

Fundamentalne ograniczenia w metrologii optycznej

R. Demkowicz-Dobrzański¹, K. Banaszek^{1,3}, U. Dörner², I. A. Walmsley², W. Wasilewski¹, B. Smith², J. Lundeen², M. Kacprowicz³, J. Kołodziej¹

¹*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

²*Clarendon Laboratory, University of Oxford*

³*Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń*

corner



INNOVATIVE ECONOMY
NATIONAL COHESION STRATEGY



Foundation for Polish Science

TEAM Programme

EUROPEAN UNION
EUROPEAN REGIONAL
DEVELOPMENT FUND



Spektakularne zastosowania interferometrii

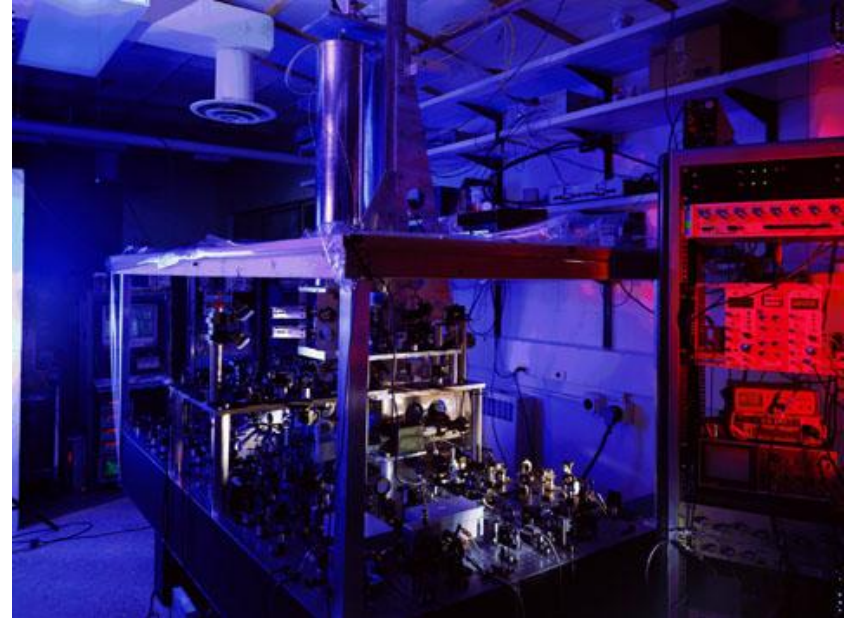
LIGO – detektor fal grawitacyjnych



Interferometr Michelsona

$$\Delta L/L \approx 10^{-22}$$

NIST – cezowy zegar atomowy



Interferometria Ramseyowska

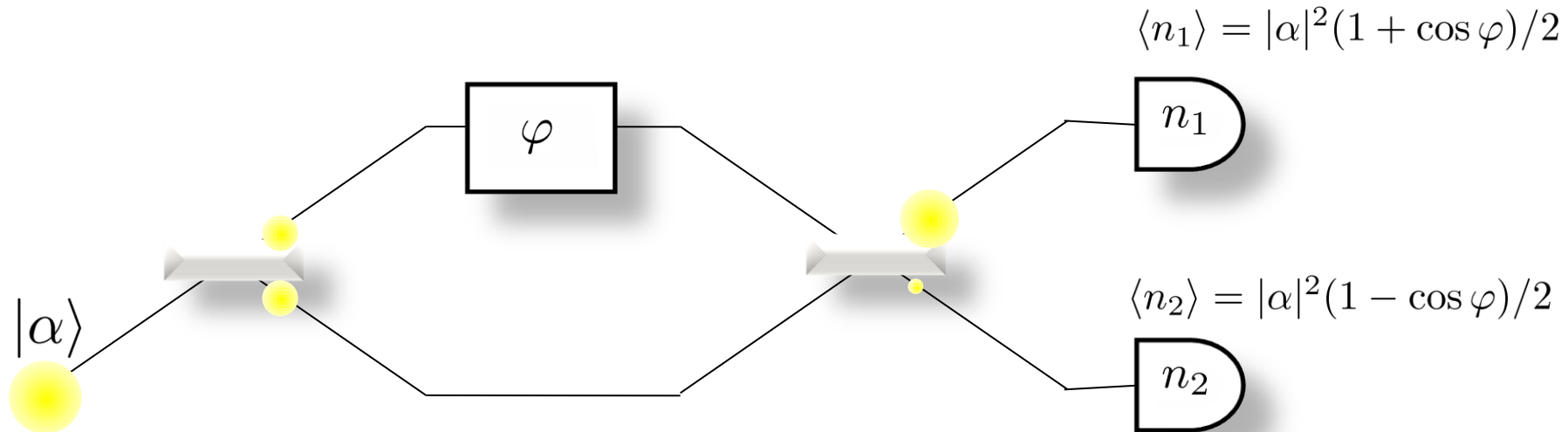
$$\Delta t/t \approx 10^{-16}$$

Skalowanie precyzji: $\propto 1/\sqrt{N}$

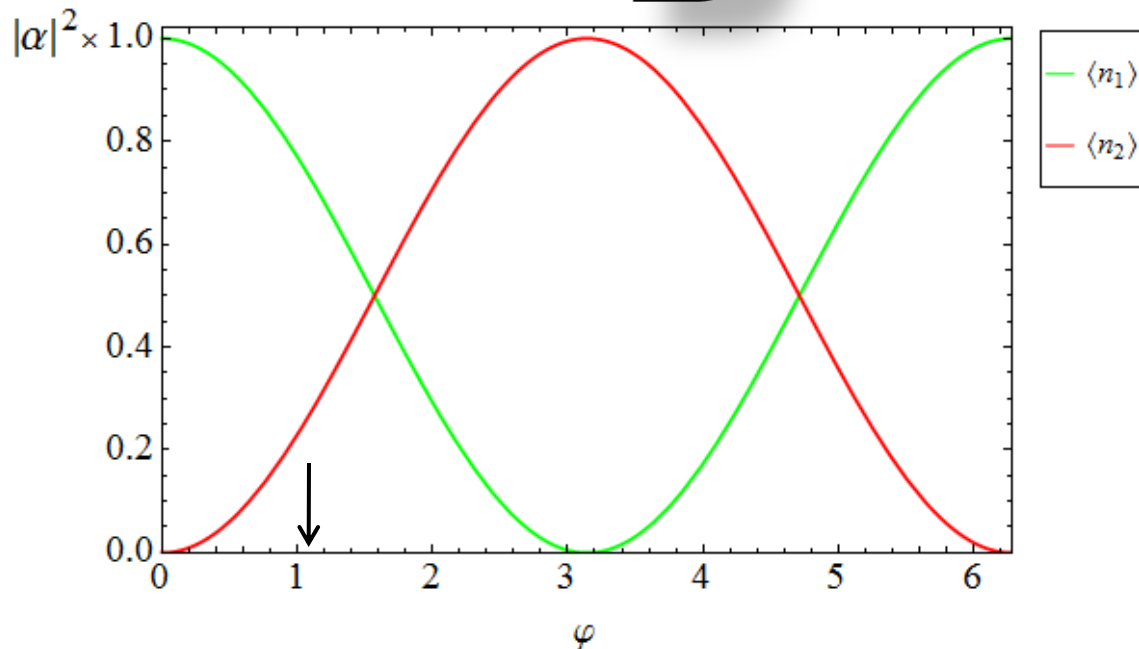
N - liczba fotonów

N - liczba atomów

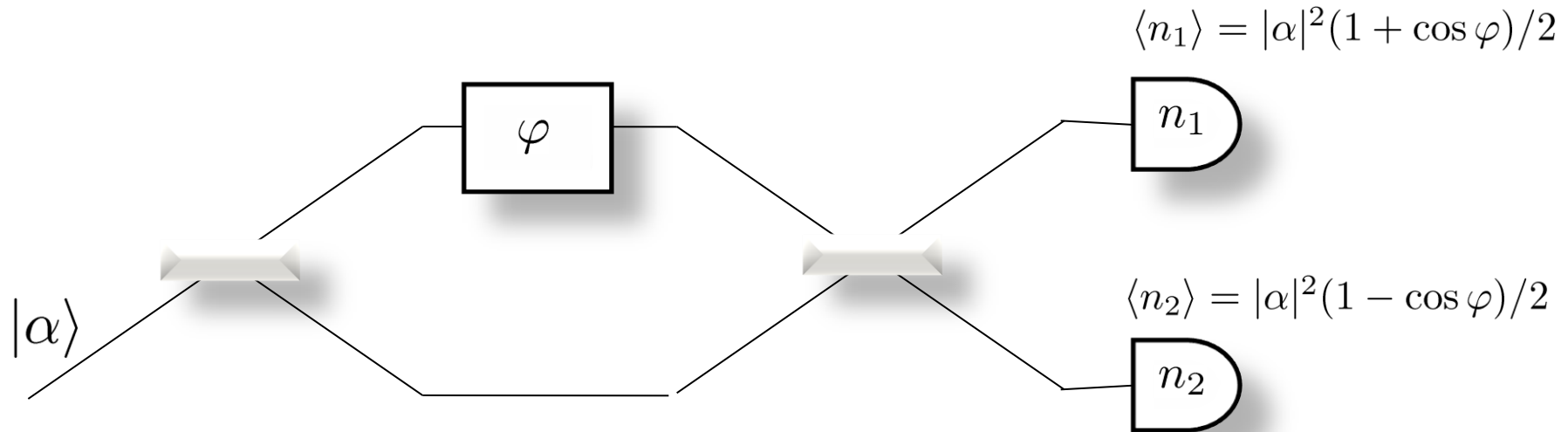
„Klasyczna” interferometria



Mierząc n_1 i n_2
+
Znając teoretyczną zależność
 $\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle$ od φ
↓
Możemy estymować φ



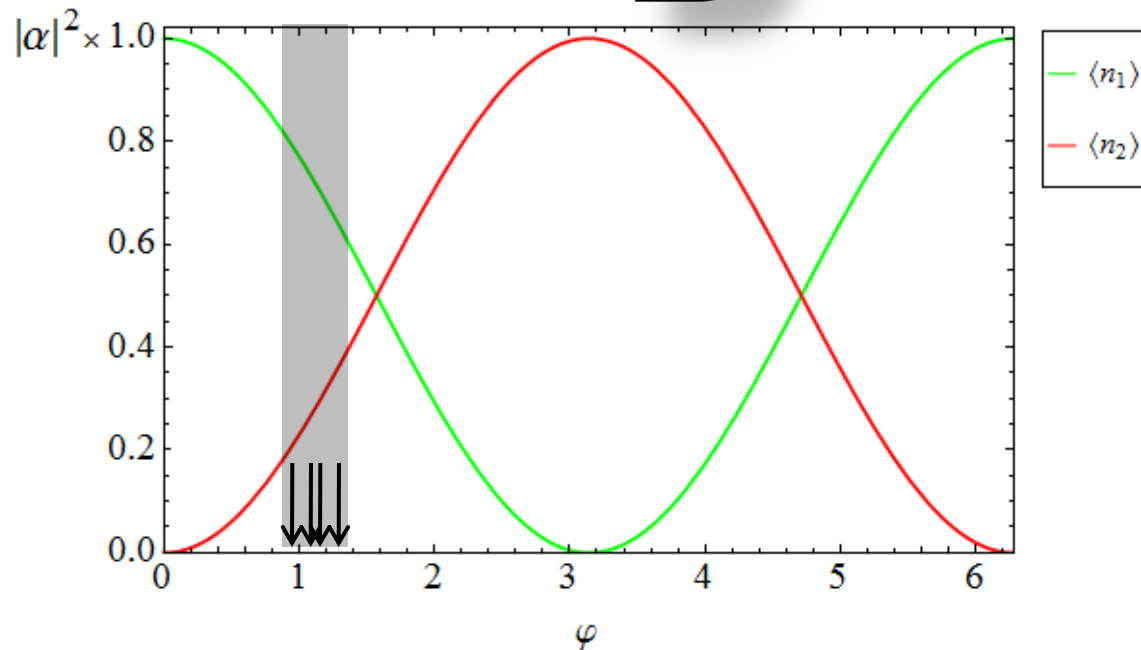
Klasyczna interferometria



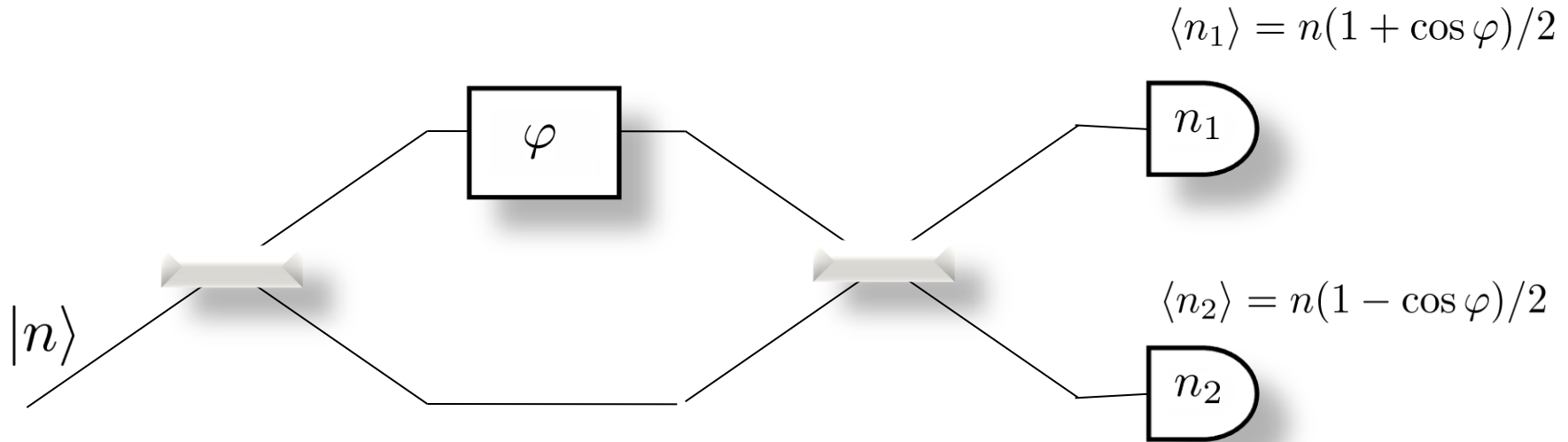
n_1 i n_2 podlegają statystyce Poissonowskiej

$$\Delta\varphi \propto \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

Skalowanie klasyczne



Interferometria ze stanem n fotonowym



n_1 i n_2 podlegają statystyce dwumianowej

Wciąż skalowanie klasyczne!

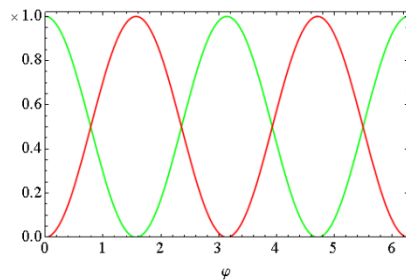
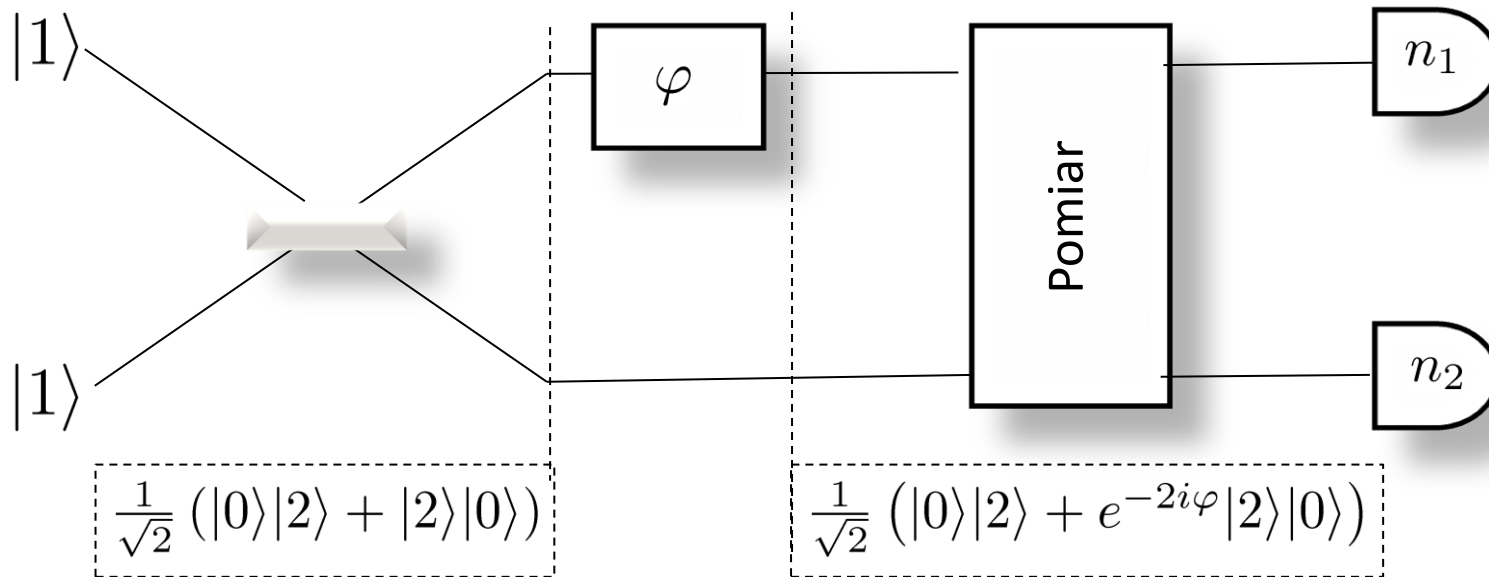
$$\Delta\varphi \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$$

fotony zachowują się całkowicie niezależnie od siebie

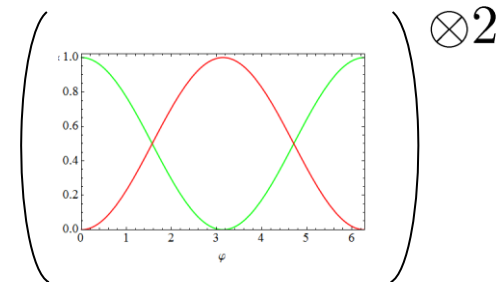
$$\left(\begin{array}{c} \text{Graph of } \cos \varphi \text{ and } \sin \varphi \\ \text{with } \varphi \text{ on the x-axis and amplitude on the y-axis} \end{array} \right) \otimes n \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Zwiększenie precyzji dzięki splątaniu

Interferencja Hong-Ou-Mandla



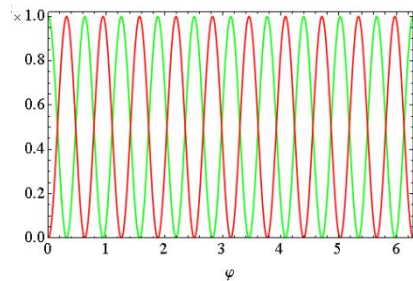
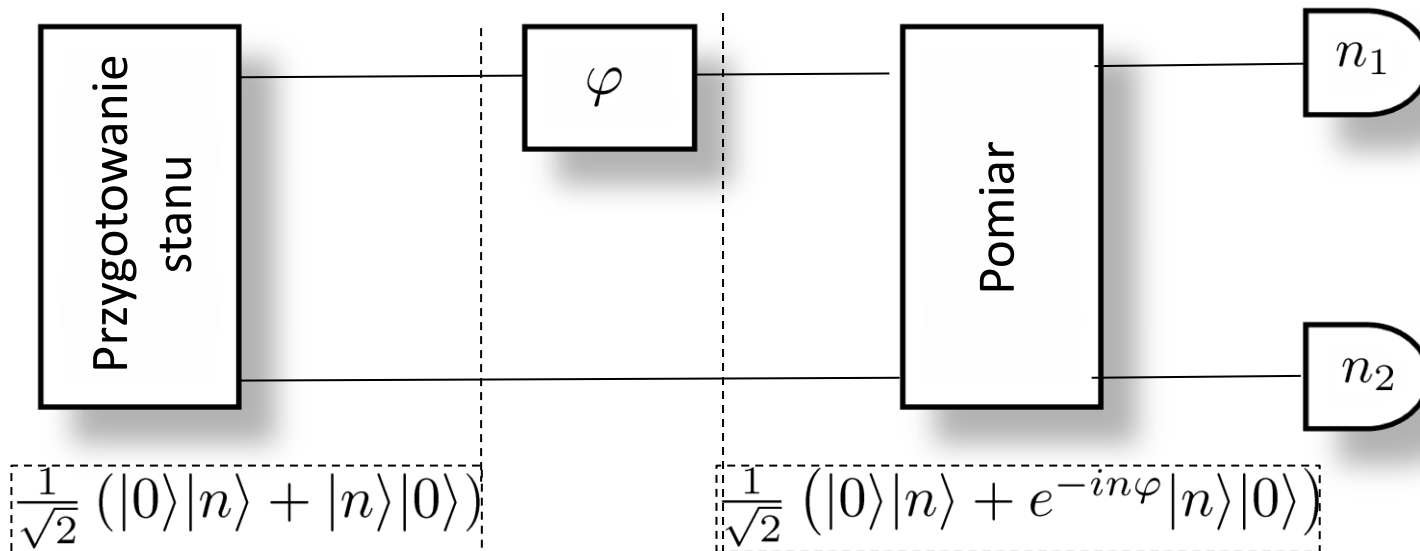
$$\Delta\varphi \propto \frac{1}{2}$$



$$\Delta\varphi \propto \frac{1}{\sqrt{2}}$$

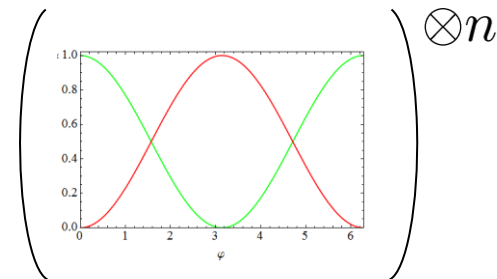
Zwiększenie precyzji dzięki splątaniu

Stany NOON



$$\Delta\varphi \propto \frac{1}{n}$$

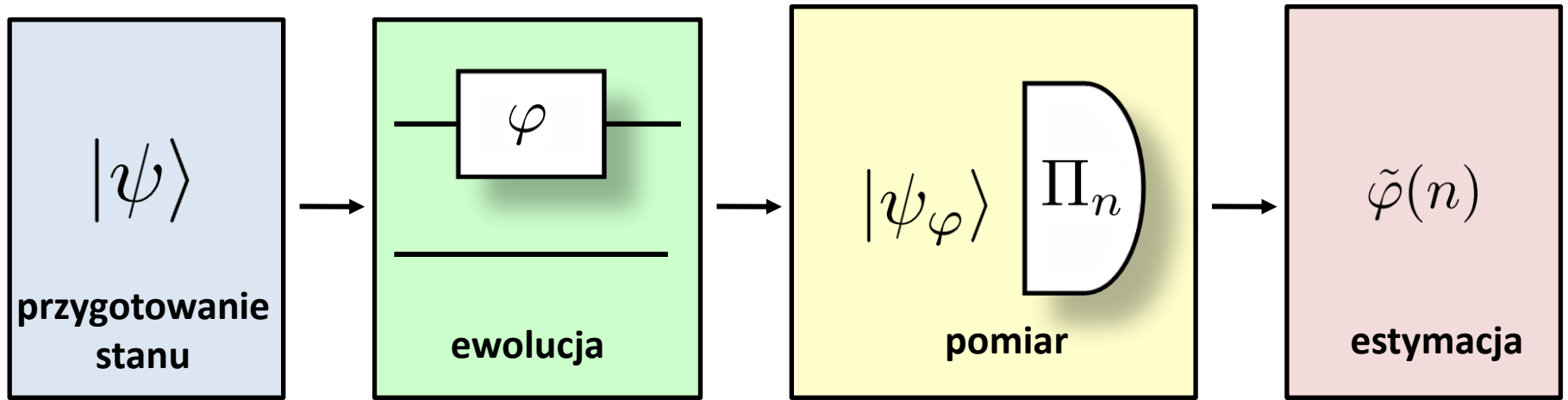
skalowanie Heisenberga



$$\Delta\varphi \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$$

skalowanie klasyczne

Poszukiwanie optymalnych strategii - matematycznie



$$|\psi\rangle = \sum_k \alpha_k |k, N - k\rangle$$

$$|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi |\psi\rangle = \sum_k \alpha_k e^{-ik\varphi} |k, N - k\rangle$$

Minimalizacja $\langle (\tilde{\varphi} - \varphi)^2 \rangle$ po wyborze $|\psi\rangle$, Π_n i $\tilde{\varphi}$

$$\Delta^2 \tilde{\varphi} = \langle (\tilde{\varphi} - \varphi)^2 \rangle = \int d\varphi p(\varphi) \sum_n p(n|\varphi) [\tilde{\varphi}(n) - \varphi]^2$$

Wiedza a priori

$$\langle \psi_\varphi | \Pi_n | \psi_\varphi \rangle$$

$$4 \sin^2 \left[\frac{\tilde{\varphi}(n) - \varphi}{2} \right]$$

W ogólności problem ogromnie trudny!

$$\Delta^2 \varphi = \int d\varphi p(\varphi) \sum_n \langle \psi_\varphi | \Pi_n | \psi_\varphi \rangle [\tilde{\varphi}(n) - \varphi]^2$$

podejście lokalne

chcemy zmierzyć małe fluktuacje wokół znanej fazy

$$p(\varphi) \approx \delta(\varphi - \varphi_0)$$

Metoda: informacja Fishera, nierówność Cramera-Rao

$$\Delta \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{F}}$$

$$F = 4[\langle \psi_\varphi | \hat{n}_1^2 | \psi_\varphi \rangle - \langle \psi_\varphi | \hat{n}_1 | \psi_\varphi \rangle^2]$$

Optymalny stan N fotonowy

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + |0, N\rangle)$$

$$\Delta \tilde{\varphi} \approx \frac{1}{N}$$

J. J. . Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland, and D. J. Heinzen, *Phys. Rev. A* **54**, R4649 (1996).

podejście globalne

nie mamy żadnej wiedzy a priori na temat fazy

$$p(\varphi) \approx \frac{1}{2\pi}$$

Metoda: prosta struktura optymalnego pomiaru dzięki symetrii

Optymalny stan: $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N \alpha_n |n, N-n\rangle$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin \left[\frac{(n+1)\pi}{N+2} \right]$$

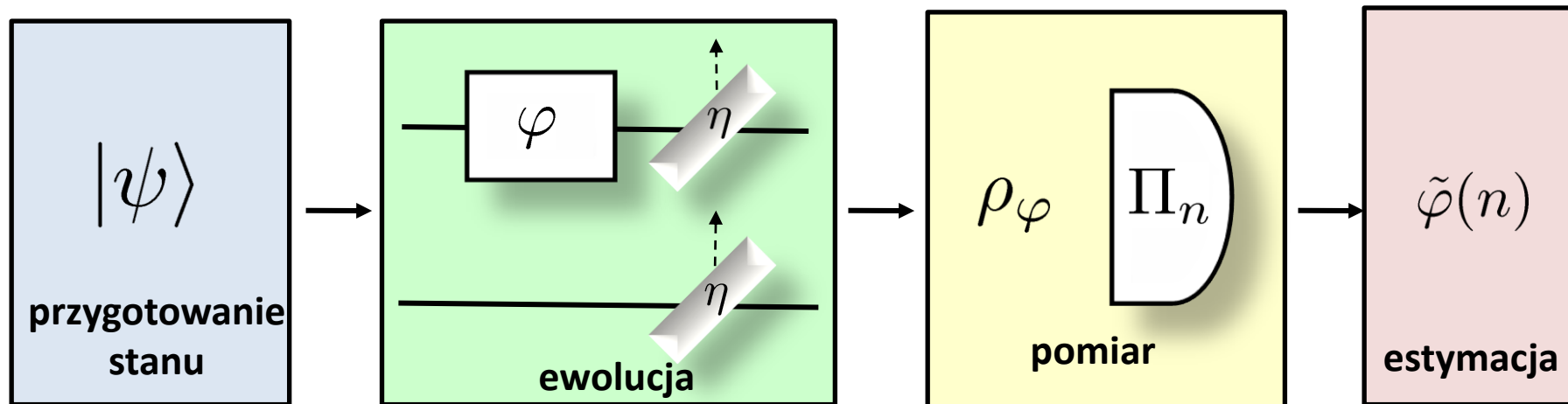
$$\Delta \tilde{\varphi} \approx \frac{\pi}{N+2}$$

D. W. Berry and H. M. Wiseman, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5098 (2000).

Skalowanie Heisenberga

**W rzeczywistości zawsze mamy straty
fotonów....**

Estymacja fazy w obecności strat



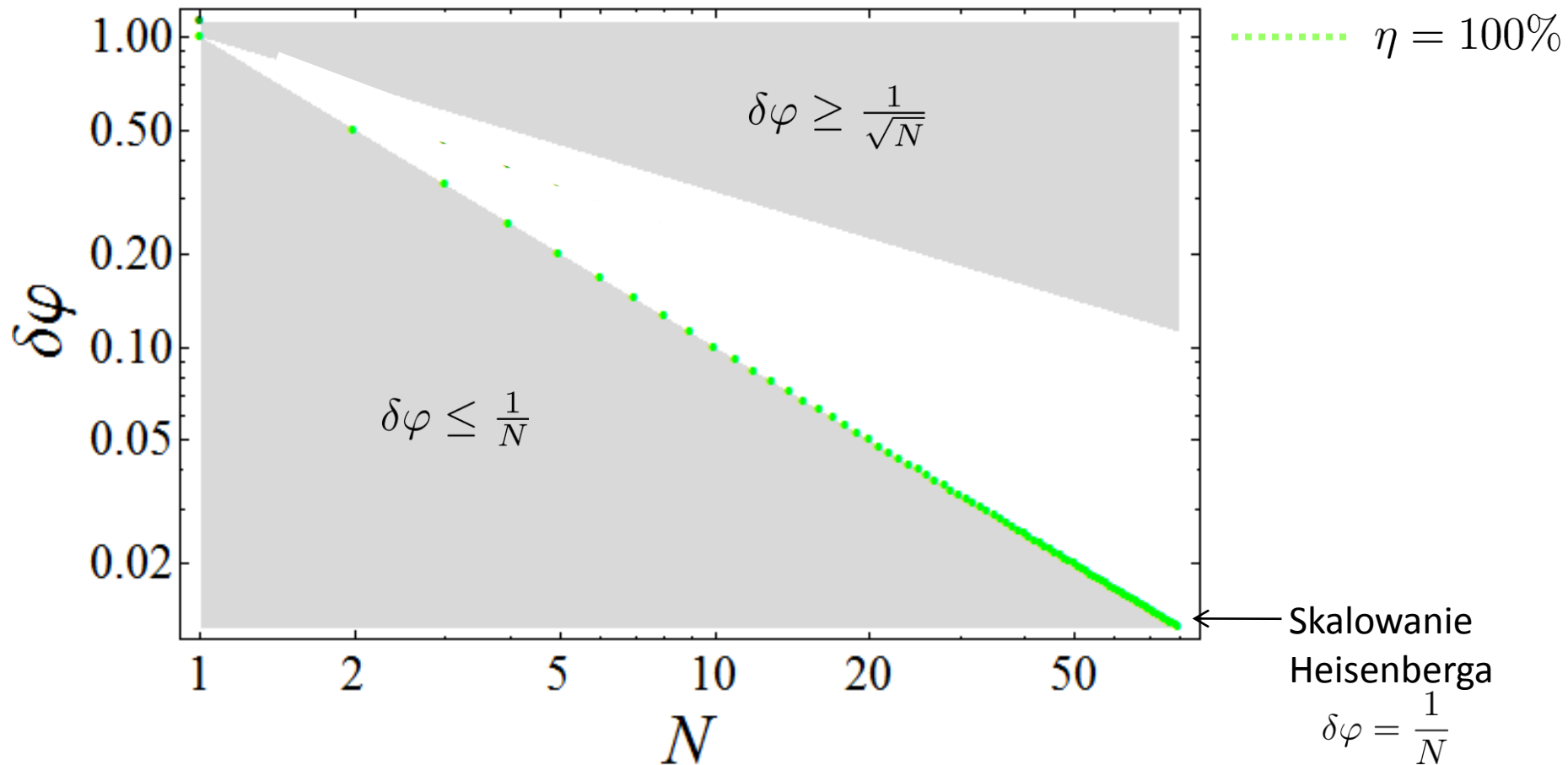
- ☹️ • brak analitycznych wyrażeń na optymalne stany i precyzję
- ☹️ • obliczenie informacji Fishera dla stanu mieszanego bardziej złożone
- 😊 • opóźnienie fazowe i straty komutują
- 😊 • w podejściu globalnym optymalne pomiary nie zmienione w porównaniu z przypadkiem bezstratnym
- 😊 • obliczenia numeryczne szybkie (stany kilkudziesięcio fotonowe)
- 😊 • analityczne wyrażenia na asymptotyczną precyzję

RDD, et al. Phys. Rev. A **80**, 013825 (2009)

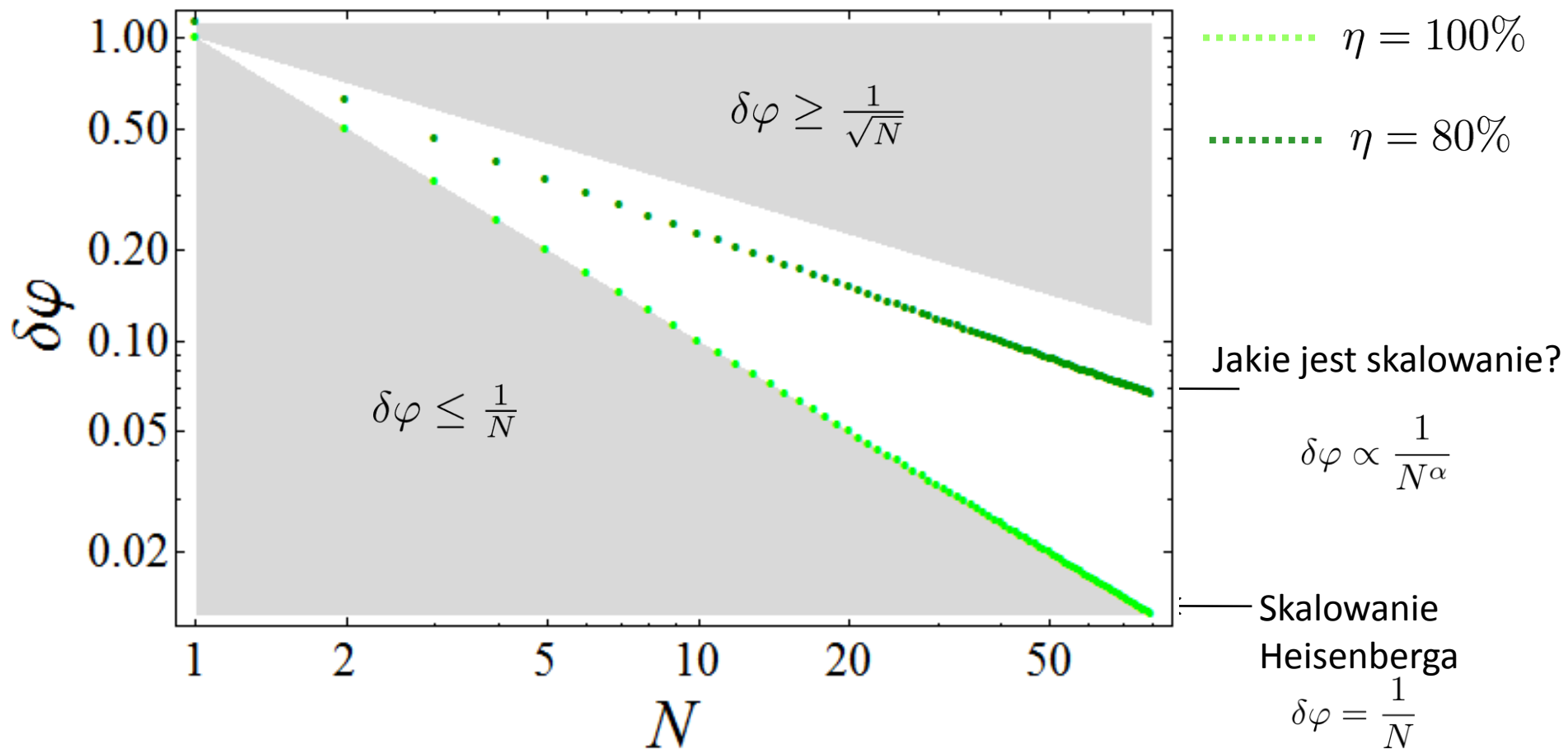
U. Dorner, et al., Phys. Rev. Lett. **102**, 040403 (2009)

M. Kacprowicz, RDD, W. Wasilewski, K. Banaszek, I.A. Walmsley, Nature Photonics **4**, 357 (2010)

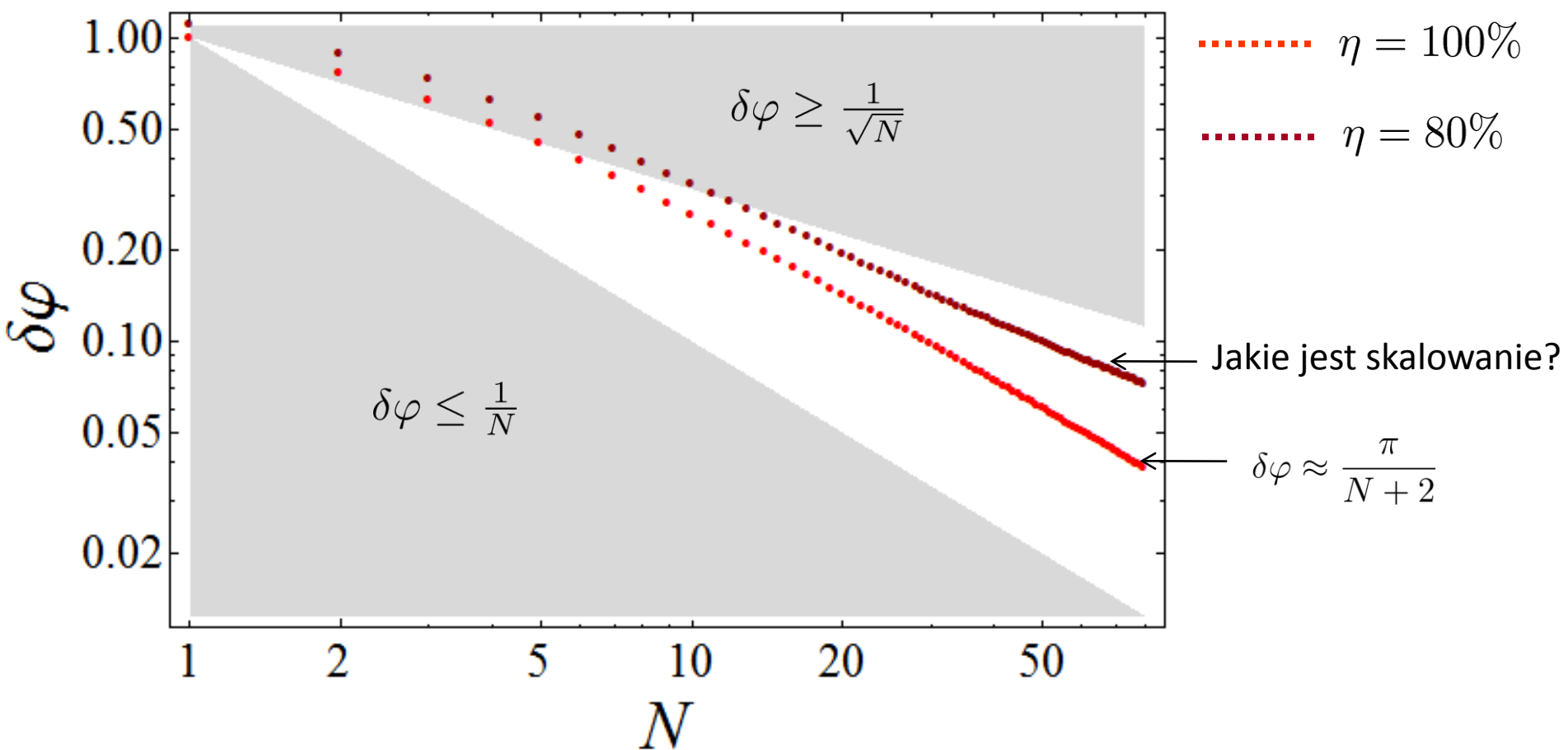
Niepewność estymacji fazy w funkcji liczby użytych fotonów (podejście lokalne)



Niepewność estymacji fazy w funkcji liczby użytych fotonów (podejście lokalne)

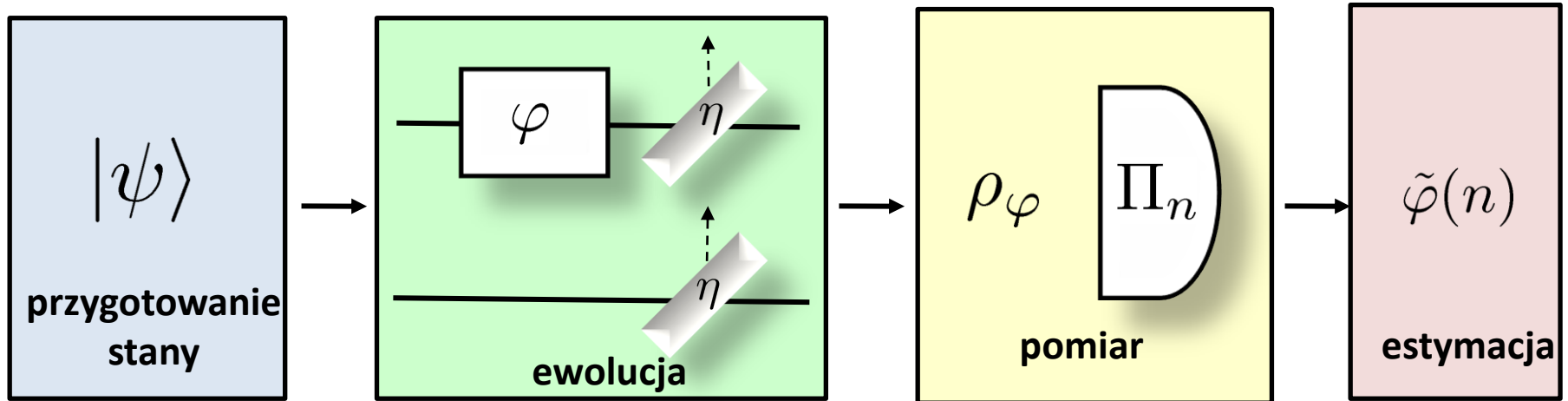


Niepewność estymacji fazy w funkcji liczby użytych fotonów (podejście globalne)



**Czy stany kwantowe pozwalają
uzyskać lepszy wykładnik skalowania
w obecności strat?**

Fundamentalne ograniczenie na precyzję estymacji w obecności strat

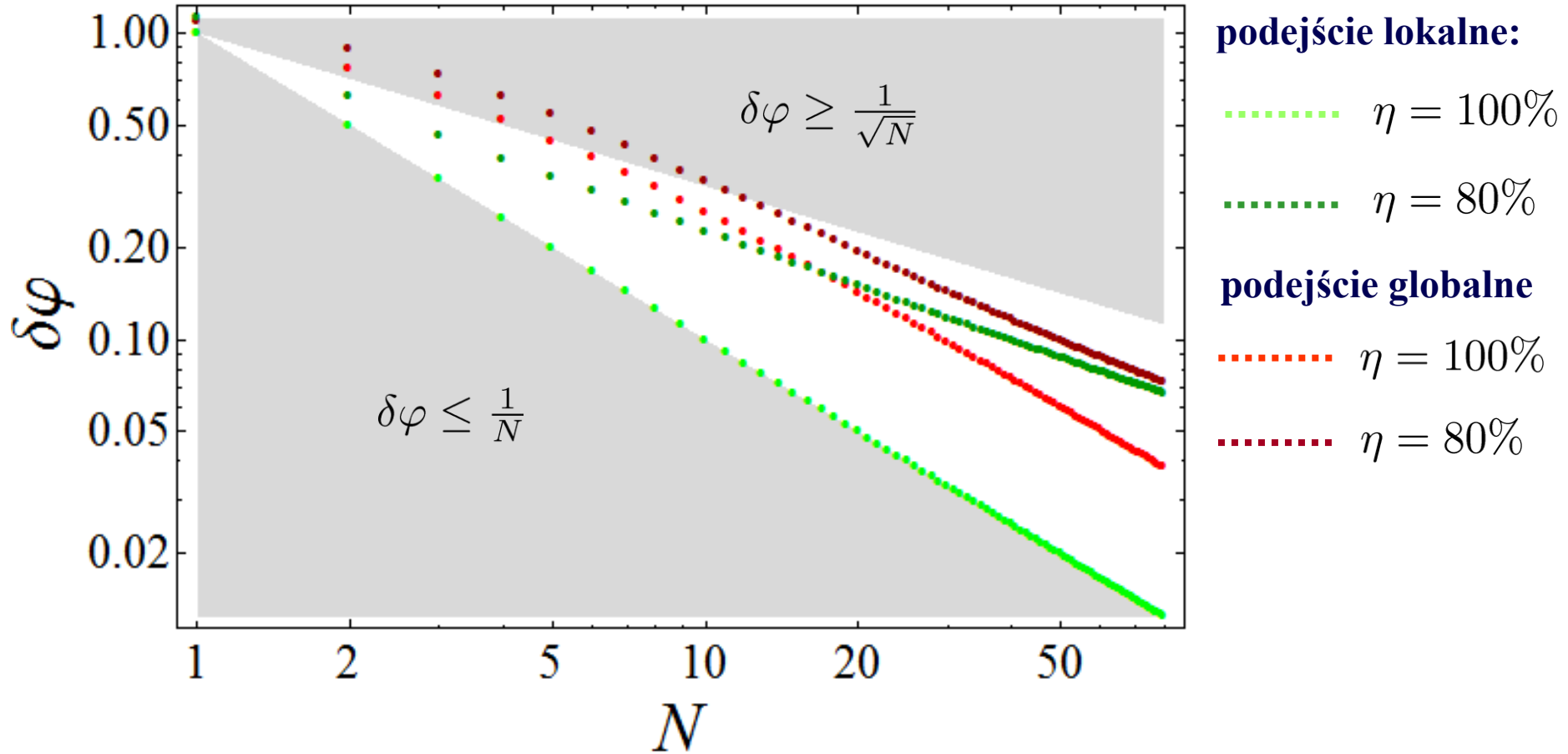


$$\delta\varphi_{\text{quantum}} \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta N}} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

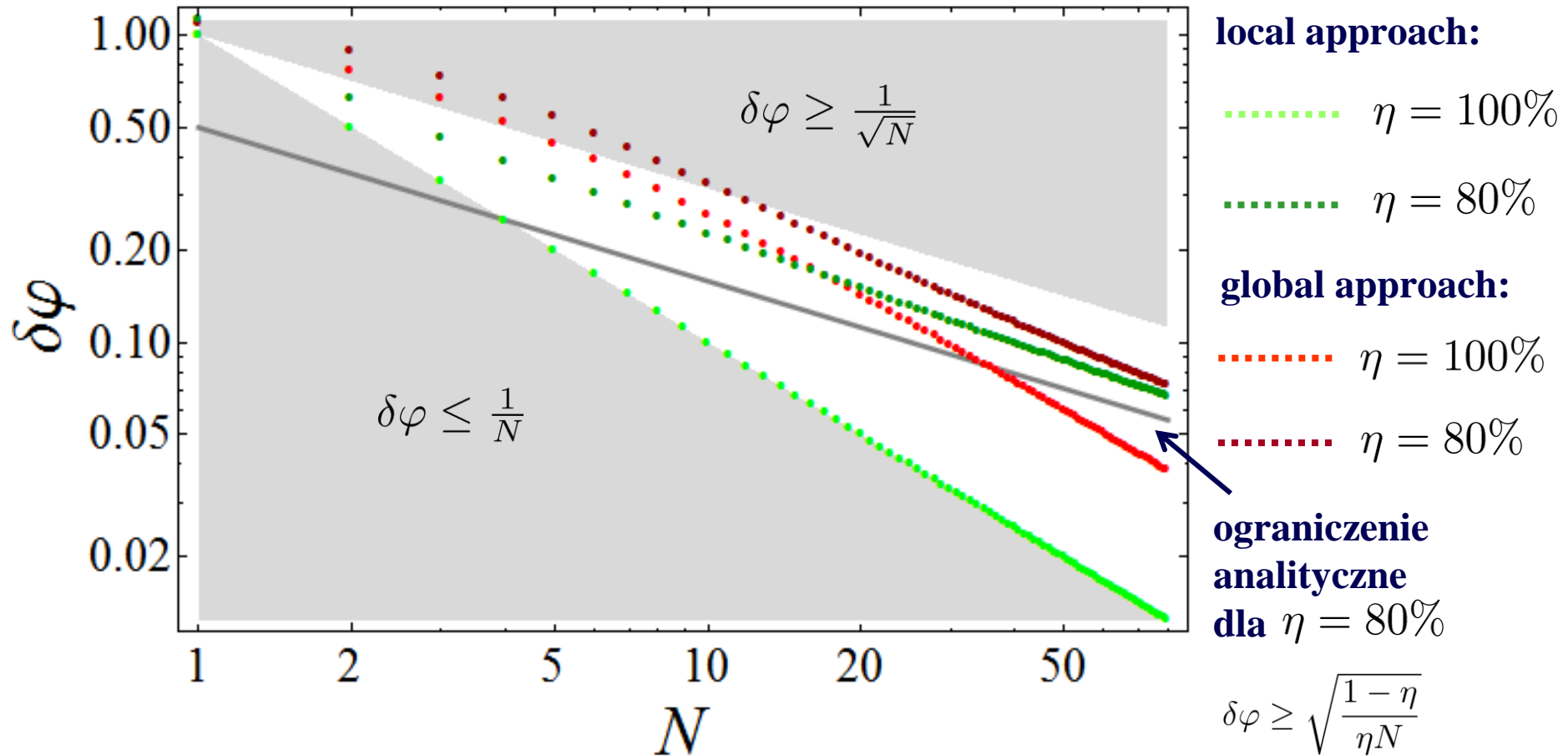
J. Kolodynski, RDD, Phys. Rev. A **82**, 053804 (2010) (podejście globalne)

S. Knysh, V. Smelyanskiy, G. A. Durkin Phys. Rev. A **83**, 021804 (2011) (podejście lokalne)

Fundamentalne ograniczenie na precyzję estymacji w obecności strat



Fundamentalne ograniczenie na precyzję estymacji w obecności strat



Fundamentalne ograniczenie na precyzję estymacji w obecności strat

$$\delta\varphi_{\text{quantum}} \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \delta\varphi_{\text{classical}} = \sqrt{\frac{1}{\eta N}}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta\varphi_{\text{classical}}}{\delta\varphi_{\text{quantum}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}$$

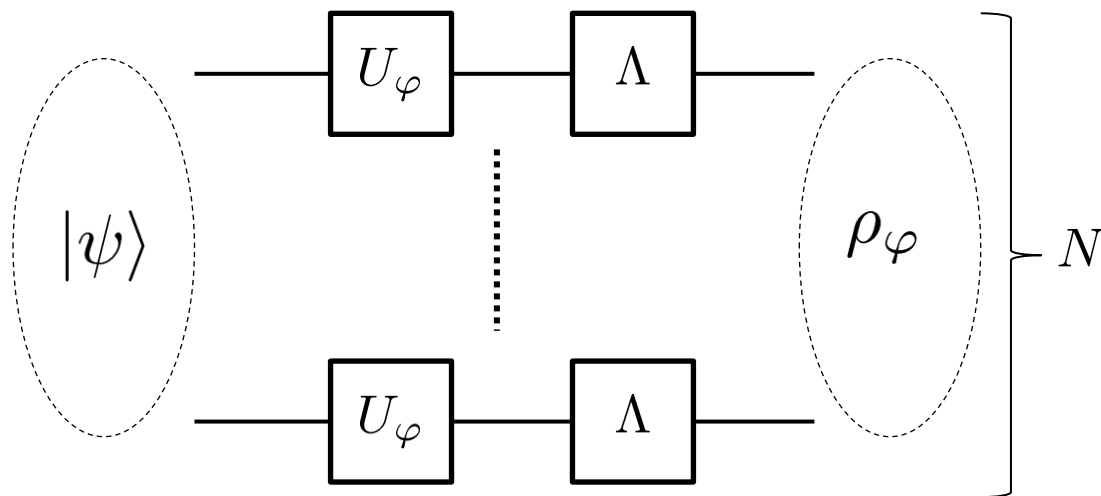
Przykład: $\eta = 80\%$ $1/\sqrt{1-\eta} \approx 2.24$

nawet dla niedużych strat poprawa niezbyt oszałamiająca

Inne modele dekoherencji?

$$\Delta\tilde{\varphi} \propto \frac{1}{N} \xrightarrow{\text{decoherence}} \Delta\tilde{\varphi} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

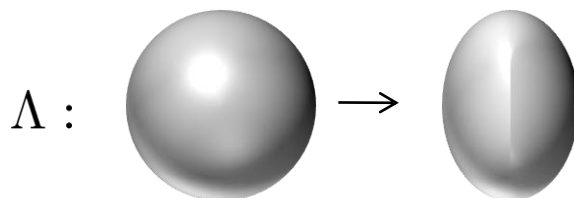
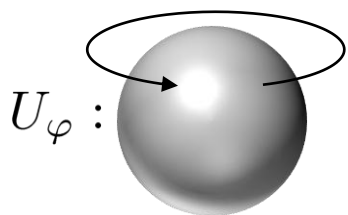
Jak to jest ogólne?



U_φ - unitary encoding

Λ - decoherence

Przykład: defazowanie qubitów

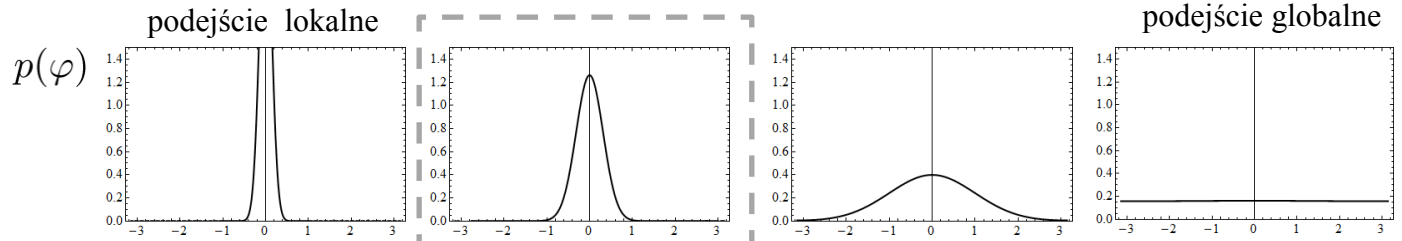


$$\Delta\tilde{\varphi} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Zakładając pewne warunki regularności można udowodnić, że jeśli Λ nie jest odwzorowaniem ekstremalnym to mamy klasyczne skalowanie!

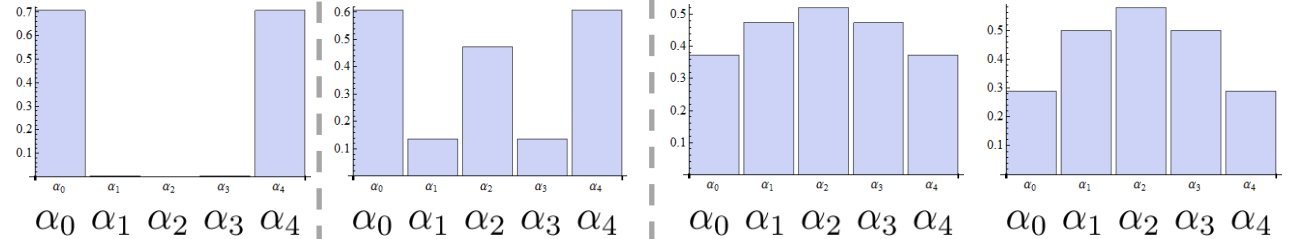
Optymalne wykorzystanie wiedzy a priori

wiedza a priori:

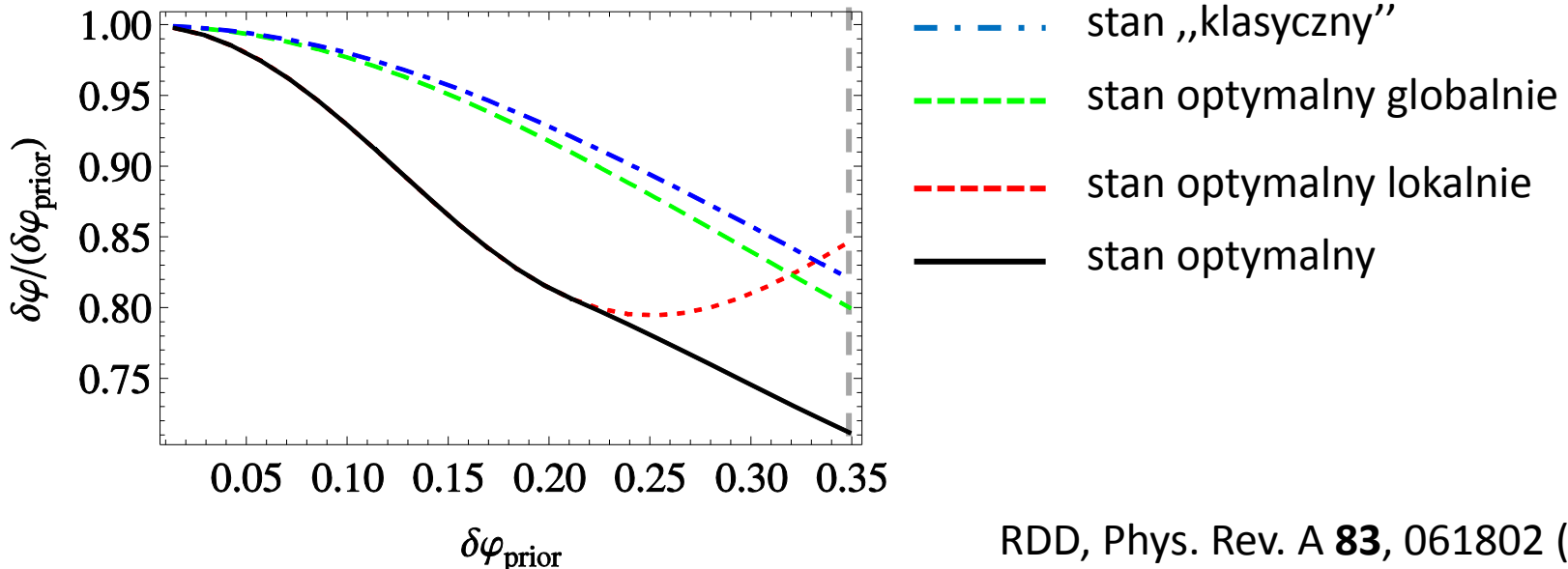


optymalny stan (N=4):

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N \alpha_n |n, N-n\rangle$$



stosunek niepewności po estymacji do niepewności a priori:



Podsumowanie

- Asymptotycznie straty niszczą skalowanie Heisenberga

RDD, et al. Phys. Rev. A **80**, 013825 (2009)

U. Dorner, et al., Phys. Rev. Lett. **102**, 040403 (2009)

J. Kolodynski, RDD, Phys. Rev. A **82**, 053804 (2010)

- Wydaje się to być dość ogólne zachowanie dla różnych modeli dekoherencji (odwzorowana nieekstremalne...)

J. Kolodynski, RDD, w przygotowaniu

- Stany kwantowe mogą być użyteczne praktycznie jedynie dla bardzo małych strat lub niewielkiej liczby fotonów/qubitów

M. Kacprowicz, RDD, W. Wasilewski, K. Banaszek, I.A. Walmsley, Nature Photonics 4, 357 (2010)

- Dla małej liczby fotonów/qubitów istotne jest optymalne wykorzystanie posiadanej wiedzy a priori

RDD, Phys. Rev. A **83**, 061802 (2011)

