

Wszak

$$(1 + a\tau / nc)^n = \left((1 + a\tau / nc)^{nc/a\tau}\right)^{c/a\tau} = \left((1 + 1/N)^N\right)^{c/a\tau}$$

Oznaczyliśmy $N = nc / a\tau$. Jeśli n dąży do nieskończoności, to i N dąży do nieskończoności. Ergo: $(1 + a\tau / nc)^n = \left((1 + 1/N)^N\right)^{c/a\tau} \to (e)^{c/a\tau}$

Trzeba jeszcze wspomnieć o wektorach w czasoprzestrzeni. W pełnej czasoprzestrzeni są to **czterowektory**, transformujące się jak 4 współrzędne :

$$t = \frac{t' + V/c^2 x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$
$$x = \frac{x' + Vx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

W dwuwymiarowej podprzestrzeni wektory będą miały dwie współrzędne – jedną czasową, drugą przestrzenną. Jeśli numeruje się współrzędne przestrzenne 1,2,3 ($x_1$zamiast x, $x_2$zamiast y, $x_3$zamiast z) wtedy współrzędnej czasowej przypisuje się indeks 0.

Oczywistym wektorem jest więc położenie w czasoprzestrzeni o współrzędnych (t, x).

Innym ważnym wektorem jest wektor (małego) **przyrostu** wektora wodzącego $(\Delta t, \Delta x)$. Jest to wektor styczny do linii świata.

Wektor styczny do linii krzywej w geometrii euklidesowej pełni ważną rolę w badaniu krzywych. Wektor przyrostu jest o tyle niewygodny, że jest takich wektorów wiele. No bo połówka wektora przyrostu też jest wektorem stycznym, etc. Dobrze jest brać wektory o standardowej długości.

W geometrii, dzieląc przez niezmiennik $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, dostajemy **jednostkowy** wektor styczny $(\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}})$

W czasoprzestrzeni też będzie wygodnie używać wektora unormowanego. Znamy niezmiennik, więc wektorem stycznym jest:

$$(\frac{\Delta t}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x / c)^2}}, \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x / c)^2}})$$

Przyrosty na linii świata wiążą się z prędkością chwilową cząstki: $\Delta x = v\Delta t$. Wstawiając do wektora stycznego mamy:

$$(\frac{\Delta t}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (v\Delta t / c)^2}}, \frac{v\Delta t}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (v\Delta t / c)^2}}) = (\frac{1}{\sqrt{(1 - (v/c)^2}}, \frac{v}{\sqrt{(1 - (v/c)^2}})$$

Sens wektora polega na tym, że jego współrzędne w układzie U wyrażają się przez współrzędne w układzie U’ za pomocą **tych samych współczynników**, które pozwalają przeliczyć współrzędne czasoprzestrzenne.

Z samej konstrukcji naszego wektora widać, że tak jest.

Pouczające może być sprawdzenie tego niezależnym sposobem. Wiemy jak wyraża się prędkość *v* poprzez prędkość *v’* i prędkość względną układów *V*. Prędkość jest jedna, nie jest skalarem, jej przeliczanie jest wredne, nieliniowe. Ale dwie wielkości powyżej znalezione zachowują się (z matematycznego punktu widzenia przepięknie).

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V + v'}{1 + Vv'/c^2}\right)^2 / c^2}} = \frac{1 + Vv'/c^2}{\sqrt{(1 + Vv'/c^2)^2 - (V + v')^2 / c^2}} = \frac{1 + Vv'/c^2}{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}}$$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{(1 + Vv'/c^2)\frac{V + v'}{1 + Vv'/c^2}}{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}} = \frac{v' + V}{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(1 - v'^2/c^2)}}$$

Jeśli przyjmiemy dla nowego wektora literę *u*, a dla jego współrzędnych u_0 i u_1, to mamy:

$$u_0 = \frac{u_0 + V/c^2 u_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$u_1 = \frac{u_1 + V u_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

a więc dokładnie transformacja Lorentza.

Niebawem rola tego wektora stanie się jasna.