

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Tomasz Gubiec

Nr albumu: 211071

Modele igłowe wzrostu Laplace'a

Praca magisterska
na kierunku FIZYKA
w zakresie FIZYKA TEORETYCZNA

Praca wykonana pod kierunkiem
Dra Piotra Szymczaka
Instytut Fizyki Teoretycznej UW

Warszawa, Sierpień 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W problemie wzrostu Laplace'a, powierzchnia rozdziału dwóch faz porusza się z prędkością proporcjonalną do gradientu pola harmonicznego. W ten sposób może być opisane m.in. krzepnięcie przechłodzonej cieczy, krystalizacja w rozrzedzonym roztworze czy osadzanie elektrolityczne. Uproszczony model, w którym wzrost występuje tylko na końcu igłowych dendrytów, badany jest metodą odwzorowań konforemnych z wykorzystaniem formalizmu równania Loewnera. Analizowane są rozwiązania analityczne i numeryczne tego równania dla różnych warunków brzegowych, w szczególności zjawisko rywalizacji, gdy większe igły hamują wzrost mniejszych znajdujących się w ich pobliżu, co prowadzi do powstawania powierzchni o skomplikowanych, fraktalnych kształtach.

Słowa kluczowe

wzrost fraktalny, równanie Loewnera, model igłowy, dendryt, dyfuzja

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Klasyfikacja tematyczna

Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Needle models of Laplacian growth

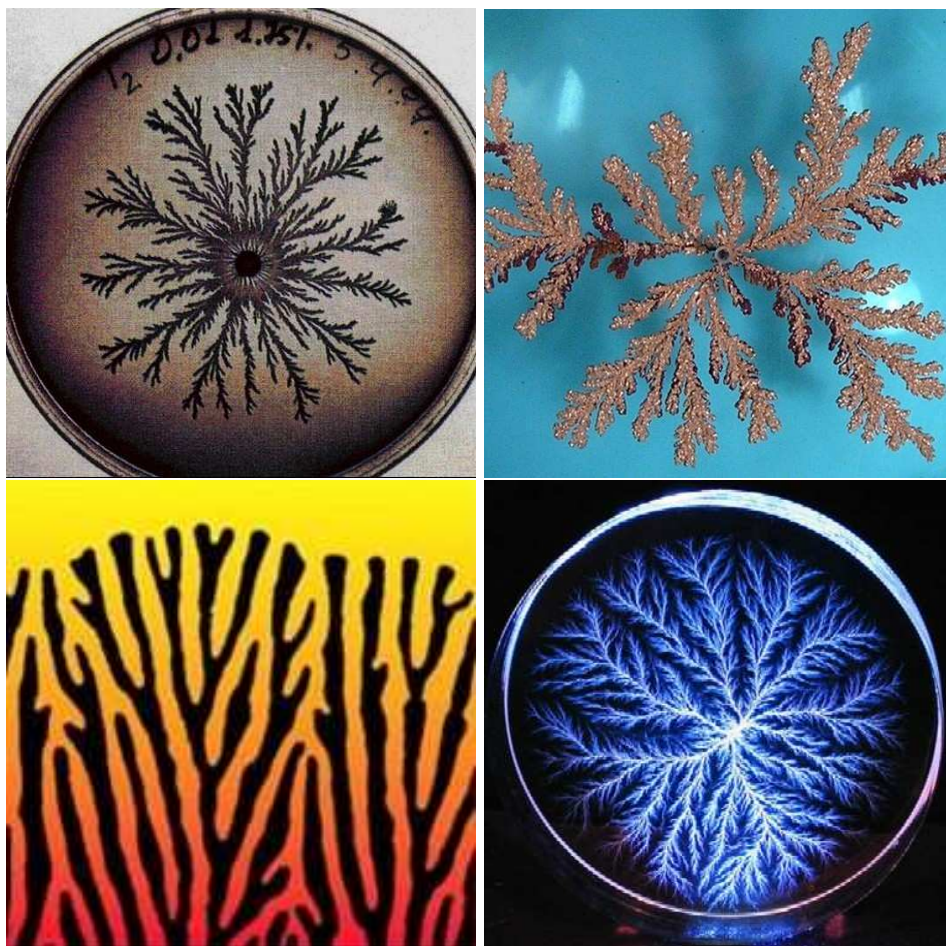
Spis treści

1. Wstęp	5
2. Wzrost Laplace'a	9
2.1. Palce lepkości w komórce Hele-Shawa	9
2.2. Osadzanie elektrolityczne	13
2.3. Krzepnięcie	14
2.4. DLA	15
2.5. Rywalizacja i rozszczepianie	16
2.6. Modele igłowe	17
3. Metoda odwzorowań konforemnych	19
3.1. Pochodna zespolona, równania Cauchy-Riemanna	20
3.2. Odwzorowanie konforemne, Twierdzenie Riemanna	20
3.3. Funkcje harmoniczne, a funkcje analityczne	22
3.4. Prędkość wzrostu w modelu igłowym	23
4. Model prostych igieł	27
4.1. Dotychczasowe wyniki	27
4.2. Równoległe igły w okresowych warunkach brzegowych	27
4.3. Niestabilność, bifurkacje	29
5. Równanie Loewnera dla półpłaszczyzny	31
5.1. Równanie Loewnera dla jednej igły	31
5.2. Równanie Loewnera dla dwóch igieł	36
5.3. Równanie Loewnera dla wielu igieł	42
6. Równanie Loewnera dla półpaska	47
6.1. Równanie Loewnera dla jednej igły	48
6.2. Równanie Loewnera dla wielu igieł	56
7. Równanie Loewnera dla walca	67
7.1. Równanie Loewnera dla jednej igły	67
7.2. Równanie Loewnera dla wielu igieł	68
8. Podsumowanie	73
A. Numeryczne całkowanie równań Loewnera	75
B. Kod programu numerycznego	79

Rozdział 1

Wstęp

Wiele procesów wzrostu występujących w przyrodzie wytwarza podobne kształty rosnących struktur. Od rozmnażających się kolonii bakterii, przez osadzanie elektrolityczne i spalanie w komórce Hele-Shawa, po wyładowania elektryczne w dielektryku, zaobserwować możemy rozgałęzione dendryty, charakteryzujące się ułamkowym wymiarem fraktalnym (rysunek 1.1).



Rysunek 1.1: Przykłady dendrytów w przyrodzie, w kolejności: bakterie rozmnażające się w gęstym płynie z rozpuszczonym cukrem, osadzanie elektrolityczne, spalanie kartki papieru w w komórce Hele-Shawa, wyładowanie elektryczne w dielektryku (tzw. figura Lichtenberga)

Zbieżność powstających kształtów nie jest przypadkowa i wynika z podobnej struktury opisujących te zagadnienia równań. Zjawiska takie jak krzepnięcie, gdy faza krystaliczna rośnie w fazie ciekłej, „palce lepkości”, czyli ewolucja cieczy o mniejszej lepkości wstrzykiwanej do cieczy o większej lepkości oraz osadzanie elektrolityczne, gdy dyfundujące w elektrolicie jony „przyklejają się” do katody, łączą te same równania. Wszystkie powyższe przykłady przy pewnych założeniach dają się sprowadzić do opisu przez pole skalarne $u(\vec{x}, t)$, które może reprezentować temperaturę (krzepnięcie), ciśnienie („palce lepkości”), potencjał elektryczny (osadzanie elektrolityczne) lub koncentrację (osadzanie elektrolityczne, krzepnięcie). W wielu przypadkach okazuje się, że powyższe pole spełnia równanie Laplace’a

$$\nabla^2 u(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.1)$$

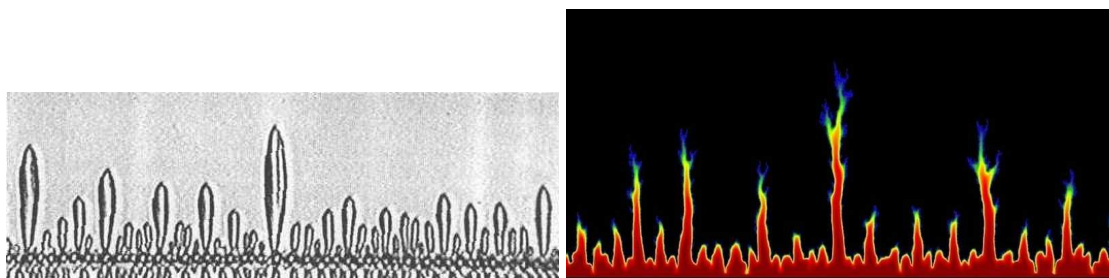
z warunkiem brzegowym $u(\vec{x}, t) = 0$ na brzegu (froncie) poruszającego się obszaru. Składowa normalna prędkości brzegu dana jest przez

$$v_n = c \hat{n} \cdot \nabla u(\vec{x}, t), \quad (1.2)$$

gdzie c jest pewną stałą, a \hat{n} oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni.

Pomimo liniowości równania Laplace’a, przez powyższy warunek ruchu brzegu, problem staje się nieliniowy i poza niewieloma prostymi przypadkami nie może być rozwiązany analitycznie. Istotną cechą takiego układu, jest fakt, że front jest niestabilny ze względu na małe zaburzenia. Początkowe etapy ewolucji takiego frontu są dobrze zbadane metodą liniowej analizy stabilności. Dalsze etapy są znacznie trudniejsze do opisu, gdyż zaburzony front tworzy formę dendrytów i struktura znacznie komplikuje się. W tej fazie, bardzo istotne staje się zjawisko rywalizacji między dendrytami. Większe gałęzie rosną coraz szybciej i hamują wzrost mniejszych znajdujących się w ich sąsiedztwie.

Do analizy m.in. właśnie tego zjawiska posłużymy się uproszczonym modelem, w którym dendryty rosną tylko na swoich końcach. Taki model zwany jest modelem igłowym i może być stosowany w przypadkach, w których rozszczepianie się dendrytów i szum (fluktuacje) nie odgrywają dużej roli, jak w przykładach na rysunku 1.2.



Rysunek 1.2: Przykłady zjawisk, w których można stosować model igłowy: krystalizacja w rozrzedzonym roztworze [1] oraz kanały tworzące się w rozpuszczającej się pod wpływem cieczy skale [2].

W opisie tego typu zjawisk użyjemy formalizmu równania Loewnera. Idea tego formalizmu polega na rozwiązywaniu równania Laplace’a przez znalezienie konforemnej mapy zewnętrzza igieł na prostszy obszar o znanym rozwiązaniu równania Laplace’a. Następnie szukać będziemy równania różniczkowego na ewolucję takiego odwzorowania. Takie podejście znacznie upraszcza zagadnienie, gdyż z układu o nieskończenie wielu stopniach swobody, opisywanego przez równania różniczkowe cząstkowe, sprowadza opis do układu dynamicznego.

W przypadku igieł rosnących w nieograniczonej przestrzeni równanie Loewnera jest znane. Jednak z punktu widzenia fizyki, znacznie bardziej interesujący jest przypadek, gdy obszar wzrostu jest ograniczony ściankami. Wpływ ścianek w tego typu zjawiskach nie jest zanedbywalny, a jak pokażemy w dalszej części pracy, wręcz kluczowy. Dlatego właśnie badany był wzrost igieł w geometrii kanału z różnymi warunkami brzegowymi. W tym celu wyprowadzone zostało nowe równanie Loewnera dla tego przypadku.

Na początku pracy, w rozdziale 2 omówimy znane przykłady zjawisk fizycznych odpowiadających wzrostowi Laplace'a z analizą fizycznych własności tego typu wzrostu na przykładzie palców lepkości w komórce Hele-Shawa. W rozdziale 3 przypomnimy niezbędny w metodzie odwzorowań konforemnych aparat matematyczny, który zastosujemy w modelu prostych igieł omówionym w rozdziale 4. W rozdziale 5 przypomnimy wyprowadzenie znanego już równania Loewnera dla półpłaszczyzny, wprowadzając jednak lemat potrzebny w rozdziale 6, zawierającym wyprowadzenie nowego równania Loewnera dla półpaska. Rozdział 7 zawiera wyprowadzenie znanego już równania Loewnera w geometrii walca, ale inną metodą, analogiczną do stosowanej w rozdziale 6. W rozdziałach 6 i 7 analizować będziemy zjawisko rywalizacji, korzystając z rozwiązań numerycznych otrzymanych równań Loewnera, uzyskanych metodą opisaną załączniku A.

Rozdział 2

Wzrost Laplace'a

Zacznijmy od omówienia najbardziej znanych przykładów zjawisk fizycznych opisywanych wzrostem Laplace'a. Najpierw omówimy dokładnie zjawisko „palców lepkości” i na jego przykładzie pokażemy niestabilność powierzchni rozdziału faz. Następnie opiszemy zjawiska krzepnięcia, osadzania elektrolitycznego i komputerowy model zwany DLA. W rozdziale tym opierać się będziemy na pracy Sandera [3], oraz na książkach Vicseka [4] i Meakina [5], z których zaczerpnięte są opisy wymienianych zjawisk.

2.1. Palce lepkości w komórce Hele-Shawa

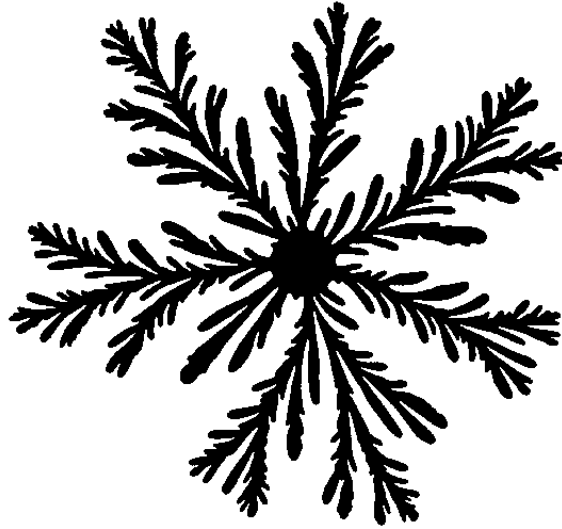
Komórka Hele-Shawa to układ dwóch płaskich, równoległych i przeważnie przezroczystych płyt, ustawionych tak, że odległość między nimi (b), jest dużo mniejsza od rozmiarów poprzecznych. Początkowo przestrzeń między płytami wypełnia jednej z płynów, natomiast drugi płyn wstrzykiwany jest do układu. W zależności od geometrii układu mówimy o radialnej komórce Hele-Shawa, gdy brzeg jest w kształcie okręgu, a płyn wstrzykujemy punktowo, lub o prostokątnej, gdy układ ma kształt prostokątny i drugi płyn wstrzykujemy jedną z krawędzi. Zjawisko „palców lepkości” występuje gdy mniej lepki płyn jest wstrzykiwany do płynu o większej lepkości. Powierzchnia rozdzielająca oba płyny okazuje się wtedy niestabilna, co prowadzi do powstawania palczastych figur o skomplikowanym kształcie, jak na rysunku 2.1 Jako model powyższego zjawiska, rozważmy przepływ między dwiema bliskimi równoległymi płaszczyznami. Dwa lepkie płyny są umieszczone wewnątrz, a ciśnienie na dwóch przeciwległych krawędziach jest różne, co wywołuje przepływ. Niech osie x, y znajdują się w płaszczyźnie równoległych ścian, natomiast oś z będzie do nich prostopadła. Jeśli odległość b jest dużo mniejsza od pozostałych rozmiarów komórki to możemy przyjąć, że lokalnie prędkość zmienia się w zmiennej z jak między dwiema nieskończonymi płaszczyznami, czyli parabolicznie [6]

$$\vec{v}(x, y, z) = -\frac{\nabla p(x, y)}{2\mu} (b^2/4 - z^2). \quad (2.1)$$

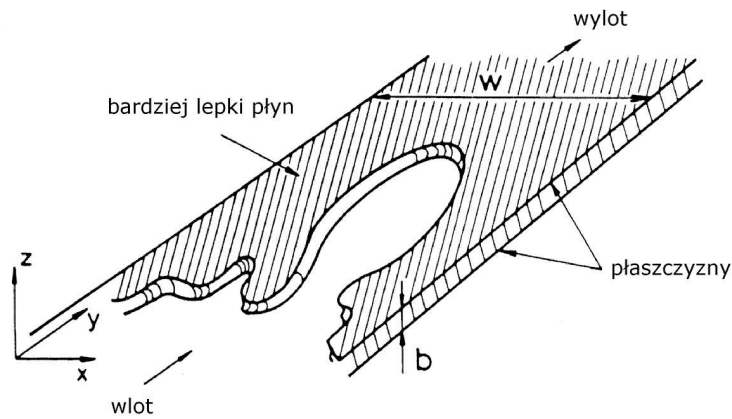
Możemy wtedy opisać cały przepływ przez średnią prędkość w osi z

$$\langle v(x, y) \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} v(x, y, z) dz = -\frac{b^2}{12\mu} \nabla p(x, y) \quad (2.2)$$

Powyższe równanie to tak zwane prawo Darcy'ego mówiące że dla małych b średnia prędkość jest proporcjonalna do lokalnego gradientu ciśnienia. Od teraz będziemy pomijać znak średniej, a zagadnienie traktujemy dwuwymiarowo i tak też rozumiemy występujące operatory



Rysunek 2.1: Palce lepkości powstające w radialnej komórce Hele-Shawa



Rysunek 2.2: Komórka Hele-Shawa wraz z oznaczeniami osi współrzędnych

różniczkowe. Dla cieczy nieściśliwej zachodzi:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

Podstawiając (2.2) do (2.3) otrzymujemy równanie na ciśnienie p w postaci równania Laplace'a

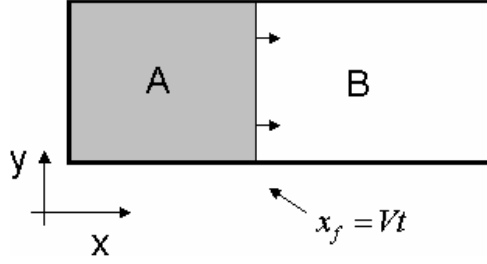
$$\nabla^2 p(x, y) = \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

Z ciągłości przepływu cieczy na powierzchni rozdziału płynów wynika, że prędkość tej powierzchni jest proporcjonalna do $\hat{n} \cdot \nabla p$.

Niestabilność Zbadajmy teraz stabilność frontu pomiędzy dwoma płynami metodą liniowej analizy stabilności wokół rozwiązania jednorodnego. Prawo Darcy'ego (2.2) zapisane z użyciem zmiennej $\kappa = b^2/12$ ma postać:

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p. \quad (2.5)$$

Opiszmy najpierw przypadek jednorodnie przesuującego się frontu, jak na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Jednorodnie przesuujący się front w komórce Hele-Shawa.

W obu płynach ciśnienie spełnia równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 p_A = \nabla^2 p_B = 0. \quad (2.6)$$

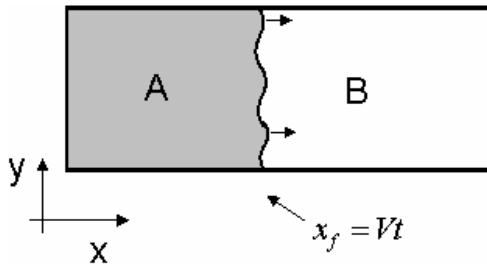
Kształt przesuującego się jednorodnie frontu opisany jest równaniem:

$$x_f(y, t) = Vt \quad (2.7)$$

gdzie x_f to współrzędna pozioma punktu na brzegu, y oznacza współrzędną pionową punktu na brzegu, t jest chwilą czasu, a V prędkością frontu. Ciśnienie jest ciągłe na brzegu zatem $p_A(x_f) = p_B(x_f)$. Z tych zależności, prawa Darcy'ego i $v_A(x_f) = v_B(x_f) = V$ możemy znaleźć ciśnienie po obu stronach frontu.

$$\begin{aligned} p_A &= -\frac{\mu_A}{\kappa} Vx \\ p_B &= -\frac{\mu_B}{\kappa} Vx + \left(\frac{\mu_B}{\kappa} - \frac{\mu_A}{\kappa} \right) V^2 t \end{aligned} \quad (2.8)$$

Czy tak poruszający się front jest stabilny? Zbadajmy ewolucję takiego frontu, dodając do jego kształtu, małe, periodyczne zaburzenie, jak na rysunku 2.4. Przyjmijmy teraz kształt



Rysunek 2.4: Jednorodny przepływ w komórce Hele-Shawa z małym, periodycznym zaburzeniem frontu.

frontu dany wzorem

$$x_f(y, t) = Vt + \varepsilon \text{Re}[e^{iky + \sigma(k)t}]. \quad (2.9)$$

Będziemy badać znak $\sigma(k)$ i jeśli $\sigma(k) > 0$ to dla zaburzenia o wektorze falowym k front jest niestabilny. Prędkość frontu ma postać:

$$v_f = V + \varepsilon \sigma \text{Re}[e^{iky + \sigma(k)t}] = v_A(x_f) = v_B(x_f) \quad (2.10)$$

Ciśnienia po obu stronach frontu, przy takiej prędkości mają postać:

$$\begin{aligned} p_A &= -\frac{\mu_A}{\kappa} \left(Vx + \frac{\varepsilon\sigma(k)}{k} \operatorname{Re}[e^{iky+k(x-Vt)+\sigma(k)t}] \right) \\ p_B &= -\frac{\mu_B}{\kappa} \left(Vx - \frac{\varepsilon\sigma(k)}{k} \operatorname{Re}[e^{iky-k(x-Vt)+\sigma(k)t}] \right) + \left(\frac{\mu_B}{\kappa} - \frac{\mu_A}{\kappa} \right) V^2 t \end{aligned} \quad (2.11)$$

Podstawiając $x = x_f$ i korzystając z ciągłości ciśnienia na froncie otrzymujemy z dokładnością do członów liniowych w ε

$$\mu_A \left(V + \frac{\sigma(k)}{k} \right) = \mu_B \left(V - \frac{\sigma(k)}{k} \right). \quad (2.12)$$

Po przekształceniu otrzymujemy związek dyspersyjny postaci:

$$\sigma(k) = Vk \frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_B + \mu_A} \quad (2.13)$$

Stąd widać, że $\mu_B > \mu_A$ jest warunkiem niestabilności, oraz że krótsze fale (większe k) są bardziej niestabilne, tzn. rosną szybciej. Mechanizm tej niestabilności można zrozumieć na przykładzie pojedynczego zaburzenia frontu, w postaci „wybrzuszenia”. Przyjrzyjmy się zatem poziomicom pola Laplace’a wokół takich wybrzuszenia, rysunek 2.5. Gradient pola wokół



Rysunek 2.5: Poziomice pola wokół szerokiego i wąskiego wybrzuszenia na froncie.

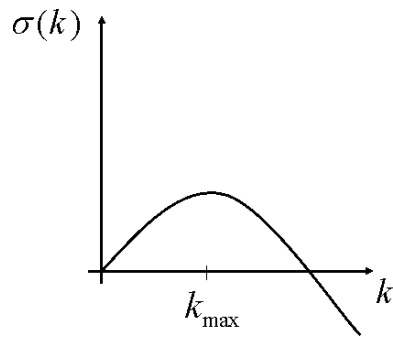
wybrzuszenia staje się większy, analogicznie do pola przy czubku naładowanej igły. Prowadzi to do szybszego wzrostu, który jeszcze bardziej zwiększa gradient pola. Ponadto im węższe wybrzuszenie, tym gradient jest większy osiągając nieskończoność dla infimezmalnego zaburzenia. Jest to odpowiednik problemu znanego jako katastrofa w nadfiolecie w zagadnieniu promieniowania ciała doskonale czarnego. Fizycznie takich zachowań oczywiście się nie obserwuje, gdyż zawsze w procesach opisywanych wzrostem Laplace’a musi istnieć mechanizm zapobiegający zbyt dużym gradientom. W przypadku palców lepkości jest to napięcie powierzchniowe. Przy jego uwzględnieniu ciśnienie nie jest ciągłe na froncie, a skok jego wartości wyraża się przez:

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{2}{b} + K \right), \quad (2.14)$$

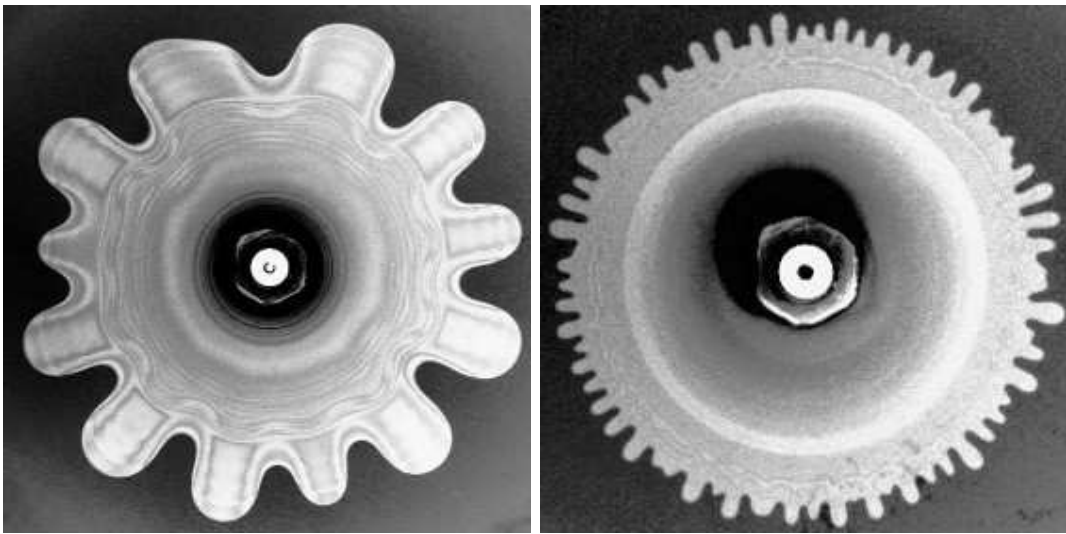
gdzie γ to napięcie powierzchniowe, K to krzywizna frontu. Wyprowadzony z uwzględnieniem napięcia powierzchniowego związek dyspersyjny ma postać [5]

$$\sigma(k) = Vk \frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_B + \mu_A} - k^3 \frac{\gamma\kappa}{\mu_B + \mu_A}. \quad (2.15)$$

Taki związek dyspersyjny usuwa problem katastrofy w nadfiolecie i daje dobrze ustaloną długość fali, która jest maksymalnie wzmacniana. Schematyczny wykres $\sigma(k)$ przedstawia rysunek 2.6. Widzimy na nim, że tylko zaburzenia do pewnej granicznej wartości są wzmacniane, natomiast istnieje jedno maksimum, odpowiadające maksymalnie wzmacnianej długości fali



Rysunek 2.6: Związek dyspersyjny dla palców lepkości z uwzględnieniem napięcia powierzchniowego.



Rysunek 2.7: Niestabilność frontu w radialnej komórce Hele-Shawa. Dla różnych prędkości frontu, różne długości fali zaburzenia są maksymalnie wzmacniane.

zaburzenia k_{max} . Znajduje to potwierdzenie eksperymentalne, jak widać na rysunku 2.7, gdzie widać m.in. że długość maksymalnie wzmacnianej fali maleje ze wzrostem prędkości wstrzykiwanej cieczy (po prawej). W innych procesach wzrostu Laplace'a napięcie powierzchniowe również może odpowiadać za mechanizm zapobiegania dużym gradientom pola, ale np. w DLA, czy osadzaniu elektrolitycznym długość fali zaburzenia jest ograniczona skończonym rozmiarem cząstek i fale od długości krótszej niż rozmiar cząstek po prostu nie występują.

2.2. Osadzanie elektrolityczne

W typowym eksperymencie osadzania elektrolitycznego dwie elektrody zanurzone są w roztworze jonowym i obserwowana jest struktura tworząca się z atomów metalu osadzających się na katodzie. Elektrody i jony są z tego samego metalu a stacjonarność koncentracji uzyskuje się przez rozpuszczanie anody. Roztwór znajdować się może pomiędzy dwiema płytami jak w komórce Hele-Shawa, przez co opis zjawiska może być zarówno dwu- jak i trójwymiarowy. Wzrost osadzającej się struktury podlega wpływowi wielu równoczesnych procesów, które prowadzą do skomplikowanego zachowania układu w funkcji przyłożonego napięcia i koncentracji.

Przy pewnych warunkach osadzanie elektrolityczne odpowiada jednak wzrostowi Laplace'a. Należy przyjąć, że

- układ jest lokalnie w stanie równowagi termodynamicznej,
- efekty konwekcji są zanedbywalne,
- stężenie jonów jest małe,
- nie zachodzi elektroliza.

Założmy ponadto, że mamy tylko jeden rodzaj jonów o koncentracji c . Całkowity prąd \vec{j} (wywołany zarówno dyfuzją jak i dryfem wywołanym polem) jest proporcjonalny do gradientu potencjału elektrochemicznego, który dla małych stężeń wyraża się wzorem [7]:

$$\mu = A(T) + k_B T \log(c) + q\Phi \quad (2.16)$$

gdzie A jest pewną funkcją temperatury T , k_B stałą Boltzmanna, q ładunkiem jonu a Φ potencjałem elektrycznym. Następnie wprowadzamy pole

$$u = \frac{\mu}{qV} \quad (2.17)$$

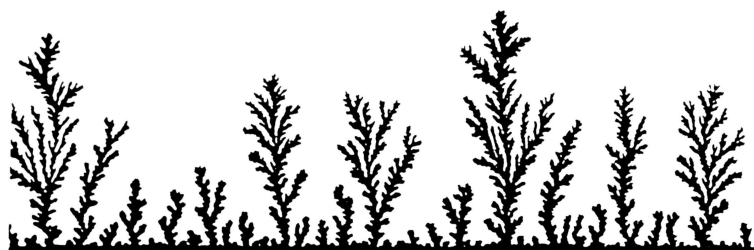
gdzie V oznacza przyłożone napięcie. Zauważmy, że w granicy quazistacjonarnej, gdy skala czasu obserwacji jest znacznie większa od skali czasu dochodzenia układu do stanu stacjonarnego, dywergencja całkowitego prądu znika. Zatem

$$\nabla \cdot \vec{j} = \nabla^2 u = 0. \quad (2.18)$$

Rozszerzając powyższy warunek na powierzchnię rozdziału faz, otrzymujemy warunek na ruch brzegu

$$\vec{v}_n \propto \hat{n} \cdot \vec{j} = \hat{n} \cdot \nabla u \quad (2.19)$$

Wynik typowego eksperymentu osadzania elektrolitycznego, ukazujący charakterystyczne zjawiska rywalizacji i rozszczepiania, przedstawia rysunek 2.8.



Rysunek 2.8: Wynik typowego eksperymentu osadzania elektrolitycznego, dla płaskiej elektrody. (Ilustracja za [4])

2.3. Krzepnięcie

W procesie nierównowagowego krzepnięcia interesować nas będą dwa skrajne przypadki:

- krystalizacja przechłodzonej, jednoskładnikowej cieczy,

- izotermiczna krystalizacja w rozrzedzonym roztworze.

W pierwszym przypadku parametrem całkowicie opisującym zachodzący proces jest temperatura, za to w izotermicznej krystalizacji w roztworze będzie to koncentracja dyfundujących w roztworze atomów. Oba zachodzące procesy opisane są odpowiednio przez równanie przewodnictwa cieplnego i równanie dyfuzji. Oznaczając pola temperatury T lub koncentracji c przez zmienną u da się opisać je takim samym równaniem:

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = C \nabla^2 u(\vec{x}, t), \quad (2.20)$$

gdzie C może oznaczać stałą dyfuzji lub przewodnictwa cieplnego. Zakładając że charakterystyczna skala długości układu podzielona przez prędkość powierzchni rozdziału faz jest mała w porównaniu do charakterystycznego czasu relaksacji $u(\vec{x}, t)$ do rozkładu stacjonarnego dla danego kształtu brzegu, można uprościć opis do równania Laplace'a. W obu przypadkach, z równania ciągłości na brzegu wynikać będzie prędkość przesuwania się powierzchni rozdziału faz proporcjonalna do $\hat{n} \cdot \nabla u$. Uwzględniając napięcie powierzchniowe, warunek brzegowy na $u(\vec{x}, t)$ w przypadku przechłodzonej cieczy ma postać:

$$u(\vec{x}, t) = T_m \left(1 - \frac{\gamma K}{H_L} \right), \quad (2.21)$$

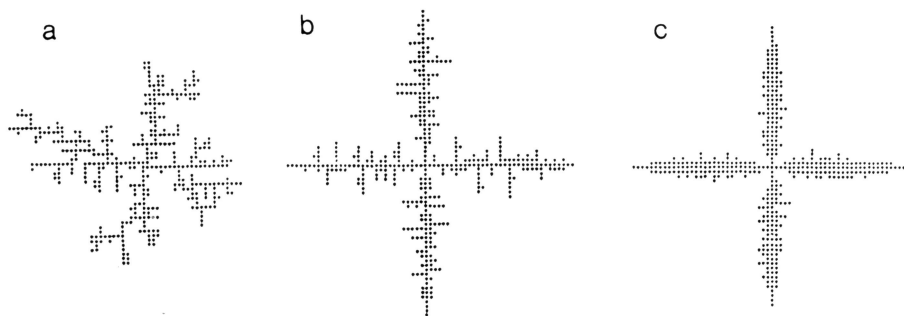
gdzie T_m - temperatura topnienia, γ - napięcie powierzchniowe, K - krzywizna frontu, a H_L - ciepło topnienia.

2.4. DLA

Model zwany DLA (Diffusion-Limited Aggregation, czyli agregacja ograniczona dyfuzją) został wprowadzony przez Wittena i Sandersa w 1981 [8] jako bardzo uproszczony, komputerowy model osadzania elektrolitycznego i izotermicznego krzepnięcia. Uproszczenie polega na przyjęciu, że jony podlegają tylko i wyłącznie dyfuzji, a gdy zetkną się z katodą, przyklejają się do niej. Realizacja komputerowa jest jeszcze prostsza. Na dwu lub trójwymiarowej siatce zera oznaczają puste miejsca, a jedyne miejsca zajęte przez jony metalu. W pewnym miejscu wewnątrz siatki umieszczamy jądro wzrostu (ognisko krystalizacji), może to być jeden punkt jak również np. koło. W dużej odległości od ogniska, w losowo wybranym miejscu wpuszczamy pojedynczą cząstkę podlegającą klasycznym ruchom Browna. W równym prawdopodobieństwie w każdym kroku czasowym przesuwa się ona w jednym z czterech kierunków. Gdy napotka ognisko tzn. w jej najbliższym sąsiedztwie znajduje się inna cząstka, przestaje się poruszać i pozostaje w tym samym miejscu stając się częścią jądra. Po przyklejeniu się jednej cząstki, kolejne uwalniane są analogicznie, jedna po drugiej. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia pojedynczej cząstki w danej chwili czasu t , w zadanym miejscu x spełnia równanie dyfuzji.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \nabla^2 P(x, t) \quad (2.22)$$

Wbrew intuicji tworząca się w tym modelu struktura nie będzie wcale „ciasno upakowana”, a tworzyć się będzie losowy fraktal. Oczywiście jego jego kształt zależeć będzie od fluktuacji i z każdą realizacją algorytmu przy tych samych warunkach początkowych i brzegowych będzie się zmieniał. W 1986 Kertesz i Vicsek [9] zmodyfikowali algorytm w celu wyeliminowania wpływu fluktuacji. W ich wersji, cząstka powiększała jądro, dopiero gdy m cząstek dotarło wcześniej do tego punktu. Kształty otrzymywanych figur dla różnych wartości parametru m przedstawia rysunek 2.9.



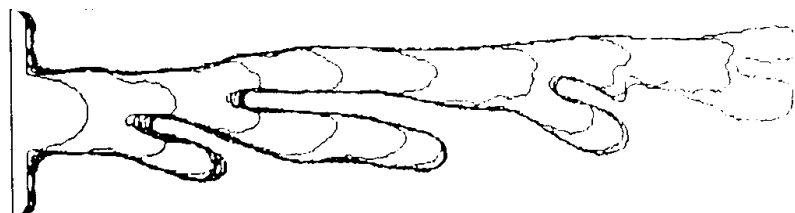
Rysunek 2.9: Wyniki symulacji zmodyfikowanego DLA z redukcją szumu, dla różnych wartości parametru m . a) $m = 2$ b) $m = 20$ c) $m = 400$. (Ilustracja za [4])

Dla m dążącego do nieskończoności otrzymuje się stacjonarne rozwiązanie równania na gęstość prawdopodobieństwa, będące równaniem Laplace'a i wzrost jądra w kierunku gradientu P na brzegu. Z eksperymentu numerycznego wynika, że dla dużych m struktura staje się bardziej stabilna i zwarta.

2.5. Rywalizacja i rozszczepianie

Poza wynikami teoretycznymi opartymi na liniowej analizie stabilności, bardzo mało wiadomo o dalszej ewolucji frontu w problemie wzrostu Laplace'a. Istotną rolę odgrywają w niej natomiast zjawiska rywalizacji i rozszczepiania. Poza niewielką ilości prostych przypadków nie dają się one jednak opisać ilościowo. Pozostaniemy jedynie na opisie fenomenologicznym, próbę opisu ilościowego pozostawiając na później. Efekt rywalizacji najlepiej widoczny jest na rysunku 2.8. Widoczne „większe gałązki” mają w swoim otoczeniu dużo mniejszych sąsiadów. We wcześniejszej fazie ewolucji, gdy wzrastająca struktura była jeszcze niewielka, nie było dużego zróżnicowania rozmiarów gałązek. Pod wpływem fluktuacji część z nich stała się odrobinę większa, następnie mechanizm pokazany na rysunku 2.5 spowodował ich relatywnie szybszy wzrost. Gdy w otoczeniu małej gałązki znajduje się wyższy sąsiad zmniejsza to wartość gradientu pola wokół niej i hamuje jej wzrost. Właśnie to zjawisko nazywamy rywalizacją. Analiza tego efektu w wprowadzanym w następnych rozdziałach modelu jest jednym z głównych celów tej pracy.

Rozszczepianie, zwane w literaturze „tip-splitting”, to zjawisko odpowiedzialne za powstawanie krzaczastych gałązek. Niestabilny front ewoluuje z małych zaburzeń w figury przypominające podługne palce. Przy pewnej długości takiego palca, niestabilność jego powierzchni bocznych przestaje być zaniedbywalna i z boku zaczyna wyrastać kolejny palec. Proces widać na rysunku 2.10, na przykładzie palców lepkości w prostokątnej komórce Hele-Shawa. Zjawisko



Rysunek 2.10: Zjawisko rozszczepiania w komórce Hele-Shawa.

może się powtarzać dla kolejnych odnóży i w ten sposób powstają gałązkowe struktury jak na

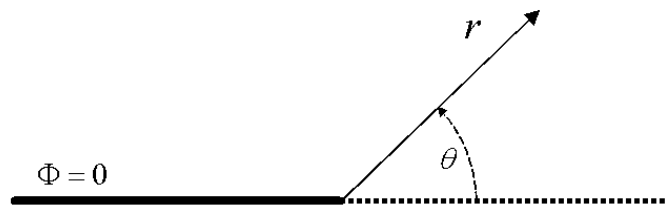
rysunku 2.8.

2.6. Modele igłowe

Motywacją do rozpatrywania ewolucji igieł, jest asymptotyczne zachowanie wzrastających laplace'owsko struktur. Graniczna postać struktur DLA przy redukcji szumu również daje wyraźne igły. Przy bardzo małym napięciu powierzchniowym palce lepkości przyjmują kształt bardzo wąskich, prawie igłowych kanałów. Sugeruje to przybliżone modelowanie ewoluujących obszarów przez skończoną liczbę igieł rosnących tylko na jednym swoim końcu. Takie uproszczenie pozwoli na analityczne podejście do wzrostu Laplace'a i poszukiwanie w tym modelu takich zjawisk jak wspomniana rywalizacja.

Pierwsze modele igłowe wzrostu Laplace'a pojawiły się w 1986 w pracach Rossiego [10] i Meakina [11] jako modyfikacja modelu DLA. Jądrem powstającej struktury była „pozioma” prosta, do której przyklejały się kolejne cząstki, ale tylko wtedy, gdy posiadały sąsiada pod sobą a nie w jednym z czterech. Powstające w ten sposób struktury miały kształt równoległych igieł o różnych długościach. Ideą tej zmiany było rozdzielenie procesów rywalizacji, czyli hamowania mniejszych igieł przez znajdujące się w ich pobliżu większe igły (opartej na pochłanianiu przez większą igłę cząstek, które nie mogły dotrzeć do mniejszej), od efektu „tip-splitting” czyli rozgałęziania się struktury na boki. Wyniki doświadczeń numerycznych w DLA zależą jednak od realizacji procesu i są rządzone przez fluktuacje. W tym modelu również można było stosować metodę redukcji szumu jak w klasycznym DLA. W pracach [12], [13] i [14] rozważano również fluktuujący DLA, ale igły nie rosły już prosto, lecz mogły się wyginać. Kolejne cząstki agregatu mogły przyłączać się tylko do ostatniej cząstki na igle. Po przyłączeniu się kolejnej cząstki, to ona stawała się nowym czubkiem igły. Cates [15] rozpoczął badania nad deterministyczną, pozbawioną szumu wersją modelu igłowego metodą pola średniego. Szep i Lugosi [16] podeszli do tego samego zagadnienia metodą odwzorowań konforemnych, natomiast Kessler i Family [17] i Evertsz [18] otrzymali już tą metodą wartości wymiarów fraktalnych powstających igłowo struktur Laplace'owskich. Dynamikę rosnących laplace'owsko prostych igieł otrzymali w przypadku radialnie rosnących igieł Derrida i Hakim [19], a dla przypadku równoległych Krug [20]. Sprecyzujemy teraz model wzrostu stosowany w dwóch ostatnich pracach.

Rozważmy rozwiązanie równania Laplace'a wokół czubka igły, czyli tam gdzie odbywać ma się wzrost. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2.11. Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie



Rysunek 2.11: Oznaczenie zmiennych wokół igły

wokół czubka igły przy warunku brzegowym $\Phi = 0$ na igle ma postać

$$\Phi(r, \theta) = C\sqrt{r} \cos(\theta/2), \quad (2.23)$$

gdzie C oznacza pewną stałą. Gradient Φ wokół czubka igły ma postać:

$$\nabla\Phi(r, \theta) = \frac{C}{2\sqrt{r}} (\cos(\theta/2) \hat{e}_r + \sin(\theta/2) \hat{e}_\theta). \quad (2.24)$$

Widać wyraźnie, że na samym czubku igły gradient ma dobrze określony kierunek, ale jego wartość jest nieskończona. Nie możemy zatem w modelu igłowym przyjmować prędkości wzrostu igły proporcjonalnej do wartości gradientu na czubku. Odpowiada za to nieskończenie mała szerokość igieł, co skutkuje pojawieniem się osobliwości. Problem jest analogiczny do rozważanego przy analizie stabilności. Omówiliśmy tam zjawiska ograniczające powstawanie dużych gradientów np. napięcie powierzchniowe. W modelu igłowym również musimy wprowadzić takie ograniczenie odwołując się do intuicji z modelu DLA. Igła wzrasta dzięki przyklejaniu się do niej cząstek. Potraktujmy zatem czubek igły jako kulę o promieniu a , małym w porównaniu do rozmiarów igły i niezależnym od czasu i jej kształtu. Całkowity strumień cząstek przyklejających się do takiego czubka to całka z $\hat{n} \cdot \nabla\Phi$ po powierzchni małej sfery. Wartość całki jest skończona i proporcjonalna do stałej C w rozwiązaniu (2.23). Wiedząc zatem, że wokół czubka igły (znajdującego się w punkcie \vec{r}_k) w odległości \vec{r} od niego, mamy

$$|\nabla\Phi(\vec{r} + \vec{r}_k)| \propto \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (2.25)$$

Za [19] definiujemy prędkość wzrostu igły E jako:

$$E = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{r} |\nabla\Phi(\vec{r} + \vec{r}_k)|] \quad (2.26)$$

Wzrost igły z prędkością daną przez (2.26) będziemy nazywać wzrostem laplace'owskim. Modele igłowe możemy teraz podzielić na trzy grupy

1. „proste igły” - rosnące w jednym, zadanym kierunku z laplace'owską prędkością.
2. „giętkie igły” - rosnące w kierunku $\nabla\Phi$ na czubku, ale ze stałą prędkością.
3. „pełny model” - igły rosnące w kierunku $\nabla\Phi$ na czubku z laplace'owską prędkością.

Wersja prostych igieł badana była w pracach [19] i [20]. Model giętkich igieł w geometrii półprzestrzeni opisany został w [24]. W rozdziale 4 badać będziemy model prostych igieł, natomiast od rozdziału 5 do końca pracy opisywane będą modele giętkich igieł i pełny w geometrii kanału z różnymi warunkami brzegowymi i wykorzystaniem nowego, wyprowadzonego przez nas równania Loewnera.

Rozdział 3

Metoda odwzorowań konforemnych

W pracy rozpatruję wyłącznie modele dwuwymiarowe, naturalne zatem wydaje się opisywanie punktów przez zmienną zespoloną z zamiast przez współrzędne kartezjańskie $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z = x + iy \quad (3.1)$$

Przypomnimy podstawowe fakty z teorii funkcji analitycznych, geometrii różniczkowej i równań różniczkowych cząstkowych potrzebne w dalszej części pracy, opierając się w znacznej mierze na pozycji [22].

Łuki Jordana Każdej liczbie t należącej do przedziału domkniętego I przyporządkujemy pewną liczbę zespoloną $z(t) = x(t) + iy(t)$. Granicę i ciągłość funkcji $z(t)$ definiuje się analogicznie do funkcji rzeczywistych, jeśli dla każdego ciągu liczb $\{t_n\}$ danego przedziału I , gdzie $t_n \neq t_0$ i $t_n \rightarrow t_0$ mamy $z(t_n) \rightarrow z_0$ to mówimy że funkcja $z(t)$ ma w punkcie t_0 granicę z_0 . Funkcja $z(t)$ jest ciągła w punkcie t_0 jeśli $z_0 = z(t_0)$. Mówimy, że funkcja jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie I . Zbiór punktów określonych równaniem $z = z(t)$, gdzie $z(t)$ jest ciągłą funkcją zespoloną, różną od stałej nazywamy linią lub krzywą.

Pochodną funkcji $z(t)$ w punkcie t_0 określamy wzorem:

$$z'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right] = x'(t_0) + iy'(t_0) \quad (3.2)$$

Krzywą $z(t)$ określoną na przedziale domkniętym I nazywamy łukiem Jordana jeśli nie ma punktów wielokrotnych tzn. jeżeli $z(t_1) = z(t_2)$ to $t_1 = t_2$, oraz na całym przedziale I istnieje ciągła pochodna $z'(t)$, wszędzie różna od zera.

Funkcje zespolone Niech E będzie dowolnym zbiorem płaskim, Jeżeli każdemu punktowi $z \in E$ przyporządkujemy pewną liczbę zespoloną

$$w = f(z) \quad (3.3)$$

to mówimy, że w zbiorze E została określona *funkcja zespolona* $f(z)$ zmiennej zespolonej z . Zbiór E' złożony ze wszystkich wartości w nazywamy *zbiorem wartości* funkcji $f(z)$ i oznaczamy $f(E)$. Mówimy, że funkcja $f(z)$ odwzorowuje (przekształca) zbiór E w $E' = f(E)$. Funkcję $f(z)$ nazywamy *jednokrotną* jeśli dla $z_1 \neq z_2$ mamy $f(z_1) \neq f(z_2)$.

3.1. Pochodna zespolona, równania Cauchy-Riemanna

Niech $f(z)$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu z_0 . Mówimy, że ma ona *pochodną zespoloną* w punkcie z_0 jeśli istnieje skończona granica

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \quad (3.4)$$

gdzie przyrost Δz dąży do zera przez dowolne wartości zespolone $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, różne od zera. Funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna w obszarze, gdy ma pochodną $f'(z)$ w każdym punkcie obszaru. Funkcję taką nazywamy *funkcją analityczną* lub *funkcją holomorficzną*. Zbadajmy teraz, jak zachowuje się część rzeczywista i urojona funkcji

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.5)$$

w punkcie $z = x + iy$, w którym istnieje pochodna $f'(z)$. Niech przyrost $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dąży do zera przez wartości rzeczywiste. Wówczas $\Delta y = 0$, a więc

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \quad (3.6)$$

Gdy $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, wówczas oznaczając przez u_x i v_x pochodne cząstkowe funkcji u i v po x otrzymujemy

$$f'(z) = u_x + iv_x. \quad (3.7)$$

Niech teraz przyrost Δz dąży do zera przez wartości urojone. Wówczas $\Delta x = 0$, a więc

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}, \quad (3.8)$$

skąd, gdy $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$f'(z) = (u_y + iv_y)/i = v_y - iu_y. \quad (3.9)$$

Prawe strony równości (3.7) i (3.9) z założenia są równe, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.10)$$

Związki (3.10) nazywamy *równaniami Cauchy-Riemanna*. Zauważmy, że gdy Δz będzie dążyć do zera inną, niż dwie zbadane, drogą otrzymamy w wyniku kombinację liniową równań Cauchy-Riemanna, przez co ich spełnienie zapewnia tę samą wartość granicy (3.4) dla dowolnej drogi.

3.2. Odwzorowanie konforemne, Twierdzenie Riemanna

Niech funkcja

$$w = f(z) \quad (3.11)$$

będzie różniczkowalna (analityczna) w pewnym otoczeniu punktu z_0 i niech przekształca je na otoczenie punktu $w_0 = f(z_0)$. Załóżmy ponadto, że $f'(z_0) \neq 0$. Łuk Jordana C o równaniu $z = z(t)$, gdzie $t_0 \leq t \leq t_1$, wychodzący z punktu $z_0 = z(t_0)$, przechodzi po zadziałaniu

przekształceniem (3.11) w krzywą Γ o równaniu $w(t) = f(z(t))$, wychodzącą z punktu w_0 . Styczna do C w punkcie z_0 tworzy z osią x kąt $\phi = \arg z'(t)$. Z tożsamości

$$\frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(z(t)) - f(z(t_0))}{z(t) - z(t_0)} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \quad (3.12)$$

przechodząc z $t \rightarrow t_0$ otrzymujemy

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \quad (3.13)$$

Zatem styczna do krzywej Γ w punkcie w_0 tworzy z osią x kąt

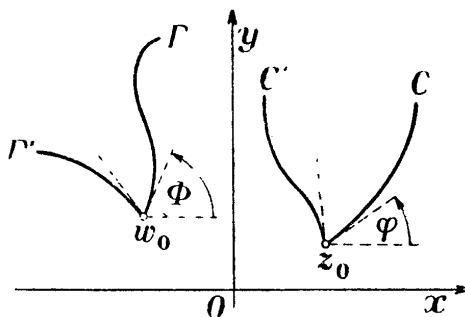
$$\Phi = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0)z'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0) + \phi \quad (3.14)$$

Nachylenie do osi x każdego łuku Jordana wychodzącego z z_0 zmienia się przy odwzorowaniu (3.11) o stały kąt równy argumentowi pochodnej $f'(z_0)$.

Niech funkcja $w = f(z)$ będzie ciągła w pewnym obszarze D i niech przekształca ten obszar w D' . Mówimy, że odwzorowanie jest w punkcie $z_0 \in D$ *konforemne*, jeżeli każdym dwóm łukom Jordana C i C' wychodzącym z punktu z_0 odpowiadają w obszarze D' dwie krzywe Γ i Γ' mające w punkcie $w_0 = f(z_0)$ styczne i jeżeli zachodzi

$$\angle(\Gamma, \Gamma') = \angle(C, C') \quad (3.15)$$

gdzie $\angle(C, C')$ jest kątem o wierzchołku w z_0 , którego pierwszym ramieniem jest styczna do C w z_0 , drugim styczna do C' w z_0 .



Założmy teraz że $f(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze D i że $f'(z_0) \neq 0$. Niech krzywe C i C' tworzą z osią x w punkcie z_0 kąty ϕ i ϕ' , a krzywe Γ i Γ' w punkcie w_0 kąty Φ i Φ' . Z równości (3.14) mamy

$$\Phi = \arg f'(z_0) + \phi, \quad \Phi' = \arg f'(z_0) + \phi'. \quad (3.16)$$

Odejmując równości dostajemy $\Phi - \Phi' = \phi - \phi'$ co jest dokładnie równością (3.15). Zatem w każdym punkcie z_0 , w którym $f'(z_0) \neq 0$ funkcja analityczna, $f(z)$ jest odwzorowaniem konforemnym. Równość nie zachodziłaby, gdyby $f'(z_0)$ nie miało wartości niezależnej od drogi po jakiej dążymy z Δz do zera. Wynika stąd że spełnienie równań Cauchy-Riemanna i $f'(z_0) \neq 0$ zapewnia konforemność odwzorowania.

Jeżeli funkcja analityczna $f(z)$ przekształca D na $D' = f(D)$ wzajemnie jednoznacznie (co pociąga za sobą $f'(z) \neq 0$, bo w otoczeniu punktu gdzie $f'(z) = 0$ funkcja nie jest

jednokrotna), mówimy, że jest *odwzorowaniem konforemnym* D na D' . Jeżeli obszar D zawiera punkt ∞ to odwzorowanie $f(z)$ może nie być analityczne w tym punkcie. Odwzorowanie odwrotne do konforemnego istnieje i również jest konforemne. Złożenie dwóch odwzorowań konforemnych jest także konforemne.

Podstawowym pytaniem jest: kiedy dwa obszary jednoczłonne D_1 i D_2 są przekształcalne konforemnie jeden w drugi? Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Riemanna, które przytoczymy tutaj bez dowodu. Dowody Kobe i Caratheodory'ego znaleźć można w pozycji [22].

Twierdzenie Riemanna (podstawowe). *Każdy jednoczłonny obszar płaski D , którego brzeg zawiera więcej niż jeden punkt, daje się przekształcić konforemnie w koło $|w| < 1$ tak, aby dowolnie obrany punkt $z_0 \in D$ przeszedł w środek koła.*

Jeżeli mamy dwa obszary D_1 i D_2 spełniające założenia powyższego twierdzenia, to wiemy że istnieją funkcje f_1 i f_2 przekształcające te obszary w koło jednostkowe. Wówczas $f_2^{-1} \circ f_1$ jest odwzorowaniem konforemnym i przekształca D_1 w D_2 . Pozostaje pytanie o jednoznaczność takiego odwzorowania. Załóżmy że dwie funkcje f i \tilde{f} odwzorowują D_1 w D_2 . Wówczas $f^{-1} \circ \tilde{f}$ jest automorfizmem konforemnym obszaru D_1 , natomiast $f \circ \tilde{f}^{-1}$ jest automorfizmem konforemnym obszaru D_2 . *Odwzorowanie konforemne dwóch obszarów wyznaczone jest zatem jednoznacznie, z dokładnością do automorfizmu konforemnego jednego z nich.*

3.3. Funkcje harmoniczne, a funkcje analityczne

Funkcję rzeczywistą $u(x, y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych x, y nazywamy *funkcją harmoniczną*, gdy spełnia równanie różniczkowe Laplace'a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.17)$$

Każda funkcja stała jest harmoniczną. Równanie Laplace'a jest liniowe, zatem każda kombinacja liniowa funkcji harmonicznymi jest funkcją harmoniczną.

Lemat: *Część rzeczywista $u(x, y)$ każdej funkcji analitycznej $f(z) = u + iv$ w pewnym obszarze D jest funkcją harmoniczną*

Dowód: Z równań Cauchy-Riemanna (3.10) wynika:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Część urojona każdej funkcji analitycznej jest również funkcją harmoniczną, gdyż staje się częścią rzeczywistą po pomnożeniu funkcji przez jednostkę urojoną i .

Udowodnimy teraz podstawowy lemat, będący kluczowym elementem dalszej części pracy.

Lemat *Niech $F(u, v)$ będzie funkcją harmoniczną na obszarze D' spełniającą warunek brzegowy $F(u, v) = g(u, v)$, dla $(u, v) \in \partial D'$. Niech funkcja $f(z) = u + iv$, gdzie $z = x + iy$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ będzie odwzorowaniem konforemnym z obszaru D na D' . Załóżmy ponadto że $f(z)$ jest ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi dwóch pierwszych rzędów. Wówczas funkcja*

$$\Phi(x, y) = F[u(x, y), v(x, y)] \quad (3.19)$$

jest harmoniczną w obszarze D i spełnia warunek brzegowy $\Phi(x, y) = g[u(x, y), v(x, y)]$ dla $(x, y) \in \partial D$

Dowód. Spełnianie warunku brzegowego wynika bezpośrednio z podstawienia warunku na F do (3.19). Z wcześniejszego lematu oraz równań Cauchy-Riemanna (3.10) wiemy, że

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \\
\Delta v &= 0 \\
u_x v_x + u_y v_y &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

Różniczkując (3.19) po x i y otrzymujemy

$$\Phi_x = F_u u_x + F_v v_x, \quad \Phi_y = F_u u_y + F_v v_y. \tag{3.21}$$

Różniczkując drugi raz

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} &= F_{uu} u_x^2 + 2F_{uv} v_x u_x + F_{vv} v_x^2 + F_u u_{xx} + F_v v_{xx} \\
\Phi_{yy} &= F_{uu} u_y^2 + 2F_{uv} v_y u_y + F_{vv} v_y^2 + F_u u_{yy} + F_v v_{yy}.
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Dodajmy stronami, uwzględniając równości (3.20)

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = F_{uu} u_x^2 + F_{uu} u_y^2 + F_{vv} v_x^2 + F_{vv} v_y^2 = (F_{uu} + F_{vv})(u_x^2 + v_y^2). \tag{3.23}$$

Prawa strona jest równa zero, gdyż funkcja $F(u, v)$ jest harmoniczną w obszarze D' , zatem funkcja (3.19) jest harmoniczną w obszarze D , c.b.d.o.

Powyższy lemat da się również uogólnić na warunek brzegowy Neumana dla równania Laplace'a, czyli zadanie na brzegu pochodnej cząstkowej prostopadłej do brzegu. Powyższy lemat daje bardzo użyteczne narzędzie do rozwiązywania problemu Dirichleta i Neumana w zagadnieniach dwuwymiarowych (znajdowania funkcji harmonicznego spełniającej dany warunek brzegowy), gdyż sprowadza je do znalezienia odwzorowania konforemego na obszar, w którym rozwiązanie równania Laplace'a jest znane.

3.4. Prędkość wzrostu w modelu igłowym

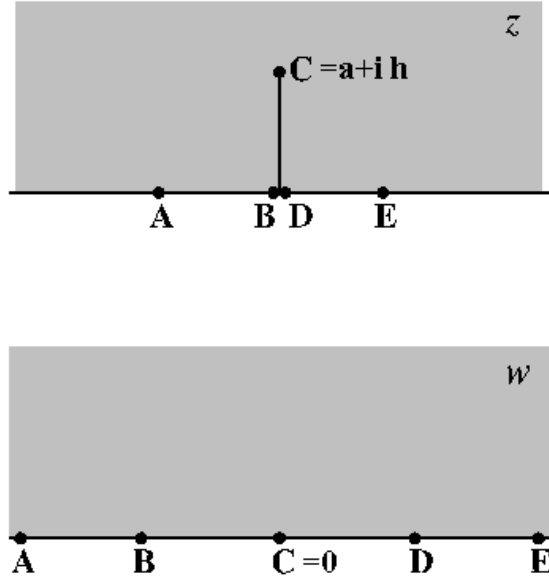
Na początku omówmy jeden przykład zastosowania metody odwzorowań konforemnych, który jak się okaże, jest kluczowy dla dalszej części pracy. Rozpatrzmy prostą igłę o wysokości h wyrastającą z punktu a na osi rzeczywistej. Chcemy znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a w obszarze górnej półpłaszczyzny, bez igły. Odwzorowaniem „wciągającym” igłę w oś rzeczywistą, czyli odwzorowującym interesujący nas obszar na półpłaszczyznę bez igły jest odwzorowanie.

$$w(z) = \sqrt{(z - a)^2 + h^2} \tag{3.24}$$

Odwzorowanie odwrotne ma postać $z(w) = \sqrt{w^2 - h^2} + a$ i daje się rozszerzyć na ciągłą funkcję brzegu obszaru. Zachowanie punktów na brzegu obszaru przedstawia rysunek 3.1. Istnieje tutaj pewna subtelność matematyczna związana z pierwiastkiem. Funkcja ta jest jednoznaczna na górnej półpłaszczyźnie, gdyż zawsze tylko jeden z pierwiastków ma część urojoną większą od zera, lecz powszechnie przyjmuje się za domyślny pierwiastek ten, dla którego część rzeczywista jest większa od zera. Wówczas trzeba użyć definicji

$$w(z) = \frac{\operatorname{Re}(z - a)}{|\operatorname{Re}(z - a)|} \sqrt{(z - a)^2 + h^2}. \tag{3.25}$$

Rozważmy teraz ogólniejszy przypadek, niech $z \in \mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ jest górną półpłaszczyznę zespoloną. Γ_k , $k \in \mathbb{N}$ oznacza przeliczalną liczbę rozłącznych łuków Jordana



Rysunek 3.1: Odwzorowanie „wciągające” igłę w oś rzeczywistą.

zawartych w \mathbb{C}_+ z jednym końcem na osi rzeczywistej. Drugi z wierzchołków Γ_k oznaczamy γ_k . Rosnący obszar to

$$S(t) = \mathbb{C}_+ \setminus \{\Gamma_1(t) \cup \Gamma_2(t) \cup \dots\} \quad (3.26)$$

gdzie zakładamy, że łuki Γ_k zmieniają się w czasie, w ten sposób, że $\Gamma_k(t) \subset \Gamma_k(t')$ dla $t' > t$ a koniec na osi rzeczywistej jest stały. Niech $w \in S(t)$. Przez f oznaczmy odwzorowanie konforemne

$$f : \mathbb{C}_+ \rightarrow S(t) \quad (3.27)$$

Rozszerzmy f na oś rzeczywistą, i niech a oznacza przeciwobraz w \mathbb{C}_+ pewnego wierzchołka γ w obszarze $S(t)$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + i\epsilon) = \gamma. \quad (3.28)$$

Znamy rozwiązanie równania Laplace'a w obszarze \mathbb{C}_+ z warunkiem brzegowym w postaci zerowania się funkcji na osi rzeczywistej i stałego gradientu w nieskończoności

$$\Phi(x, y) = Cy \quad (3.29)$$

Bez straty ogólności możemy położyć $C = 1$.

W poprzednim rozdziale definiując model igłowy wzrostu Laplace'a założyliśmy pewien związek prędkości wzrostu igły z polem Laplace'a (funkcją harmoniczną) w otoczeniu czubka igły. Teraz postaramy się znaleźć związek między tak zdefiniowaną prędkością a odwzorowaniem konforemnym, którego używamy do znalezienia pola wokół niej.

Rozważmy punkty w obszarze \mathbb{C}_+ będące blisko a , których położenie możemy opisać wzorem

$$z = a \left(1 + \rho e^{i\theta}\right) \quad (3.30)$$

gdzie $\rho \ll 1$. Wartość pola takim bliskim punkcie to

$$\Phi(z) = \text{Im}(z) = a\rho \sin(\theta) \quad (3.31)$$

Ponieważ odwzorowanie f jest konforemne jest to również wartość pola Laplace'a w punkcie ω będącym obrazem z w obszarze $S(t)$. Znajdźmy teraz wartość funkcji $f(z)$ rozwijając w szereg Taylora wokół a do członu kwadratowego .

$$\begin{aligned} \omega \equiv f(z) &\approx f(a) + \frac{1}{2}f''(a) (z - a)^2 \\ \omega - f(a) &= \frac{1}{2}f''(a)(a\rho e^{i\theta})^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Pierwsza pochodna znika w a , gdyż obraz ma tam maksimum lokalne. Wprowadźmy wielkość ϑ zdefiniowaną równaniem

$$f''(a) = |f''(a)| e^{i\vartheta} \quad (3.33)$$

Przekształcając powyższe równanie

$$\left(\frac{2}{|f''(a)|} \right)^{1/2} e^{-i\vartheta/2} (\omega - f(a))^{1/2} = a\rho e^{i\theta} \quad (3.34)$$

Zauważmy że część urojona powyższego równania jest równa polu Laplace'a w punkcie ω .

$$\left(\frac{2}{|f''(a)|} \right)^{1/2} \text{Im} \left(e^{-i\vartheta/2} (\omega - f(a))^{1/2} \right) = a\rho \sin(\theta) = \Phi(\omega) \quad (3.35)$$

W ten sposób otrzymaliśmy wartość pola wokół wierzchołka w obszarze $S(t)$. Wprowadźmy zmienne r i φ równaniem

$$\omega - f(a) = r e^{i\varphi} \quad (3.36)$$

Możemy zapisać wówczas pole Laplace'a wokół wierzchołka jako funkcję r i φ .

$$\Phi(r, \varphi) = \left(\frac{2}{|f''(a)|} \right)^{1/2} r^{1/2} \sin \left(\frac{\varphi - \vartheta}{2} \right) \quad (3.37)$$

Policzmy gradient funkcji Φ

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \hat{e}_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} |f''(a)|^{-1/2} r^{-1/2} \left(\sin \left(\frac{\varphi - \vartheta}{2} \right) \hat{e}_r + \cos \left(\frac{\varphi - \vartheta}{2} \right) \hat{e}_\varphi \right) \quad (3.38)$$

Zatem podstawiając do (2.26) mamy wartość czynnika wzrostu

$$E = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{r} |\nabla\Phi|) = \frac{\sqrt{2}}{2} |f''(a)|^{-1/2} \quad (3.39)$$

Proporcjonalność prędkości wzrostu do $|f''(a)|^{-1/2}$ jest uniwersalna tzn. dla odwzorowań „wciągających igły” w brzegi o innym kształcie również jest prawdziwa. Dowód dla brzegu będącego okręgiem jednostkowym można znaleźć w [19].

Rozdział 4

Model prostych igieł

4.1. Dotychczasowe wyniki

W pracy [19] autorzy rozwiązali przy użyciu metody odwzorowań konforemnych dynamikę układu n prostych igieł wyrastających promieniście z punktu na płaszczyźnie. W szczególności wykazali niestabilność radialnego układu więcej niż sześciu igieł. W takim przypadku małe zaburzenie powodować będzie wygranie rywalizacji przez tylko sześć igieł, a pozostałe będą hamowane. Podobny układ składający się z równoległych, skończonych igieł wyrastających z prostej $y = 0$ i z co drugą igłą tej samej długości rozwiązano ściśle w pracy [20]. Rozważano półprzestrzeń \mathbb{C}_+ z igłami, będącymi odcinkami łączącymi punkty $(2n, 0)$ z $(2n, L_0)$ oraz $(2n + 1, 0)$ z $(2n + 1, L_1)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Uzyskano ilościowy opis procesu rywalizacji w badanym układzie. Otrzymane tam wyniki dla asymptotycznie długich igieł starano się odtworzyć prostszą metodą w pracy [21], ale nie uniknięto drobnych błędów, które tutaj postaramy się poprawić i porównać z dokładnymi wynikami z [20].

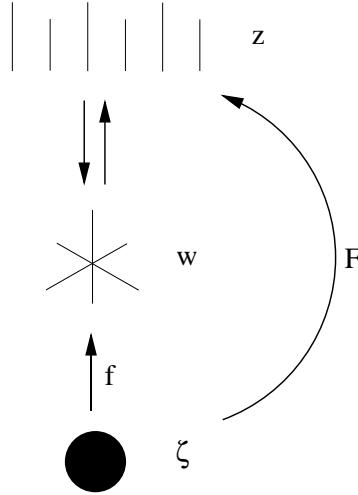
4.2. Równoległe igły w periodycznych warunkach brzegowych

Zastosujemy teraz aparat matematyczny z poprzedniego rozdziału, dzięki czemu będziemy w stanie uzyskać ściśle, analityczne wyniki dla asymptotyki układu badanego w [20]. Rozważmy zbiór $\mathbb{C}_\delta := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > \delta\}$ z $\delta < 0$ i igłami wyrastającymi z prostej $y = \delta$, będącymi odcinkami łączącymi punkty $(2n, \delta)$ z $(2n, L_0)$ oraz $(2n + 1, \delta)$ z $(2n + 1, L_1)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Przechodząc asymptotycznie z $\delta \rightarrow -\infty$ otrzymujemy układ nieskończonych igieł rosnących na płaszczyźnie zespolonej z co drugą igłą „tej samej długości”, w sensie długości od $y = 0$. Modeluje to sytuację, w której igły są już na tyle długie, że wpływ warunku brzegowego na prostej, z której wyrastają, staje się zaniedbywalny. Układ taki jest periodyczny, zatem możemy ograniczyć się do rozważania $N \in \mathbb{N}$ igieł i zamknąć je w periodycznych warunkach brzegowych. Rozważmy trzy przestrzenie zespolone: z , w , i ζ przedstawione na rysunku 4.1. Równoległe igły znajdują się w przestrzeni z . Po zadziałaniu na nie odwzorowaniem:

$$w = \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}z\right) \quad (4.1)$$

przechodzą na „gwiazdkę” (widoczną na rysunku 4.1) o N ramionach. Odwzorowanie odwrotne dane jest przez

$$z = \frac{iN}{2\pi} \log(w). \quad (4.2)$$



Rysunek 4.1: Schemat używanych map konforemnych.

Znamy też funkcję przekształcającą konforemnie zewnątrz takiej „gwiazdki” na zewnątrz okręgu jednostkowego. Jest to funkcja przejścia między ζ a w , której postać za [21] to:

$$f(\zeta) = C \left(\frac{\zeta^{N/2} + \zeta^{-N/2}}{2} + a \right)^{2/N}, \quad (4.3)$$

gdzie C i a to stałe rzeczywiste wyznaczone przez L_0 i L_1 . Stąd wynika postać funkcji F obrazującej zewnątrz igieł w przestrzeni z na zewnątrz okręgu jednostkowego

$$F(\zeta) = \frac{iN}{2\pi} \log \left(C \left(\frac{\zeta^{N/2} + \zeta^{-N/2}}{2} + a \right)^{2/N} \right). \quad (4.4)$$

Przez $e^{i\varphi_k}$ oznaczmy punkty w przestrzeni ζ , które przechodzą na wierzchołki igieł w przestrzeniach w i z . Muszą to być ekstrema funkcji f na okręgu jednostkowym, zatem

$$\frac{\partial f(e^{i\varphi_k})}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (4.5)$$

Parametry L_0 i L_1 znajdujemy jako część urojoną obrazów wierzchołków w przestrzeni z

$$F(e^{i\varphi_k}) = k + \frac{i}{\pi} \log(1 + (-1)^k a) + \frac{iN}{2\pi} \log(C). \quad (4.6)$$

Stąd można odczytać, że

$$L_k = \frac{1}{\pi} \log(1 + (-1)^k a) + \frac{N}{2\pi} \log(C). \quad (4.7)$$

L_0 i L_1 dostarczają pełnej informacji o układzie i dla każdych zadanych L_0 i L_1 możemy znaleźć C i a im odpowiadające. Odejmując stronami powyższe równanie dla $k = 0$ i $k = 1$

$$L_0 - L_1 = \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \Rightarrow e^{\pi(L_0-L_1)} = \frac{1-a}{1+a}. \quad (4.8)$$

Prędkości wzrostu igieł, na podstawie (2.26), proporcjonalne są do:

$$v_k = \frac{\partial L_k}{\partial t} \propto \left(\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} \right)_{z=e^{i\varphi_k}}^{-1/2} = \left[\frac{iN^2}{4\pi} \frac{1}{1 + (-1)^k a} \right]^{-1/2}. \quad (4.9)$$

Zauważmy zatem, że stosunek prędkości wzrostu dwóch kolejnych igieł dany jest przez

$$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = e^{\frac{\pi}{2}(L_0-L_1)} \quad (4.10)$$

Ten wynik ukazuje nam dwa charakterystyczne dla wzrostu Laplace'a zjawiska: niestabilność - jeśli przy początkowo równych igłach, jedna z nich pod wpływem dowolnie małego zaburzenia wysunie się do przodu, zaczyna rosnać szybciej ; rywalizację - rosnąca szybciej igła, gdy znajduje się „nad” drugą hamuje jej wzrost. Rezultat ten odtwarza asymptotyczne zachowanie wyniku dla skończonych igieł o długościach na przemian L_0 i L_1 wyrastających z prostej $y = 0$ w okresowych warunkach brzegowych, z pracy [20]. Użyto tam mapowania układu skończonych igieł na odcinek $[-1, 1]$:

$$\zeta(z) = \frac{2 \cos(\pi z) + \cos(\pi L_0) - \cos(\pi L_1)}{\cos(\pi L_0) + \cos(\pi L_1)}. \quad (4.11)$$

Natomiast rozwiązaniem równania Laplace'a wokół takiego odcinka, z warunkiem $\Phi = 0$ na brzegu, jest

$$\Phi(\zeta) = \log \left[\zeta + \frac{\operatorname{Re}(\zeta)}{|\operatorname{Re}(\zeta)|} \sqrt{\zeta^2 - 1} \right]. \quad (4.12)$$

Prowadzi to, do następującego wyniku na stosunek prędkości igieł:

$$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{\sinh(\pi L_0)}{\sinh(\pi L_1)}}. \quad (4.13)$$

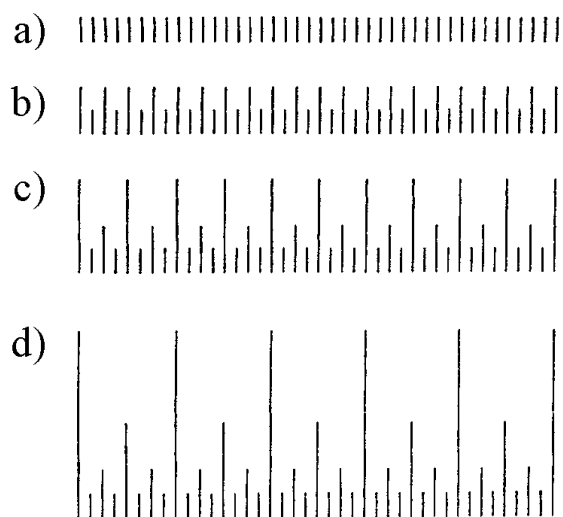
Równanie to z rosącymi L_0 i L_1 i dla ustalonego $L_0 - L_1$ przechodzi w wynik asymptotyczny (4.10) otrzymany prostszą metodą.

4.3. Niestabilność, bifurkacje

Powyższy schemat rywalizacji co drugiej igły pomimo pozornej prostoty tłumaczyć może bardzo ciekawe zjawiska. Zauważmy, że co drugie „wygrane” igły po oddaleniu się od przegranych znów tworzyć będą, odpowiednio przeskalowany układ wyjściowy. Wówczas znów niestabilność spowoduje rywalizację i pozostanie z nich co druga, itd. (rysunek 4.2). Taki mechanizm bifurkacji, po długich czasach prowadzi do struktury fraktalnej i potęgowego rozkładu długości igieł, bez wyróżnionej skali długości:

$$N(l) \propto l^{-\gamma}, \quad (4.14)$$

gdzie $N(l) \cdot \Delta l$ to liczba igieł o długościach pomiędzy l a $l + \Delta l$, a γ to wykładnik charakterystyczny dla układu. Takie struktury widać np. we wzroście pęknięć w skałach [21]. Tłumaczyć to może po części również fraktalne struktury tworzące się w eksperymentach związanych ze wzrostem Laplace'a.



Rysunek 4.2: Mechanizm bifurkacji. Ilustracja za [21]. a) początkowo równe igły podlegają zaburzeniu i co druga staje się odrobinę dłuższa b) różnice powiększają się, wśród dłuższych igieł zaburzenie znów powoduje przedłużenie co drugiej c) i d) analogicznie.

Rozdział 5

Równanie Loewnera dla półpłaszczyzny

W tym rozdziale postaramy się przedstawić inny sposób opisu wzrostu igieł. Dotychczas dla danego kształtu igieł, zmiennego w czasie, szukaliśmy odwzorowania konforemnego na obszar ze znanym rozwiązaniem równania Laplace'a. Znalezione prędkości wzrostu zmieniały kształt igieł i dla zmienionego kształtu znów szukaliśmy odwzorowania konforemnego. Równanie Loewnera to równanie różniczkowe opisujące zmianę w czasie, ale nie kształtu obszaru, lecz samego odwzorowania. Z niego natomiast możemy odtworzyć kształt igieł. Pierwsze równanie tego typu wyprowadził w 1923 roku Charles Loewner [23] (wcześniej Karl Löwner) dla opisanego w tym rozdziale przypadku. Tutaj przytoczymy wyprowadzenie metodą z pracy [24].

Wprowadźmy teraz używane oznaczenia. Niech, jak poprzednio $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ będzie górną półpłaszczyzną zespoloną,

$$\Gamma_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad n \geq 1 \quad (5.1)$$

oznacza skończoną liczbę rozłącznych łuków Jordana zawartych w \mathbb{C}_+ z jednym końcem na osi rzeczywistej. Drugi z wierzchołków Γ_k oznaczamy γ_k . Rosnący obszar to

$$S(t) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\} \cup \Gamma_1(t) \cup \dots \cup \Gamma_n(t), \quad (5.2)$$

gdzie zakładamy że łuki Γ_k zmieniają się w czasie, w ten sposób, że $\Gamma_k(t) \subset \Gamma_k(t')$ dla $t' > t$ a koniec na osi rzeczywistej jest ustalony.

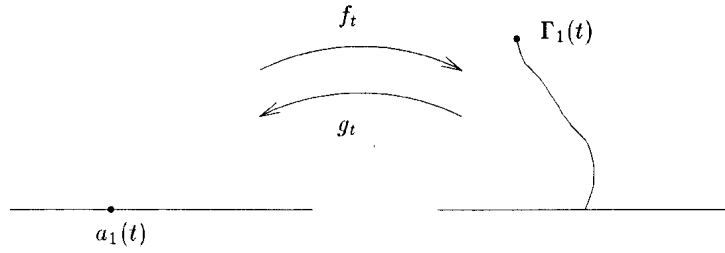
5.1. Równanie Loewnera dla jednej igły

Najprostszym przypadkiem równania Loewnera jest wzrost tylko jednej igły, czyli jednego łuku Jordana $\Gamma_1(t)$. Szukać będziemy równania na funkcję g_t dla $t \geq 0$, będącą odwzorowaniem konforemnym

$$g_t : \mathbb{C}_+ \setminus \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}_+. \quad (5.3)$$

Przydatna w opisie będzie również funkcja odwrotna $f_t(z)$

$$\begin{aligned} f_t &: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+ \setminus \Gamma_1 \\ f_t \circ g_t &= g_t \circ f_t = id, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$



Rysunek 5.1: Oznaczenie odwzorowań rozpatrywanych w równaniu Loewnera.

Schemat rozpatrywanych odwzorowań przedstawia rysunek 5.1. Jako warunek normalizacji przyjmujemy

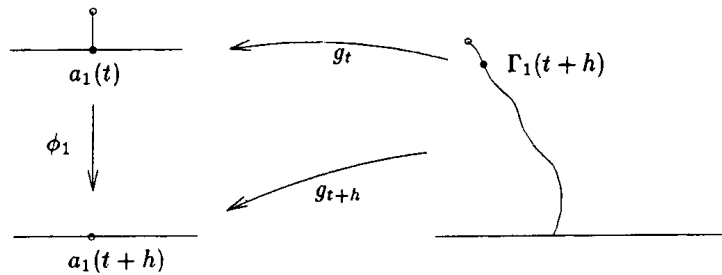
$$\lim_{z \rightarrow \infty} g_t(z) - z = 0, \quad (5.5)$$

czyli tzw. normalizację hydrodynamiczną. Fizycznie odpowiada to sytuacji, w której zaburzenie przepływu cieczy w pewnym małym obszarze nie powinno mieć wpływu na przepływ w nieskończoności, a odpowiada to warunkowi, że daleko od igły odwzorowanie ma być identyfikacją. Odwzorowania g_t i f_t są jednoznaczne dla danego $\Gamma_1(t)$ z dokładnością do automorfizmu \mathbb{C}_+ . Warunek normalizacji (5.5) w tym przypadku ustali jednoznacznie takie odwzorowanie. Oznaczmy przez $a_1(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_t(\gamma_1(t) + i\epsilon)$ obraz czubka igły.

Ustalmy teraz $t \geq 0$ i rozważmy mapowanie g_t w chwili t oraz $t+h$ w granicy $h \rightarrow 0$. Łuki $\Gamma_1(t)$ i $\Gamma_1(t+h)$ różnią się o pewien mały odcinek. Mapowanie g_t „wciąga” cały łuk $\Gamma_1(t)$ w oś rzeczywistą, natomiast g_{t+h} „wciąga” łuk $\Gamma_1(t+h)$ różniący się o krótki odcinek. Znajdujemy równanie różniczkowe szukając g_{t+h} spełniającego

$$g_{t+h} = \phi_1 \circ g_t + O(h^2). \quad (5.6)$$

Ideę tego złożenia przedstawia rysunek 5.2. Jako funkcji ϕ używać będziemy opisanego w



Rysunek 5.2: Idea konstrukcji równania Loewnera dla jednej igły.

poprzednim rozdziale odwzorowania:

$$\phi_1(z) = \sqrt{(z - a_1(t))^2 + 2hd_1(t)} + \tilde{a}_1(t), \quad (5.7)$$

gdzie $d_1(t)$ jest funkcją sterującą prędkością wzrostu w czasie nazwaną czynnikiem wzrostu. Z warunku normalizacji wiadomo, że z automorfizmów półpłaszczyzny, z dokładnością do których zdefiniowana jest funkcja g_t , nie są wyeliminowane jedynie translacje o liczbę rzeczywistą postaci $\tilde{a}_1(t)$, której wartość wyznaczmy za chwilę. Odwzorowanie ϕ_1 „wciąga” w

ość rzeczywistą małą, prostą (rosnącą w kierunku osi urojonej) igłę o długości $\sqrt{2hd_1(t)}$. Łatwo zauważyć, że dla infinitezimalnego h odpowiada to przyrostowi długości igły równemu $h d_1(t) |f_t''(a_1(t))|$. Pierwsza pochodna f_t w punkcie $a_1(t)$ znika gdyż f ma tam maksimum lokalne, więc rozwijając przyrost długości igły w szereg Taylora, najniższym niezerowym wyrazem jest $1/2 f_t''(a_1(t)) \sqrt{2hd_1(t)}^2$ co daje powyższy wynik. Jeśli podzielimy ten wynik przez h , otrzymamy prędkość wzrostu igły

$$v_1(t) = d_1(t) |f_t''(a_1(t))|. \quad (5.8)$$

Jak pokazaliśmy wcześniej (3.39) dla wzrostu Laplace'a prędkość wzrostu igły musi spełniać relację

$$v_1(t) \propto |f_t''(a_1(t))|^{-1/2}. \quad (5.9)$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć stałą proporcjonalności równą 1. Zatem przyjęcie czynnika wzrostu danego równaniem

$$d_1(t) = |f_t''(a_1(t))|^{-3/2} \quad (5.10)$$

odpowiada wzrostowi Laplace'a. Uniwersalna jest także zależność $d(t) = v(t)^3$. Przepiszemy teraz równanie na $\phi_1(z)$ rozwijając w szereg potęgowy w h .

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \sqrt{(z - a_1(t))^2 + 2hd_1(t)} + \tilde{a}_1(t) = \\ &= (z - a_1(t)) \sqrt{1 + \frac{2hd_1(t)}{(z - a_1(t))^2}} + \tilde{a}_1(t) = \\ &= (z - a_1(t)) \left(1 + \frac{hd_1(t)}{(z - a_1(t))^2} + O(h^2) \right) + \tilde{a}_1(t) = \\ &= z + \tilde{a}_1(t) - a_1(t) + \frac{hd_1(t)}{z - a_1(t)} + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Podstawmy teraz powyższe rozwinięcie do (5.6)

$$g_{t+h} = \phi_1 \circ g_t = g_t + \tilde{a}_1(t) - a_1(t) + \frac{hd_1(t)}{g_t - a_1(t)} + O(h^2), \quad (5.12)$$

$$\frac{g_{t+h} - g_t}{h} = \frac{\tilde{a}_1(t) - a_1(t)}{h} + \frac{d_1(t)}{g_t - a_1(t)} + O(h). \quad (5.13)$$

Przechodząc do granicy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\dot{g}_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_1(t) - a_1(t)}{h} + \frac{d_1(t)}{g_t - a_1(t)}. \quad (5.14)$$

Przez przyjęcie warunku (5.5) oczekujemy, że

$$0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \dot{g}_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_1(t) - a_1(t)}{h} + \frac{d_1(t)}{g_t - a_1(t)}. \quad (5.15)$$

Drugi człon prawej strony równania przy $z \rightarrow \infty$ dąży do zera zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_1(t) - a_1(t)}{h} = 0 \Rightarrow a_1(t) = \tilde{a}_1(t). \quad (5.16)$$

Daje to ostateczną postać równania Loewnera dla jednej igły na półpłaszczyźnie

$$\dot{g}_t = \frac{d_1(t)}{g_t - a_1(t)}. \quad (5.17)$$

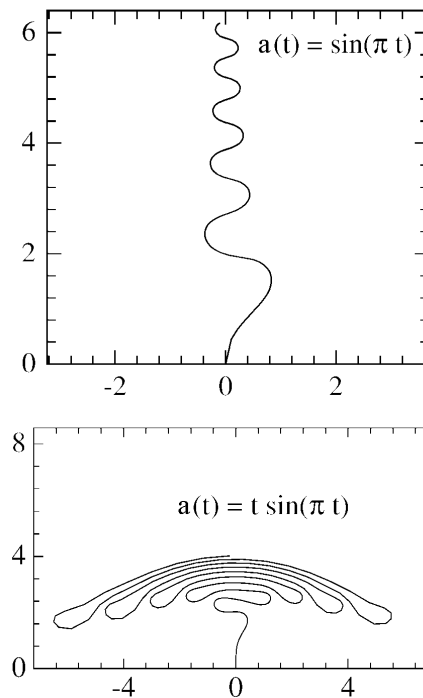
Zauważmy pewną własność równania (5.17). Jeśli interesuje nas tylko kształt Γ_1 , a nie jego zależność od czasu to przy spełnionym warunku $d_1(t) > 0$ dla $t > 0$ bez straty ogólności można przyjąć $d_1(t) \equiv 1$. Jeśli przeskalujemy czas, wprowadzając nowy dany wzorem

$$t' = \int_0^t d_1(\tau) d\tau, \quad (5.18)$$

to zapisując równanie (5.17) w nowym czasie otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d_1(t)}{g_{t'}(z) - a} &= \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{dt'}{dt} \dot{g}_{t'}(z) = d_1(t) \dot{g}_{t'}(z), \\ \dot{g}_{t'} &= \frac{1}{g_{t'} - a}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

W literaturze matematycznej używane jest $d_1(t) \equiv 2$. Dla różnych zależności $a(t)$ otrzymuje się różne kształty powstających igieł. Ścisłych rozwiązań dla różnych $a(t)$ jest niewiele, kilka z nich można znaleźć w pracy [25]. Dla przykładu rysunek 5.3 przedstawia kształty igieł gdy $a(t) = \sin(\pi t)$ oraz $a(t) = t \sin(\pi t)$. Szeroko rozwijają się obecnie badania nad stochastycz-



Rysunek 5.3: Przykładowe kształty igieł, dla różnych postaci funkcji $a(t)$. Ilustracja za [25].

nym równaniem Loewnera (SLE), gdzie funkcja $a(t)$ jest białym szumem gaussowskim i ich związkiem z modelami zjawisk krytycznych w fizyce statystycznej.

Nas jednak interesują trajektorie odpowiadające igle rosnącej w każdej chwili czasu w kierunku gradientu na czubku. Takie igły nazywać będziemy geodezyjnymi. Jaki warunek na

funkcję $a_1(t)$ odpowiada trajektorii geodezyjnej? Rozpatrzmy kształt igły w chwilach czasu t i $t + h$. Zauważmy, że kierunek gradientu pola w punkcie $\gamma(t)$ odpowiada kierunkowi wzdłuż osi y w punkcie na który przechodzi $\gamma(t)$ pod działaniem odwzorowania g_t , czyli $\tilde{a}_1(t)$. Jeśli zatem igła między czasem t a $t + h$ rosła wzdłuż gradientu pola, to wierzchołek $\gamma(t + h)$ po zadziałaniu odwzorowaniem g_t powinien mieć swój obraz nad punktem $\tilde{a}_1(t)$. Aby odwzorowanie g_{t+h} wciągnęło wierzchołek $\gamma(t + h)$ w oś rzeczywistą musimy przyjąć warunek postaci:

$$a_1(t + h) = \tilde{a}_1(t), \quad (5.20)$$

co w rozpatrywanym przypadku oznacza $a_1(t) = \text{const.}$, gdyż $\tilde{a}_1(t) = a_1(t)$. Sytuacja nie będzie jednak tak trywialna w następnych rozdziałach. W dalszej części pracy interesować nas będzie wyłącznie ruch geodezyjny i równania opisujące ruch biegunów dla tego przypadku.

Rozwiązania Zbadajmy najpierw przypadek $d_1(t) = 1$:

$$\dot{g}_t = \frac{1}{g_t - a}. \quad (5.21)$$

Równanie tej postaci ma rozdzielone zmienne i jest całkowne. Przyjmujemy warunki początkowe $g_0(z) = z$, $g_t(z) = a$, przez co otrzymane $z(t)$ będzie odpowiadać położeniu czubka igły $\gamma_1(t)$. Przekształcając, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (g_t - a)dg_t &= dt, \\ \int_z^a (g_t - a)dg_t &= \int_0^t dt', \\ -\frac{1}{2}(z - a)^2 &= t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Zatem położenie wierzchołka igły w czasie wyraża się wzorem

$$\gamma(t) = a + i\sqrt{2t} \quad (5.23)$$

Jak widać pojedyncza igła rośnie „pionowo” w kierunku osi urojonej, a jej wysokość dana jest przez

$$l(t) = \sqrt{2t} \quad (5.24)$$

Skoro znamy kształt igły, przejdźmy do zagadnienia z czynnikiem wzrostu odpowiadającym wzrostowi laplace’owskiemu. Dla prostej igły o zadanej długości znamy explicite postać funkcji g_t i f_t

$$\begin{aligned} g_t(z) &= \sqrt{(z - a)^2 + l^2(t)} + a, \\ f_t(z) &= \sqrt{(z - a)^2 - l^2(t)} + a. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Taką postać $g_t(z)$ możemy podstawić do równania Loewnera (5.17) otrzymując

$$\frac{l(t) \cdot \dot{l}(t)}{\sqrt{(z - a)^2 - l^2(t)}} = \frac{d_1(t)}{\sqrt{(z - a)^2 - l^2(t)}}, \quad (5.26)$$

czyli

$$\dot{l}(t) = \frac{d_1(t)}{l(t)}. \quad (5.27)$$

Łatwo sprawdzić że $|f_t''(a)| = \frac{1}{l(t)}$. Możemy zatem policzyć czynnik wzrostu odpowiadający przypadkowi laplace'owskiemu

$$d_1(t) = |f_t''(a_1(t))|^{-3/2} = l^{3/2}(t). \quad (5.28)$$

Podstawiając do zredukowanej postaci równania Loewnera (5.27) otrzymujemy

$$\dot{l}(t) = \sqrt{l(t)}. \quad (5.29)$$

Z warunkiem początkowym $l(0) = 0$ równanie to ma rozwiązanie postaci

$$l(t) = \frac{1}{4}t^2. \quad (5.30)$$

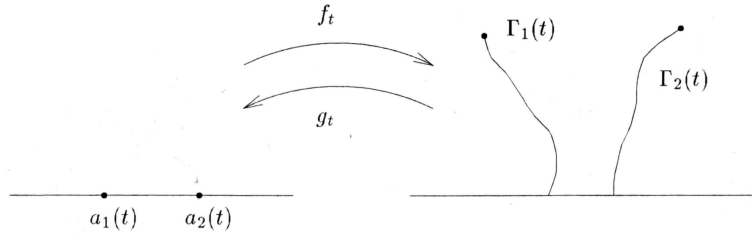
5.2. Równanie Loewnera dla dwóch igieł

Sytuacja dla dwóch igieł jest bardziej skomplikowana i wymaga subtelniejszych rozważań. Przedstawimy na wstępie wyprowadzenie zaczerpnięte z pozycji [24], następnie postaramy się znaleźć prostszą metodę wyprowadzenia tego równania, która okaże się również bardziej użyteczna w numerycznym całkowaniu równań Loewnera.

Będziemy szukać teraz równania na funkcję g_t dla $t \geq 0$, będącą odwzorowaniem konforemnym

$$g_t : \mathbb{C}_+ \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \rightarrow \mathbb{C}_+. \quad (5.31)$$

Schemat odwzorowań przedstawia rysunek 5.4. Odwzorowanie to jest jednoznaczne dla danego



Rysunek 5.4: Schemat używanych odwzorowań dla dwóch igieł

obszaru z dokładnością do automorfizmu \mathbb{C}_+ . Jednoznaczność uzyskamy z warunku (5.5). Wprowadźmy oznaczenia analogiczne do przyjętych w poprzednim paragrafie

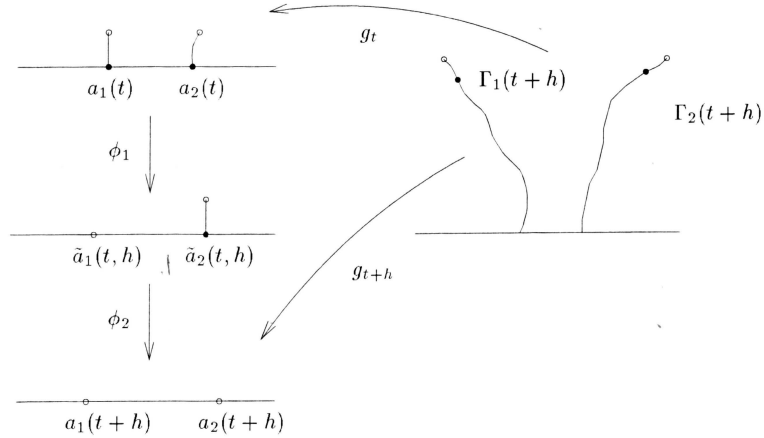
$$\begin{aligned} f_t &: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+ \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \\ f_t \circ g_t &= g_t \circ f_t = id, \quad t \geq 0, \\ a_k(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_t(\gamma_k(t) + i\epsilon), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Analizując odwzorowanie g_t dla czasów t i $t + h$ rozważmy następujące złożenie zilustrowane na rysunku 5.5

$$g_{t+h} = \phi_2 \circ \phi_1 \circ g_t + O(h^2), \quad (5.33)$$

gdzie użyte funkcje to

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \sqrt{(z - a_1(t))^2 + 2hd_1(t) + \tilde{a}_1(t, h)}, \\ \phi_2(z) &= \sqrt{(z - \tilde{a}_2(t, h))^2 + 2hd_2(t) + a_2(t + h)}, \end{aligned} \quad (5.34)$$



Rysunek 5.5: Idea konstrukcji złożeń generujących równanie Loewnera dla dwóch igieł

natomiast $d_1(t)$ i $d_2(t)$ to czynniki wzrostu odpowiednio pierwszej i drugiej igły oraz

$$\tilde{a}_2(t, h) = \phi_1(a_2(t)), \quad (5.35)$$

$$a_1(t+h) = \phi_2(\tilde{a}_1(t, h)). \quad (5.36)$$

Przepisujemy teraz $\phi_1(z)$ i $\phi_2(z)$ rozwijając w szereg potęgowy w h analogicznie jak w (5.11)

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= z + \tilde{a}_1(t, h) - a_1(t) + \frac{hd_1(t)}{z - a_1(t)} + O(h^2), \\ \phi_2(z) &= z + a_2(t+h) - \tilde{a}_2(t, h) + \frac{hd_2(t)}{z - \tilde{a}_2(t, h)} + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Podstawiając powyższe relacje do (5.36), (5.35), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(t, h) - a_2(t) &= \tilde{a}_1(t, h) - a_1(t) + \frac{hd_1(t)}{a_2(t) - a_1(t)} + O(h^2), \\ a_1(t+h) - \tilde{a}_1(t, h) &= a_2(t+h) - \tilde{a}_2(t, h) + \frac{hd_2(t)}{\tilde{a}_1(t, h) - \tilde{a}_2(t, h)} + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Definiujemy pomocniczą zmienną

$$\xi(t, h) = a_2(t+h) - \tilde{a}_2(t, h) + \tilde{a}_1(t, h) - a_1(t) + O(h^2). \quad (5.39)$$

Przepisując powyższe równania i wstawiając funkcję $\xi(t, h)$ uzyskujemy

$$a_2(t+h) - a_2(t) = \xi(t, h) + \frac{hd_1(t)}{a_2(t) - a_1(t)} + O(h^2), \quad (5.40)$$

$$a_1(t+h) - a_1(t) = \xi(t, h) + \frac{hd_2(t)}{\tilde{a}_1(t, h) - \tilde{a}_2(t, h)} + O(h^2). \quad (5.41)$$

Teraz obliczamy złożenie funkcji $\phi_1(z)$ i $\phi_2(z)$

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1(z) &= \phi_1(z) + a_2(t+h) - \tilde{a}_2(t, h) + \frac{hd_2(t)}{\phi_1(z) - \tilde{a}_2(t, h)} + O(h^2) = \\ &= z + \frac{hd_1(t)}{z - a_1(t)} + \frac{hd_2(t)}{z - \tilde{a}_2(t, h) + \tilde{a}_1(t, h) - a_1(t)} + \xi(t, h) + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Podstawiamy do (5.33) i otrzymujemy

$$g_{t+h}(z) - g_t(z) = \frac{hd_1(t)}{g_t(z) - a_1(t)} + \frac{hd_2(t)}{g_t(z) - \tilde{a}_2(t, h) + \tilde{a}_1(t, h) - a_1(t)} + \xi(t, h) + O(h^2). \quad (5.43)$$

Następnie dzielimy przez h i przechodzimy z $h \rightarrow 0$, pamiętając że w tej granicy $\tilde{a}_1(t, h) \rightarrow a_1(t)$ oraz $\tilde{a}_2(t, h) \rightarrow a_2(t)$. Stąd otrzymujemy równanie

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d_1(t)}{g_t(z) - a_1(t)} + \frac{d_2(t)}{g_t(z) - a_2(t)} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(t, h)}{h} \quad (5.44)$$

Warunek normalizacji (5.5) wymaga by lewa strona tego równania dążyła do 0 przy $z \rightarrow \infty$. Dwa pierwsze człony prawej strony równania dążą w tej granicy do zera, musimy zatem przyjąć

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(t, h)}{h} = 0, \quad (5.45)$$

więc ostatecznie równanie na g_t ma postać

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d_1(t)}{g_t(z) - a_1(t)} + \frac{d_2(t)}{g_t(z) - a_2(t)}. \quad (5.46)$$

Dzieląc równania (5.40), (5.41) przez h , przechodząc z $h \rightarrow 0$ i podstawiając (5.45) otrzymujemy równania na $a_1(t)$ i $a_2(t)$ postaci

$$\dot{a}_1(t) = \frac{d_2(t)}{a_1(t) - a_2(t)}, \quad (5.47)$$

$$\dot{a}_2(t) = \frac{d_1(t)}{a_2(t) - a_1(t)}. \quad (5.48)$$

Zauważmy że nie było oczywiste czy ewolucja i postać równań nie będzie zależeć od przyjętej kolejności składania w (5.33), ale symetria równań (5.46), (5.47), (5.48) pokazuje iż przy odwrotnej kolejności uzyskalibyśmy identyczne równania.

Trudność tej metody polega na braku explicite formy funkcji $\tilde{a}_1(t, h)$ i $\tilde{a}_2(t, h)$ w (5.34). Przedstawimy teraz alternatywną metodę wyprowadzenia powyższych równań. Zauważmy że z dokładnością do członów $O(h^2)$ możemy zapisać funkcje ϕ_1, ϕ_2 w postaci

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \sqrt{(z - a_1(t))^2 + 2hd_1(t)} + a_1(t), \\ \phi_2(z) &= \sqrt{(z - a_2(t+h))^2 + 2hd_2(t)} + a_2(t+h), \end{aligned} \quad (5.49)$$

gdzie

$$a_2(t+h) = \phi_1(a_2(t)), \quad (5.50)$$

$$a_1(t+h) = \phi_2(a_1(t)). \quad (5.51)$$

Podstawiamy ϕ_1, ϕ_2 rozwinięte w szereg do członów liniowych w h

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= z + \frac{hd_1(t)}{z - a_1(t)} + O(h^2), \\ \phi_2(z) &= z + \frac{hd_2(t)}{z - a_2(t+h)} + O(h^2), \end{aligned} \quad (5.52)$$

do równań (5.51), (5.51)

$$\begin{aligned} a_2(t+h) &= \phi_1(a_2(t)) = a_2(t) + \frac{hd_1(t)}{a_2(t) - a_1(t)} + O(h^2) \\ a_1(t+h) &= \phi_2(a_1(t)) = a_1(t) + \frac{hd_2(t)}{a_1(t) - a_2(t+h)} + O(h^2), \end{aligned} \quad (5.53)$$

skąd widać że po przejściu z $h \rightarrow 0$ otrzymamy równania (5.47), (5.48). Metoda jest prostsza, a końcowe równania są takie same. Pozostaje wyprowadzić tą metodą równanie opisujące zamianę g_t w czasie. Bardzo użyteczny będzie w tym problemie następujący lemat, na który będziemy się również powoływać w dalszej części pracy.

Lemat Niech $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, a $f(z, a, h)$ będzie holomorficzną funkcją zmiennej zespolonej z . Ponadto f jest ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu i posiada następujące własności

$$\begin{aligned} f(z, a, 0) &= z, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(z, a, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$f_k^h(z) \equiv f(z, a_k, h), \quad (5.55)$$

gdzie dla różnych k , a_k mają różne wartości. Wówczas

$$\frac{d}{dh} f_n^h \circ f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h(z) \Big|_{h=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i^h(z)}{\partial h} \Big|_{h=0}. \quad (5.56)$$

Dowód Sprawdźmy najpierw tezę dla $n = 2$

$$\frac{d}{dh} f_2^h \circ f_1^h(z) \Big|_{h=0} = \frac{\partial f_2^h}{\partial h} (f_1^h(z)) \Big|_{h=0} + \frac{\partial f_2^h}{\partial f_1^h} \frac{\partial f_1^h}{\partial h} (z) \Big|_{h=0}. \quad (5.57)$$

Z $f_1^0(z) = z$ i $\frac{\partial f_2^h}{\partial z} \Big|_{h=0} = 1$ mamy

$$\frac{d}{dh} f_2^h \circ f_1^h(z) \Big|_{h=0} = \frac{\partial f_1^h(z)}{\partial h} \Big|_{h=0} + \frac{\partial f_2^h(z)}{\partial h} \Big|_{h=0}. \quad (5.58)$$

Dalszy dowód przez indukcję. Załóżmy, że

$$\frac{d}{dh} f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h(z) \Big|_{h=0} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i^h(z)}{\partial h} \Big|_{h=0}. \quad (5.59)$$

Rozpiszmy teraz lewą stronę twierdzenia

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dh} f_n^h \circ f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h(z) \Big|_{h=0} = \\ &\frac{\partial f_n^h}{\partial h} (f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h(z)) \Big|_{h=0} + \frac{\partial f_n^h}{\partial f_{n-1}^h} \frac{d}{dh} f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h(z) \Big|_{h=0}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Analogicznie do przypadku $n = 2$ mamy $f_{n-1}^0 \circ \dots \circ f_2^0 \circ f_1^0(z) = z$ i $\left. \frac{\partial f_n^h}{\partial z} \right|_{h=0} = 1$, stąd

$$\left. \frac{d}{dh} f_n^h \circ f_{n-1}^h \circ \dots \circ f_2^h \circ f_1^h(z) \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial f_n^h(z)}{\partial h} \right|_{h=0} + \sum_{i=1}^{n-1} \left. \frac{\partial f_i^0(z)}{\partial h} \right|_{h=0}. \quad (5.61)$$

c.b.d.o.

Wróćmy teraz do wyprowadzenia równania na g_t z wykorzystaniem powyższego lematu. Zauważmy, że funkcje ϕ_1 i ϕ_2 dane przez 5.49, spełniają założenia lematu, zatem

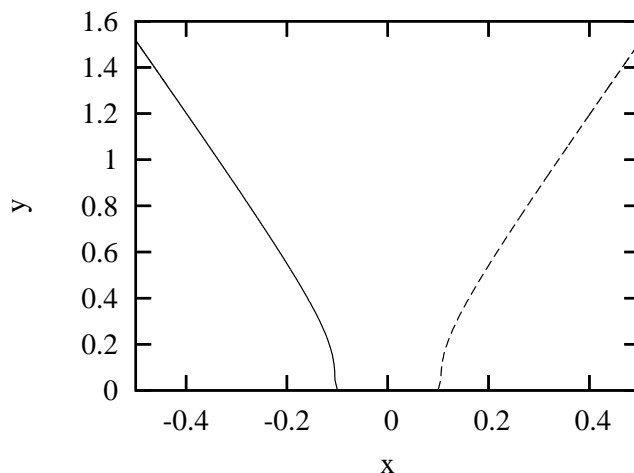
$$\phi_2 \circ \phi_1(z) = z + \frac{hd_1(t)}{z - a_1(t)} + \frac{hd_2(t)}{z - a_2(t)} + O(h^2). \quad (5.62)$$

Złożenie (5.33) daje

$$g_{t+h} = g_t + \frac{hd_1(t)}{g_t - a_1(t)} + \frac{hd_2(t)}{g_t - a_2(t)} + O(h^2), \quad (5.63)$$

a stąd już wynika równanie Loewnera dla dwóch igieł.

Rozwiązania Od tego paragrafu przedstawiać będziemy poza wynikami analitycznymi, również wyniki numeryczne uzyskane metodą opisaną w załączniku A. Kod programu znajduje się z załączniku B. Zaczniemy od przypadku dwóch igieł ze stałym czynnikiem wzrostu $d = 1$. Kształt igieł uzyskany numerycznie z warunkiem początkowym $a_1(0) = 0.1 = -a_2(0)$ przedstawia rysunek (5.6). W początkowej fazie ewolucji igły rosną prosto, nie oddziałując na siebie. Następnie rozpoczyna się faza oddziaływania - igły odginają się od siebie i rosną dalej prosto, tworząc z osią rzeczywistą równe i stałe kąty. Zachowanie to jest niezależne od warunku początkowego, igły zawsze dążyć będą do tych samych kątów nachylenia.



Rysunek 5.6: Kształty dwóch igieł rosnących na półpłaszczyźnie ze stałymi czynnikami wzrostu $d = 1$. Warunek początkowy to $a_1(0) = 0.1 = -a_2(0)$.

Nie da się wyznaczyć analitycznych krzywych opisujących kształty dwóch igieł, natomiast ich asymptotyczne kąty nachylenia znaleźć można w pozycji [24] i dla przypadku dwóch igieł jest to kąt $\alpha = 2/5 \pi \approx 1,256$ co zgadza się z otrzymanym wynikiem numerycznym 1.261 ± 0.01 . Jesteśmy także w stanie wyznaczyć zależność od czasu obrazów czubków igieł czyli $a_1(t)$ oraz $a_2(t)$. Ogólny przypadek ruchu n biegunów na półpłaszczyźnie ze stałym d został również

rozwiązany w pozycji [24]. Tutaj interesuje nas wyłącznie przypadek $n = 2$. Zmiana w czasie $a_1(t)$ oraz $a_2(t)$ opisana jest równaniami (5.47) i (5.48). Dodając i odejmując je stronami z $d_1(t) = d_2(t) = 1$ dostaniemy układ równań:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) + \dot{a}_2(t) &= 0 \\ \dot{a}_1(t) - \dot{a}_2(t) &= \frac{2}{a_1(t) - a_2(t)} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Widoczna w zagadnieniu symetria przejawia się w stałości „środka ciężkości” biegunów czyli $(a_1(t) + a_2(t))/2$. Układ daje się sprowadzić do opisu przez jedną zmienną $a(t) = 1/2(a_1(t) - a_2(t))$. Wówczas $a_1(t) = a(t)$ i $a_2(t) = -a(t)$, a równanie na $a(t)$ ma postać

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2a(t)}. \quad (5.65)$$

Rozwiązaniem powyższego równania z warunkiem początkowym $a(0) = a_0$ jest $a(t) = \sqrt{a_0^2 + t}$. Bieguny zatem oddalają się od siebie na osi rzeczywistej, czy zatem igły będą one mogły rywalizować? W przypadku stałych czynników wzrostu efekt rywalizacji nie jest możliwy, gdyż czynnik wzrostu i prędkość zabijanej igły mają dążyć do zera. Przy stałych czynnikach wzrostu sytuacja jest wręcz odwrotna, ponieważ stały czynnik wzrostu stabilizuje układ. Pokazuje to następujące rozumowanie. Gdy igła 1 znajduje się w pozycji, która w przypadku laplace’owskim dawała by jej mniejszą prędkość niż igła 2 (np. jest krótsza)

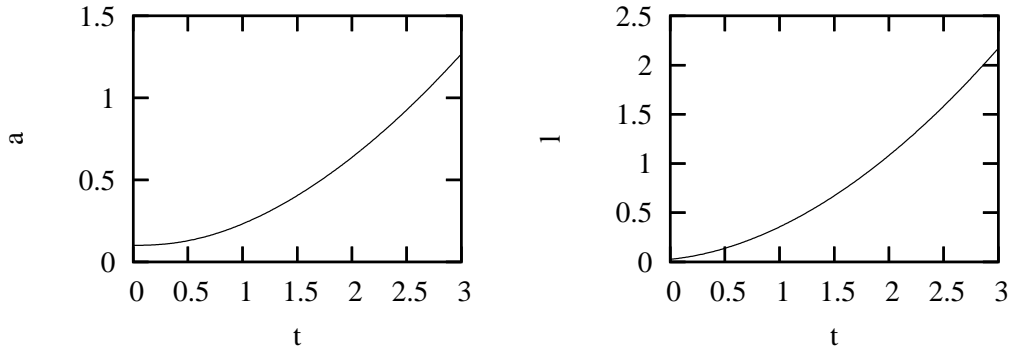
$$v_1 < v_2, \quad (5.66)$$

wówczas ze wzoru (5.9) druga pochodna funkcji f w odpowiadającym jej biegunie jest relatywnie większa

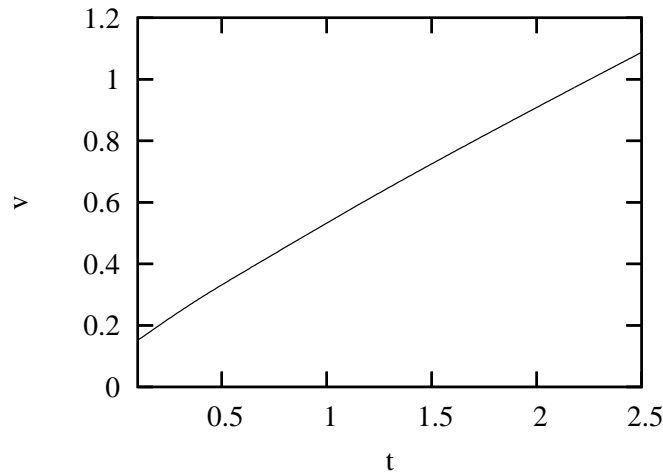
$$|f''(a_1)| > |f''(a_2)| \quad (5.67)$$

Skoro przyrost następuje z prędkością $f_t''(a(t)) \cdot d(t)$, a $d(t) = 1$ to igła 1 będzie doganiać igłę 2. Układem, w którym moglibyśmy się spodziewać rywalizacji, jest układ dwóch igieł na półpłaszczyźnie z laplace’owskim czynnikiem wzrostu. Rysunek (5.7) przedstawia uzyskany numerycznie ruch jednego z biegunów (drugi jest symetryczny), oraz zależność wysokości od czasu (identyczną jak dla drugiej igły). Bieguny oddalają się od siebie, jednak ich ruch ma inny charakter niż pierwiastkowa zależność w czasie dla stałych czynników wzrostu. Wysokość obu igieł jest taka sama.

Nie występuje rywalizacja. Brak efektu hamowania jednej igły przez drugą widać również na zależności prędkości wzrostu igieł od czasu przedstawionej na rysunku (5.8). Brak efektu rywalizacji na poziomie dwóch igieł na półpłaszczyźnie spowodowany jest brakiem bocznych ograniczeń dla igieł. W fizycznych przypadkach igły nigdy uciekać do nieskończoności nie mogą, bo układy zawsze są ograniczone, a wpływ ścianek bocznych nie może być zaniedbany. Postaramy się teraz zbadać czy dla większej ilości igieł na półpłaszczyźnie rywalizacja może wystąpić.



Rysunek 5.7: Ruch jednego z biegunów a (po lewej) oraz długość l jednej z igieł (po prawej) w funkcji czasu, dla dwóch igieł rosnących na półpłaszczyźnie z laplace'owskim czynnikiem wzrostu.



Rysunek 5.8: Zależność prędkości v jednej z igieł od czasu, dla dwóch igieł rosnących na półpłaszczyźnie z laplace'owskim czynnikiem wzrostu. Odpowiedni wykres dla drugiej igły jest identyczny.

5.3. Równanie Loewnera dla wielu igieł

Uogólnienie drugiej metody na przypadek $n \in \mathbb{N}$ igieł nie wprowadza nowych, poza notacją problemów. Szukamy równania na g_t dla $t \geq 0$ będącego konforemnym odwzorowaniem

$$g_t : \mathbb{C}_+ \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n) \rightarrow \mathbb{C}_+ \quad (5.68)$$

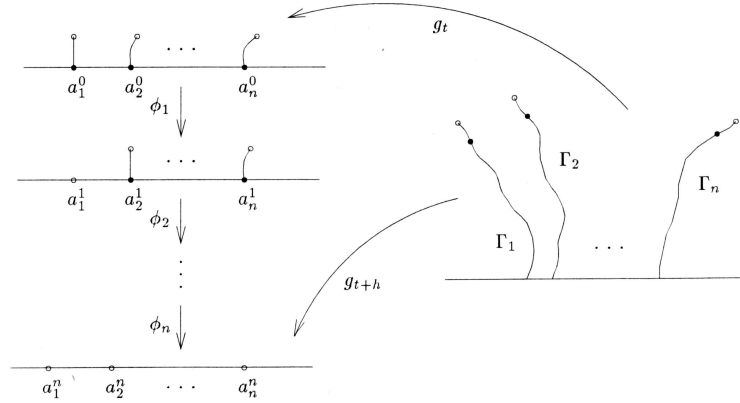
Jednoznaczność uzyskamy z warunku (5.5). Oznaczmy przez $\gamma_k(t), k = 1, 2, \dots, n$ wierzchołki luków $\Gamma_k(t)$. Oznaczenia analogiczne do przyjętych w poprzednim paragrafie

$$\begin{aligned} f_t &: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+ \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n) \\ f_t \circ g_t &= g_t \circ f_t = id, \quad t \geq 0 \\ a_k(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_t(\gamma_k(t) + i\epsilon), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Analizując odwzorowanie g_t dla czasów t i $t + h$ rozważamy złożenie postaci

$$g_{t+h} = \phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1 \circ g_t + O(h^2). \quad (5.70)$$

Ideę konstrukcji odwzorowania na n igieł przedstawia rysunek 5.9. Pojawiają się tam ozna-



Rysunek 5.9: Idea konstrukcji złożenia dla n igieł. Ilustracja za [24].

czenia dla $j, k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} a_j^0 &= a_j(t) \\ a_j^k &= \phi_k(a_j^{k-1}) \\ a_j^n &= a_j(t+h) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Normalizując pojedynczą funkcję ϕ_j , wiemy, że a_j jest jej punktem stałym, rozumianym w sensie następującej granicy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_j(a_j^{j-1} - \epsilon) + \phi_j(a_j^{j-1} + \epsilon)}{2} = a_j^{j-1}, \quad (5.72)$$

stąd

$$a_j^j = a_j^{j-1}. \quad (5.73)$$

Postać funkcji ϕ_j to

$$\phi_j(z) = \sqrt{(z - a_j^j)^2 + 2hd_j(t)} + a_j^j. \quad (5.74)$$

Funkcje ϕ_j spełniają założenia lematu o pochodnej złożenia, zatem rozwinięcie do członów liniowych złożenia (5.70) ma postać

$$g_{t+h}(z) = g_t(z) + \sum_{i=1}^n \frac{hd_i(t)}{g_t(z) - a_i(t)}, \quad (5.75)$$

gdyż przy $h \rightarrow 0$, $a_j^j \rightarrow a_j(t)$. Znajdźmy jeszcze równanie na funkcje a . Złożenie (uwzględniające normalizację) dla $j = 1, 2, \dots, n$ ma postać

$$a_j(t+h) = \phi_n \circ \dots \circ \phi_{j+1} \circ \phi_{j-1} \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1(a_j(t)) + O(h^2) \quad (5.76)$$

Stąd rozwinięcie

$$a_j(t+h) = a_j(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{hd_i(t)}{a_j(t) - a_i(t)}. \quad (5.77)$$

Przechodząc w równaniach (5.75) i (5.77) z h do zera otrzymujemy równanie Loewnera dla n igieł na półpłaszczyźnie

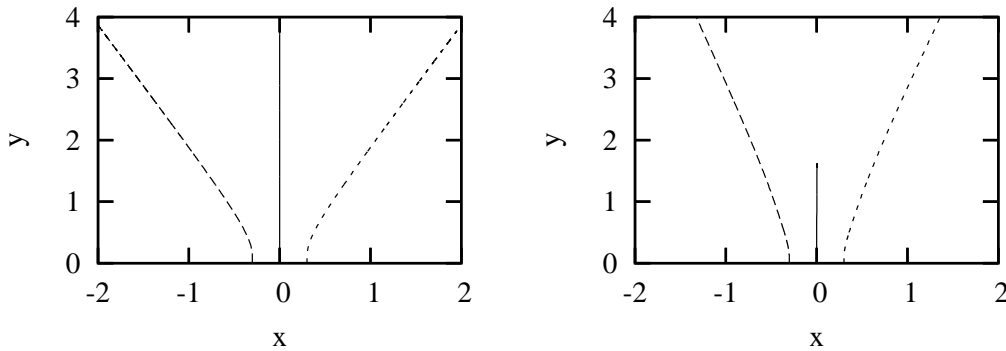
$$\dot{g}_t(z) = \sum_{i=1}^n \frac{d_i(t)}{g_t(z) - a_i(t)}, \quad (5.78)$$

oraz równanie na ruch biegunów odpowiadające geodezyjnym igłom

$$\dot{a}_j(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{d_i(t)}{a_j(t) - a_i(t)}. \quad (5.79)$$

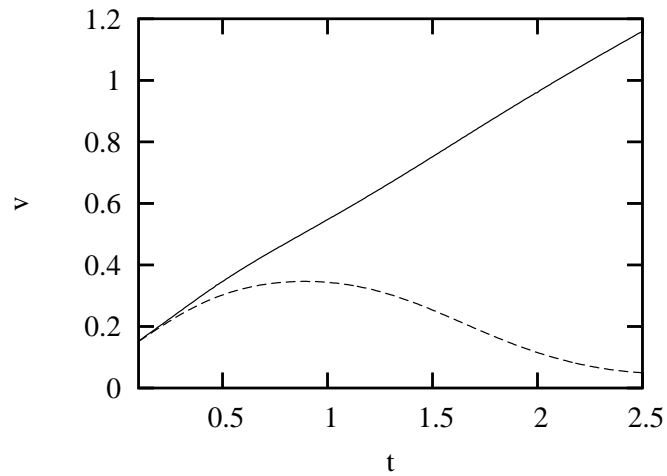
Powyższa procedura jest bardzo uniwersalna przy wyprowadzaniu równań Loewnera, dlatego przy kolejnych wyprowadzeniach pomijając będziemy zbędne szczegóły omówione w tym rozdziale.

Rozwiązania Dla większej liczby igieł na półpłaszczyźnie (od trzech) efekty rywalizacji są widoczne i faktycznie laplace'owskie czynniki wzrostu oraz prędkości przegrywających igieł spadają do zera. Rysunek 5.10 przedstawia porównanie numerycznych trajektorii trzech igieł na półpłaszczyźnie ze stałymi i laplace'owskim czynnikiem wzrostu.



Rysunek 5.10: Kształty trzech igieł rosnących na półpłaszczyźnie ze stałymi czynnikiem wzrostu $d = 1$ (po lewej) i laplace'owskimi czynnikiem wzrostu (po prawej).

W przypadku stałych czynników wzrostu igły początkowo rosną prosto, a gdy zaczynają na siebie oddziaływać odchylają się od siebie. Asymptotycznie rosną prosto mając stałe kąty nachylenia względem osi rzeczywistej o wartości $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{57}}\right) \pi$, uzyskany analitycznie w [24]. W przypadku laplace'owskim występuje rywalizacja. Początkowo igły rosną identycznie, prosto, po czym w fazie oddziaływania środkowa igła zatrzymuje się. Wygrywając rywalizację dwie igły dzielą się przestrzenią, tak jakby środkowej nie było, uzyskując asymptotycznie kąt nachylenia względem osi rzeczywistej jak dla dwóch igieł w przypadku $d = 1$. Przegrywanie środkowej igły obrazuje wykres prędkości w funkcji czasu na rysunku 5.11. Dwie wygrywające igły między sobą już nie rywalizują. Wytłumaczyć to można wynikiem uzyskanym w [19], czyli stabilnością maksymalnie sześciu igieł na płaszczyźnie wyrastających z punktu. Traktując oś rzeczywistą jako dwie igły i odbijając górną półpłaszczyznę na dolną, w przypadku dwóch igieł uzyskamy asymptotycznie stabilny układ sześciu igieł. Dla trzech igieł po odbiciu uzyskamy osiem, czyli dwie z nich (jedna na półpłaszczyźnie) będą musiały przegrać rywalizację.



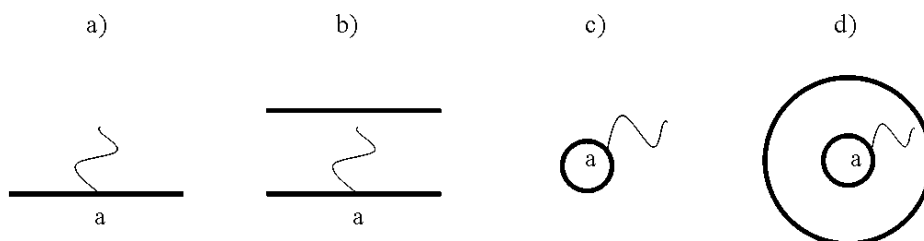
Rysunek 5.11: Prędkości wzrostu trzech igieł na półpłaszczyźnie. Prędkości bocznych igieł są identyczne (linia ciągła). Środkowa (linia przerywana) początkowo rosnąca identycznie jak igły po bokach, przegrywa rywalizację i jej prędkość spada z czasem do zera.

Sytuacja powinna znacząco zmienić się przy przejściu do geometrii kanału. Boczne ścianki ograniczają przestrzeń dla igieł zmuszając je do konkurencji, przez co spodziewać się będziemy efektu rywalizacji już dla dwóch igieł.

Rozdział 6

Równanie Loewnera dla półpaska

Wyprowadzone w poprzednim rozdziale równanie Loewnera nie jest jedynym równaniem tego typu. W omówionym dotychczas przypadku igły zaczynały się w dowolnym punkcie osi rzeczywistej i rosły w obszarze półpłaszczyzny. W późniejszych pracach pojawiły się wersje tego równania dla innych geometrii. I tak np. w pozycjach [24], [26], [27] można znaleźć oprócz równania dla półpłaszczyzny, równanie dla igieł rosnących w obszarze $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \in]0, \pi [\}$ i zaczynających się na osi rzeczywistej (tzw. dipolar Loewner), igieł rosnących w obszarze $\mathbb{W} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ zaczynających się na okręgu jednostkowym (tzw. radial Loewner) oraz w obszarze $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon < |z| < 1, \epsilon \in (0, 1)\}$ z igłami zaczynającymi się na okręgu o promieniu ϵ (tzw. annular Loewner). Rysunek 6.1 przedstawia schematycznie obszary wzrostu igieł dla czterech wymienionych wyżej przypadków. O ile przypadek radialny można trakto-

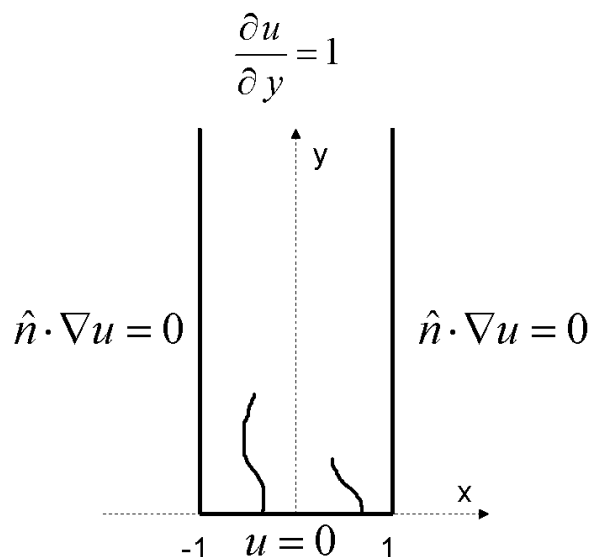


Rysunek 6.1: Porównanie obszarów wzrostu igieł dla przypadków: a) równanie Loewnera dla półpłaszczyzny, b) dipolar Loewner, c) radial Loewner, d) annular Loewner

wać jako model komórki Hele-Shawa o tej samej symetrii, to brakuje opisu odpowiadającego wzrostowi Laplace'a w prostokątnej komórce Hele-Shawa. Równanie Loewnera dla półpłaszczyzny nie daje zadowalającego opisu, gdyż wpływ ścianek bocznych nie jest zaniedbywalny. W tym rozdziale wyprowadzimy równanie Loewnera dla dwuwymiarowego kanału z odbijającymi ściankami bocznymi. Precyzując, interesować nas będzie wzrost igieł z odcinka $[-1, 1]$ na półpasku, przez co rozumiemy zbiór \mathbb{P} zdefiniowany w następujący sposób

$$\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0, \quad \text{Re}(z) \in]0, 1 [\} \quad (6.1)$$

Rozwiązywać będziemy równania Laplace'a w tym obszarze z warunkami brzegowymi $u = 0$ na dolnej podstawie $[-1, 1]$ i igłach, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ na ścianach bocznych oraz $\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const}$ w nieskończoności. Odpowiada to warunkom brzegowym na ciśnienie w prostokątnej komórce Hele-Shawa. Kształt obszaru z zaznaczonymi warunkami brzegowymi dla równania Laplace'a pokazany jest na rysunku 6.2. Bez straty ogólności warunek w nieskończoności możemy sprowadzić do



Rysunek 6.2: Schemat obszaru \mathbb{P} zwanego półpaskiem, z zaznaczonymi warunkami brzegowymi dla równania Laplace'a.

$\frac{\partial u}{\partial y} = 1$. Dla pustego paska (bez igieł) rozwiązanie równania Laplace'a ma postać

$$u_0(x, y) = y. \quad (6.2)$$

To samo rozwiązanie jest używane przy wyprowadzeniu wzoru (2.26), a zatem równanie (2.26) daje laplace'owski czynnik wzrostu nie tylko w przypadku półpłaszczyzny, ale i półpaska.

6.1. Równanie Loewnera dla jednej igły

Szukać będziemy równania na funkcję g_t dla $t \geq 0$, będącą odwzorowaniem konforemnym

$$g_t : \mathbb{P} \setminus \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{P} \quad (6.3)$$

Wprowadźmy, jak poprzednio, funkcję odwrotną

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{P} &\rightarrow \mathbb{P} \setminus \Gamma_1 \\ f_t \circ g_t &= g_t \circ f_t = id, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Odwzorowanie g_t jest jednoznaczne dla danego $\Gamma_1(t)$ z dokładnością do automorfizmu więc i tym razem potrzebny będzie warunek normalizujący, który ustali jednoznacznie funkcję. Ponieważ na dolnej podstawie paska używamy innego warunku brzegowego, to chcielibyśmy aby mapowanie f_t mogło być rozszerzone na ciągłą surjekcję dolnej podstawy $f_t : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \cup \Gamma_1$, dlatego jako warunki normalizacji przyjmujemy

$$\lim_{z \rightarrow -1} g(z) + 1 = \lim_{z \rightarrow 1} g(z) - 1 = 0 \quad (6.5)$$

Ponadto chcemy aby ścianki boczne półpaska przechodziły na siebie, stąd wynika żądanie by punkt w nieskończoności był punktem stałym odwzorowania. Te warunki jednoznacznie określają funkcję g_t . Jak pokażemy, z warunków tych wynika iż

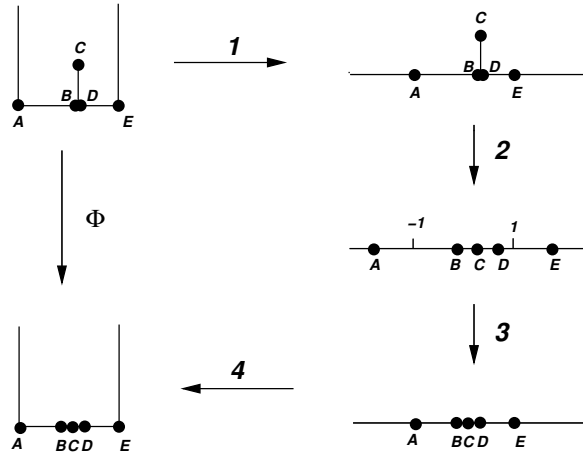
$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \text{Im}[g_t(x + iy)]}{\partial y} = 1, \quad (6.6)$$

a stąd, że

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u_0(\operatorname{Re}[g_t(x + iy)], \operatorname{Im}[g_t(x + iy)])}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \operatorname{Im}[g_t(x + iy)]}{\partial y} = 1, \quad (6.7)$$

czyli spełniony jest warunek brzegowy w nieskończoności.

Całość wyprowadzenia równania Loewnera dla półpłaszczyzny opierała się na odwzorowaniu wciągającym w oś rzeczywistą całą igłę o długości $\sqrt{2hd}$ rosnącą w kierunku osi urojonej. Postaramy się teraz skonstruować analogiczną funkcję dla półpaska „wciągająca” taką samą igłę ale w odcinek $[-1, 1]$ z uwzględnieniem już na tym poziomie warunku normalizacji (6.5). Ideę konstrukcji przedstawia rysunek 6.3.



Rysunek 6.3: idea konstrukcji ϕ

Pierwsze odwzorowanie oznaczone na rysunku przez „1” przekształca półpasek na półpłaszczyznę z zachowaniem punktów $A = -1$ oraz $E = 1$ w tym samym miejscu i jest to funkcja $\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)$. Pamiętając, że wysokość igły jest mała, czyli $\sqrt{2hd} \ll 1$ możemy obliczyć wysokość igły po zadziałaniu pierwszym odwzorowaniem z rozwinięcia w szereg Taylora do członów liniowych w h (dla uproszczenia zapisu pomijając będziemy w notacji zależność d i a od czasu t).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(a + i\sqrt{2hd})\right) \approx \left(1 + \frac{\pi^2}{4}hd\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) + \frac{i\pi}{2}\sqrt{2hd} \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right). \quad (6.8)$$

Zatem oznaczając nową wysokość igły przez $\sqrt{2hd'}$ otrzymujemy

$$d' = d \frac{\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}a\right) \quad (6.9)$$

Wprowadźmy także $\left(1 + \frac{\pi^2}{4}hd\right) = \beta$. Odwzorowanie „2” wciąga igłę w oś rzeczywistą, czyli jest to używana wcześniej do wyprowadzenia równania na półpłaszczyźnie funkcja, która po uwzględnieniu „1” ma postać

$$\varphi(z) = \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)\right)^2 + 2hd' + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right)}. \quad (6.10)$$

Przez $\sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right)$ oznacza obraz czubka igły. Odwzorowanie „3” jest automorfizmem półpłaszczyzny zespolonej z punktem stałym w nieskończoności, czyli funkcją liniową o parametrach

rzeczywistych. Aby spełnić warunek normalizacji żądamy, aby po działaniu „3” punkty A i E wróciły na $A = -1$ i $E = 1$. Ostatnie odwzorowanie „4” to funkcja odwrotna od „1” czyli $\frac{2}{\pi} \arcsin(z)$. Ostateczna postać ϕ to

$$\phi(z) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\frac{2}{\varphi(1) - \varphi(-1)} \left(\varphi(z) - \frac{\varphi(1) + \varphi(-1)}{2} \right) \right] \quad (6.11)$$

Do wyprowadzenia równania Loewnera dla półpaska potrzebna nam będzie jedynie część liniowa w h wzoru (6.11). Rozwijamy więc najpierw pomocnicze wartości występujące w (6.11). Przy przekształceniach będziemy pomijać symbol $O(h^2)$, czyli równość będziemy rozumieć z dokładnością do członów liniowych. Policzmy

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) \right)^2 + 2hd' + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right)} = \\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) \right) \sqrt{1 + \frac{2hd'}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) \right)^2}} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) + \frac{hd'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Teraz różnicę

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi(1) - \varphi(-1)) &= \frac{1}{2} \left[2 + \frac{hd'}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} + \frac{hd'}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} \right] = \\ &= 1 + \frac{hd'}{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}a\right)} = 1 + hd\frac{\pi^2}{4}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

i tak samo dla sumy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi(1) + \varphi(-1)) &= -\beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) + \frac{hd' \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)}{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}a\right)} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) = \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Wstawiamy do (6.11) i dalej rozwijamy w h

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\frac{1}{1 + hd\frac{\pi^2}{4}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right) + \frac{hd'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\left(1 - hd\frac{\pi^2}{4} \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \frac{hd'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} - hd\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \frac{hd'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} - hd\frac{\pi^2}{4} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + hd\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) \right) \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + hd\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}a\right) - \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\tilde{a}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + hd\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)} hd \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)} \right) = \\
&= z + hd \frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)}. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Dla powyższego rozwinięcia zachodzi $\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = \infty$ (do nieskończoności możemy dążyć tylko po $z \in \mathbb{P}$, czyli przy $\text{Im}(z) \rightarrow \infty$). Teraz analizując odwzorowanie g_t w chwilach czasu t i $t+h$ rozważmy złożenie postaci

$$g_{t+h} = \phi \circ g_t + O(h^2), \tag{6.16}$$

podstawiamy (6.15) i otrzymujemy

$$g_{t+h} = g_t + hd \frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}g_t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}g_t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a\right)}. \tag{6.17}$$

Dzieląc przez h i przechodząc z $h \rightarrow 0$ otrzymujemy równanie Loewnera dla jednej igły na półpasku

$$\dot{g}_t(z) = d(t) \frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}g_t(z)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}g_t(z)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a(t)\right)} \tag{6.18}$$

Zauważmy, że dla $z \rightarrow \infty$ (co implikuje $g_t \rightarrow \infty$) otrzymujemy $\dot{g}_t = -id(t) \frac{\pi}{2}$. Różniczkując obustronnie w zmiennej z dostajemy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \dot{g}'_t = 0. \tag{6.19}$$

W chwili początkowej $g_0 = z$ stąd $g'_0 = 1$ czyli rzeczywiście warunek stałego gradientu w nieskończoności jest spełniony. Potrzebujemy oprócz równania Loewnera, znaleźć ruch bieguna, czyli zależność a od t . Równanie (6.18) jest osobiwe dla $z = a$, gdyż $\phi(a)$ nie jest dobrze określone. Odcinki $(-1, a)$ oraz $(a, 1)$ przechodzą na odcinki $(-1, b)$ oraz $(c, 1)$, gdzie $b - c \neq 0$ (oczywiście przy $h \rightarrow 0$ odległość $b - c \rightarrow 0$). Zdefiniujemy więc funkcję w tym punkcie jako średnią arytmetyczną granic b i c

$$\begin{aligned}
\phi(a(t)) &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(a(t) - \epsilon) + \phi(a(t) + \epsilon)}{2} = \\
&= hd(t) \frac{\pi}{4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(a(t) + \epsilon)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(a(t) + \epsilon)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a(t)\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(a(t) - \epsilon)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(a(t) - \epsilon)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a(t)\right)} \right) = \\
&= hd(t) \frac{\pi}{4} \text{tg} \left(\frac{\pi}{2}a(t) \right). \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Stąd wynika równanie na ruch bieguna, zapewniające geodezyjność, postaci

$$\dot{a}(t) = -\frac{\pi}{4} d(t) \text{tg} \left(\frac{\pi}{2}a(t) \right). \tag{6.21}$$

Rozwiązania W ogólności równania (6.18) nie da się rozwiązać analitycznie, ale dla przypadku $a(0) = 0$, co implikuje $a(t) = 0$, znajdziemy takie rozwiązanie. Rozważmy na początek przypadek $d(t) = 1$. Równanie ma wówczas postać:

$$\dot{g}_t = \frac{\pi}{2} \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2}g_t \right) \tag{6.22}$$

Całkujemy z takimi samymi granicami jak przy szukaniu poprzednich rozwiązań

$$\int_{\gamma}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}gt\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}gt\right)} dg_t = \frac{\pi}{2} \int_0^t dt', \quad (6.23)$$

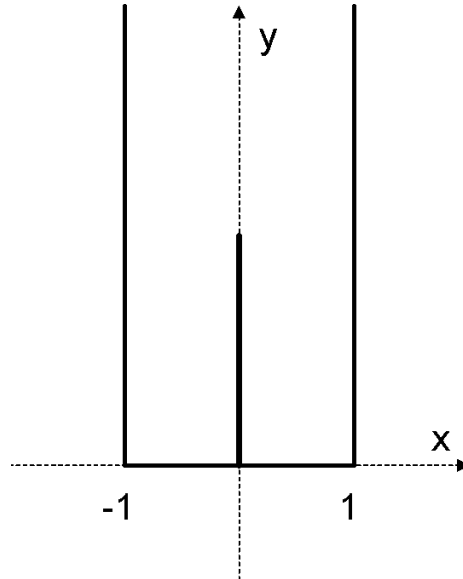
czyli

$$\frac{2}{\pi} \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)\right) = \frac{\pi}{2}t. \quad (6.24)$$

Otrzymujemy położenie wierzchołka igły w funkcji czasu

$$\gamma(t) = \frac{2}{\pi} \arccos\left(e^{\frac{\pi^2}{4}t}\right). \quad (6.25)$$

Dla rzeczywistych t powyższa funkcja ma wartości czysto urojone, czyli igła jak się można było spodziewać z symetrii zagadnienia rośnie pionowo do góry, jak przedstawia to rysunek 6.4. Długość igły w funkcji czasu wyraża się wzorem



Rysunek 6.4: Kształt igły na pasku startującej z $a = 0$.

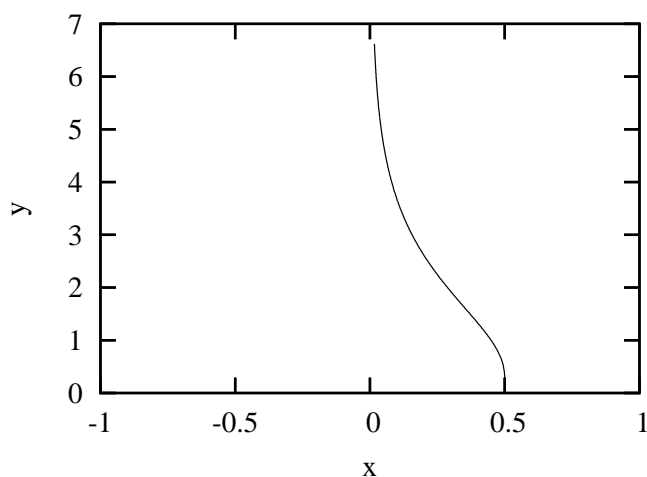
$$l(t) = \frac{2}{i\pi} \arccos\left(e^{\frac{\pi^2}{4}t}\right). \quad (6.26)$$

Rozwinięcie (6.26) w szereg potęgowy w t wokół zera ma postać:

$$l(t) = \sqrt{2}\sqrt{t} + \frac{\pi^2}{12\sqrt{2}}t^{\frac{3}{2}} + O(t^{\frac{5}{2}}). \quad (6.27)$$

Dla małych t rozpoznać można wzrost igły jak dla półpłaszczyzny i $d = 1$ (5.24), czego można było się spodziewać, gdyż mała igła nie powinna „odczuwać” wpływu ścianek i zachowywać się igła na półpłaszczyźnie.

Równania Loewnera dla jednej igły startującej z innego punktu niż $a_0 = 0$ nie da się rozwiązać analitycznie, pozostają jedynie wyniki numeryczne. Kształt igły uzyskany dla $a_0 = 0.5$ przedstawia rysunek (6.5).

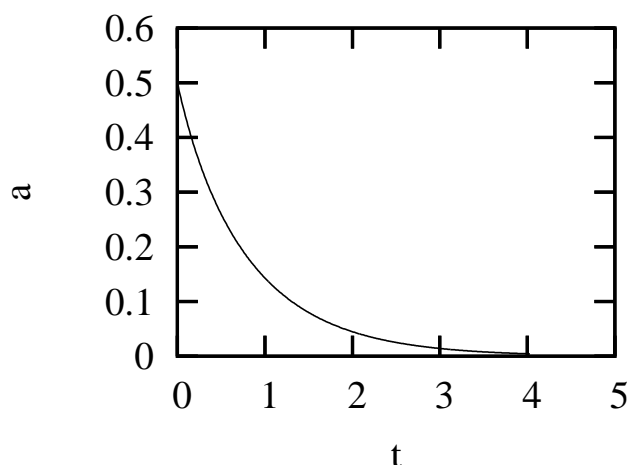


Rysunek 6.5: Kształt jednej igły rosnącej na półpasku, startującej z $a = 0.5$

Startując z dowolnego miejsca na pasku igła w pierwszej fazie rośnie pionowo, nie odczuwając wpływu ścianek. Już przy wysokości rzędu 1/10 szerokości paska efekt brzegu zaczyna być odczuwalny i igła jest przyciągana do osi symetrii, gdzie gradient pola jest największy. Asymptotycznie igła rośnie wzdłuż osi symetrii. Możemy znaleźć analityczne rozwiązanie równania (6.21) na ruch bieguna, przy $d = 1$, z warunkiem początkowym $a(0) = a_0$. Jest to

$$a_t = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[e^{-\frac{\pi^2}{8}t} \sin \left(\frac{\pi}{2} a_0 \right) \right] \quad (6.28)$$

Tak samo jak igła, biegun jest z czasem przyciągany do osi paska tzn. $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$. Powyższą zależność przedstawia rysunek 6.6. Jak już wspomnieliśmy, długość igły w funkcji



Rysunek 6.6: Ruch bieguna $a(t)$, dla jednej igły rosnącej na półpasku ze stałym czynnikiem wzrostu $d = 1$

czasu dla $d = 1$ i $a(0) = 0$ można wyznaczyć analitycznie (6.27). W przypadku $a(0) \neq 0$ do znalezienia kształtu igły używamy całkowania numerycznego, jednak okazuje się, że np. dla $a(0) = 0.5$ zależność wysokości od czasu różniła się asymptotycznie od tej dla igły

symetrycznej o ok. $4 \cdot 10^{-2}$. Nawet dla igieł zaczynających się znacznie bliżej -1 lub 1 różnice w zależności długości od czasu są tego samego rzędu.

Przejdźmy do trudniejszego przypadku laplace'owskiego. Wiemy, że dla $d = |f''(a)|^{-3/2}$ igła rośnie po tej samej trajektorii co igła z $d = 1$, ale z inną zależnością wysokości od czasu. Do jej wyznaczenia potrzebne nam będzie odwzorowanie wciągające prostą igłę o wysokości $h(t)$ w podstawę paska. Konstrukcja takiej funkcji przedstawia się schematycznie tak samo jak dla infitezymalnej igły, czyli jak na rysunku 6.3. Wciągać igłę w oś rzeczywistą będzie funkcja $\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2}z) + \sinh^2(\frac{\pi}{2}h(t))}$, potem aby -1 i 1 wróciły na swoje miejsce należy podzielić przez czynnik $\cosh(\frac{\pi}{2}h(t))$ i wrócić na pasek przez $\frac{2}{\pi} \arcsin$. A zatem funkcja wciągająca igłę o wysokości $h(t)$ w podstawę paska będzie miała postać

$$\xi_t(z) = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2}z) + \sinh^2(\frac{\pi}{2}h(t))}}{\cosh(\frac{\pi}{2}h(t))} \right). \quad (6.29)$$

W celu znalezienia laplace'owskiego czynnika wzrostu potrzebujemy drugiej pochodnej f , posłużymy się szeregiem tożsamości:

$$f_t \circ g_t(z) = z, \quad (6.30)$$

różniczkujemy pierwszy raz

$$f'_t(g_t(z)) \cdot g'_t(z) = 1 \quad (6.31)$$

i drugi raz

$$f''_t(g_t(z)) \cdot g_t^2(z) + f'_t(g_t(z)) \cdot g_t''(z) = 0. \quad (6.32)$$

Stąd otrzymujemy przechodząc do granicy $z \rightarrow \gamma$ i pamiętając, że $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + i\epsilon) = \gamma$

$$f''_t(a) = - \lim_{z \rightarrow \gamma} \frac{g_t''(z)}{g_t'^3(z)}. \quad (6.33)$$

Wiemy, że $\gamma = ih(t)$, $a = 0$. Możemy zatem policzyć (pomijając uciążliwe przekształcenia)

$$|f''_t(0)| = \lim_{z \rightarrow ih(t)} \left| \frac{\xi_t''(z)}{\xi_t'^3(z)} \right| = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctgh} \left(\frac{\pi}{2} h(t) \right). \quad (6.34)$$

W granicy $h \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\lim_{h(t) \rightarrow \infty} |f''_t(0)| = \frac{\pi}{2}. \quad (6.35)$$

Czynnik wzrostu zdefiniowany równaniem (5.10) ma zatem postać

$$d(t) = \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{ctgh} \left(\frac{\pi}{2} h(t) \right) \right]^{-3/2} \quad (6.36)$$

a jego asymptotyczna wartość to

$$\lim_{h(t) \rightarrow \infty} d = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-3/2} \approx 0,507949\dots \quad (6.37)$$

Wstawiając $\xi_t(z)$ do równania Loewnera otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_t(z) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{ctgh} \left(\frac{\pi}{2} h(t) \right) \right]^{-3/2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \xi_t(z) \right). \quad (6.38)$$

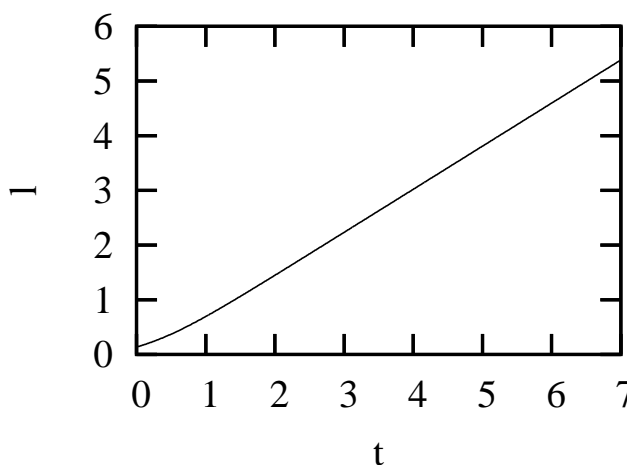
Po wstawieniu postaci funkcji $\xi_t(z)$ ze wzoru (6.29) i wielu przekształceniach arytmetycznych otrzymujemy równanie różniczkowe na $h(t)$ postaci

$$\dot{h}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \operatorname{tgh} \left(\frac{\pi}{2} h(t) \right)}. \quad (6.39)$$

Niestety powyższego równania nie da się rozwiązać analitycznie, wiemy natomiast, że dla małych $h(t)$ można nim równaniu zastosować przybliżenie $\frac{2}{\pi} \operatorname{tgh} \left(\frac{\pi}{2} h(t) \right) \approx h(t)$. Z tego równania zaś wynika paraboliczny wzrost w czasie, czyli jak w przypadku równania (5.30) opisującego wzrost igły na półpłaszczyźnie z laplace'owskim czynnikiem wzrostu. Asymptotycznie z $h(t) \rightarrow \infty$ prawa strona równania dąży do stałej, stąd prędkość wzrostu jest stała i dana przez:

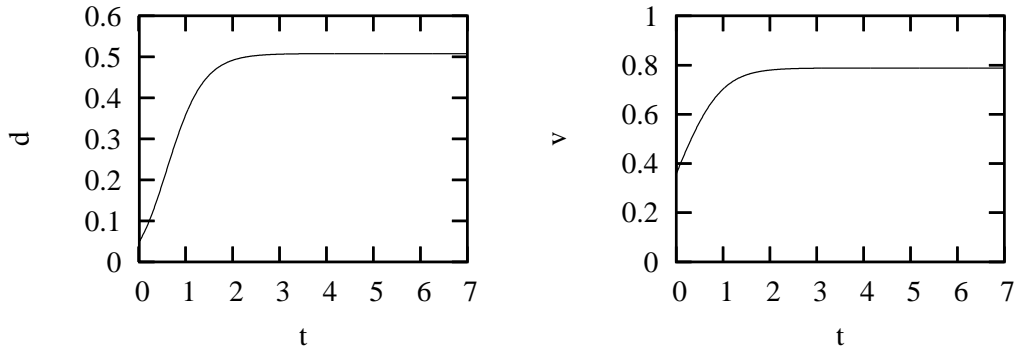
$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = |f_t''(0)|^{-1/2} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1/2} \approx 0.7978845 \dots \quad (6.40)$$

Uzyskaną numerycznie zależność długości od czasu w przypadku laplace'owskim, dla $a = 0$ przedstawia rysunek 6.7.



Rysunek 6.7: Zależność długości od czasu dla jednej igły rosnącej na półpasku z laplace'owskim czynnikiem wzrostu, startującej z $a = 0$.

Dla małych czasów rozpoznać możemy wzrost paraboliczny, odpowiadający fazie, gdy wpływ ścianek jest zanedbywalny, szybko przechodzi on jednak we wzrost ze stałą prędkością, czyli asymptotyczne zachowanie dla paska. Analogicznie do przypadku stałego czynnika wzrostu, mimo różnego kształtu igieł, różnice w powyższej zależności dla początkowego $a = 0$ i $a = 0.5$ są rzędu 10^{-2} . Zbadać możemy jeszcze zależność czynnika wzrostu i prędkości wzrostu od czasu. Chociaż jej postać analityczna nie jest znana, możemy wyznaczyć asymptotyczne wartości d i v dane odpowiednio równaniami (6.37) i (6.40). Zależność czynnika wzrostu i prędkości od czasu uzyskane numerycznie przedstawia rysunek 6.8.



Rysunek 6.8: Zależność czynnika wzrostu d (po lewej) i prędkości wzrostu v (po prawej) dla jednej igły rosnącej na półpasku z laplace'owskim czynnikiem wzrostu, startującej z $a = 0$.

Igła startująca z innego miejsca niż $a = 0$, jak już wiemy jest przyciągana do środka paska i asymptotycznie zachowuje się jak igła rosnąca wzdłuż osi symetrii. Wygięcie igły na dole paska (widoczne na rysunku 6.5) nie powinno mieć wpływu na asymptotyczną wartość czynnika wzrostu i prędkości igły. Rzeczywiście dla igły startującej z $a = 0.5$, zależności od czasu czynnika i prędkości wzrostu różnią się o wartość rzędu 10^{-2} od tych dla igły startującej z $a = 0$, natomiast wartość asymptotyczna odtwarzana jest z maksymalną dokładnością numeryczną.

Po przeanalizowaniu zachowania jednej igły możemy zacząć szukać efektu rywalizacji w układzie o większej liczbie igieł.

6.2. Równanie Loewnera dla wielu igieł

Uogólnienie na $n \in \mathbb{N}$ igieł przeprowadzamy prawie tak samo jak dla półpłaszczyzny. Szukamy równania na g_t dla $t \geq 0$ będącego konforemnym odwzorowaniem

$$g_t : \mathbb{P} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n) \rightarrow \mathbb{P}$$

Jednoznaczność uzyskamy z warunku (6.5). Oznaczmy przez $\gamma_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ wierzchołki łuków $\Gamma_k(t)$. Ponadto wprowadzamy oznaczenia analogiczne do przyjętych na półpłaszczyźnie

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{P} &\rightarrow \mathbb{P} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n) \\ f_t \circ g_t &= g_t \circ f_t = id, \quad t \geq 0 \\ a_k(t) &= g_t(\gamma_k(t)), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Analizując odwzorowanie g_t dla czasów t i $t + h$ rozważmy następujące złożenie

$$g_{t+h} = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 \circ g_t + O(h^2), \quad (6.41)$$

ponadto dla $j, k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} a_j^0 &= a_j(t) \\ a_j^k &= \Phi_k(a_j^{k-1}) \\ a_j^n &= a_j(t+h). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Funkcje Φ_j dane są przez

$$\Phi_j(z) = z + hd \frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_j^{j-1}\right)}. \quad (6.43)$$

Spełniają one założenia lematu o pochodnej złożenia, zatem rozwinięcie do członów liniowych złożenia (6.41) ma postać

$$g_{t+h}(z) = g_t(z) + \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n hd_i \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}g_t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}g_t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_i\right)}. \quad (6.44)$$

W mianowniku pojawia się a_i , gdyż przy $h \rightarrow 0$, $a_i^{i-1} \rightarrow a_j(t)$. Równania na ewolucję a_j możemy znaleźć z tego samego złożenia (6.41), ale pamiętając, że przy obliczaniu $\Phi_j(a_j^{j-1})$ użyć musimy rozwinięcia (6.20)

$$a_j(t+h) = a_j(t) - \frac{\pi}{4} hd_j(t) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}a_j(t)\right) + \frac{\pi}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^n hd_i \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_j(t)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}a_j(t)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_i(t)\right)} \quad (6.45)$$

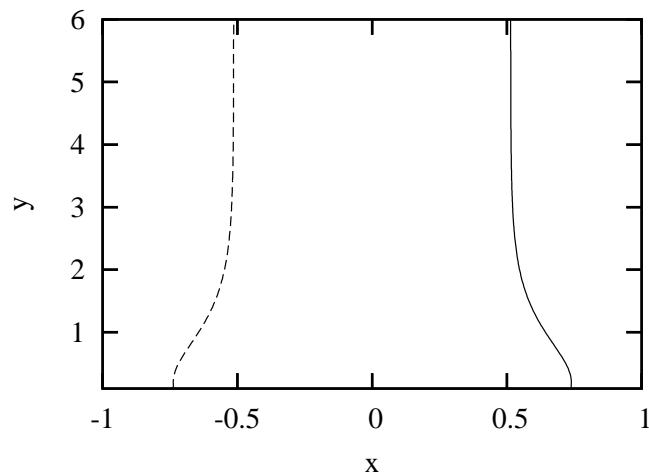
Przechodząc w równaniach (6.44) i (6.45) z h do zera otrzymujemy równanie Loewnera dla n igieł na półpasku

$$\dot{g}_t = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n d_i \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}g_t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}g_t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_i\right)}, \quad (6.46)$$

oraz warunek na ruch biegunów, zapewniający geodezyjność

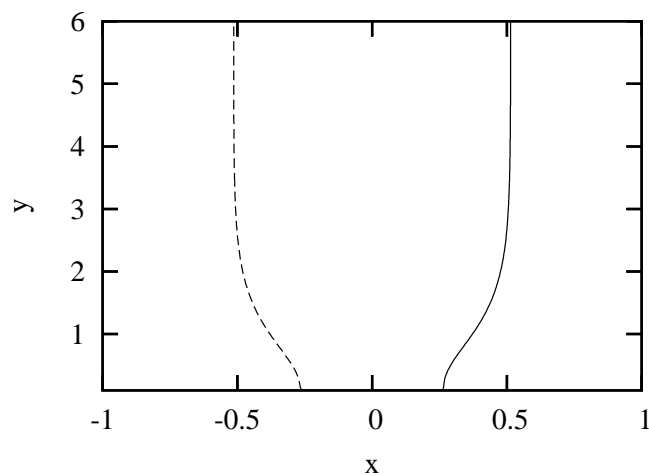
$$\dot{a}_k = -\frac{\pi}{4} d_k \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}a_k\right) + \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n d_i \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}a_k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_i\right)}. \quad (6.47)$$

Rozwiązania Rozważanie rozpoczniemy od zachowania dwóch igieł w przypadku stałych i równych czynników wzrostu $d = 1$. Kształt igieł (po lewej) dla przykładowych, symetrycznych warunków początkowych $a_1(0) = 0.75 = -a_2(0)$ uzyskanych numerycznie przedstawia rysunek 6.9.



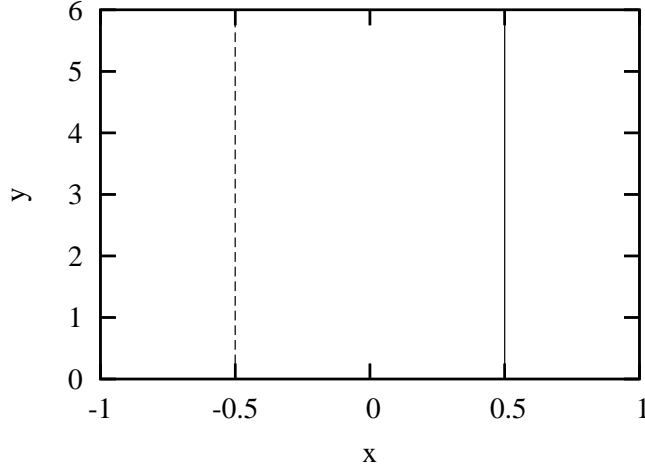
Rysunek 6.9: Kształt dwóch igieł rosnących na półpasku ze stałymi czynnikami wzrostu, startujących z symetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.75 = -a_2(0)$

Obserwujemy zbliżanie się igieł do prostych $x = 0.5$ i $x = -0.5$. Dla warunków początkowych $a_1(0) = 0.25 = -a_2(0)$ to samo zjawisko widać na rysunku 6.10.



Rysunek 6.10: Kształt dwóch igieł rosnących na półpasku ze stałymi czynnikami wzrostu, startujących z symetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.25 = -a_2(0)$

Natomiast dla warunku początkowego $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$ igły rosną prosto, jak na rysunku 6.11.



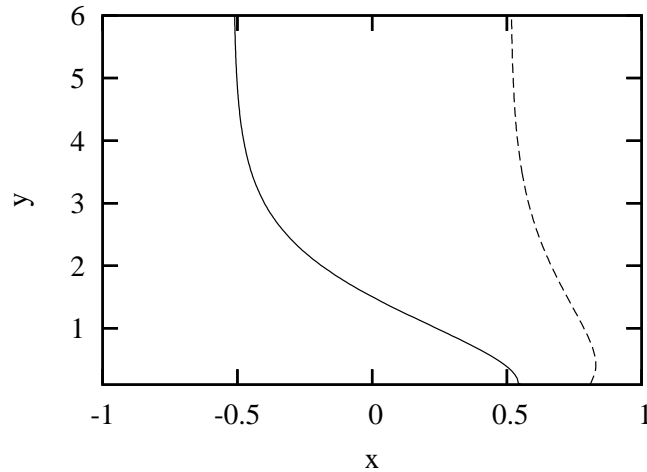
Rysunek 6.11: Kształt dwóch igieł rosnących na półpasku ze stałymi czynnikami wzrostu, startujących z symetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$

To samo zjawisko następuje dla biegunów, a_1 i a_2 przyciągane są do ± 0.5 . Intuicyjnie można było się spodziewać takiego zachowania z interpretacji fizycznej zachowania igieł, przez model DLA. Przypomnijmy, że w tym modelu, opisanym w paragrafie 2.4 zakładamy, iż z nieskończoności wypuszczany jest stały strumień dyfundujących cząstek, które przyklejają się do czubka igły powodując jej wzrost. Igieły dzielą się strumieniem cząstek w ten sposób, aby każda otrzymywała ich tyle samo, zatem rozłożą się jednorodnie na odcinku $[-1, 1]$ i będą utrzymywać stałe odległości między sobą i połowiczną odległość do odbijających cząstki ścianek bocznych. Ogólnie dla n igieł na półpasku moglibyśmy się spodziewać że położenia biegunów $a_i = (2i + 1)/n - 1$, $i = 0, \dots, n - 1$ będą punktami stałymi układu równań (6.47) ze stałymi $d = 1$. Sprawdźmy dla bieguna o indeksie k

$$\begin{aligned}
\dot{a}_k &= -\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right) + \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{2i - n + 1}{n} \right)} = \\
&= -\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right) + \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{2k - n + 1}{2n} + \frac{2i - n + 1}{2n} \right) \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{2k - n + 1}{2n} - \frac{2i - n + 1}{2n} \right) \right)} = \\
&= -\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right) + \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{k + i - n + 1}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{k - i}{n} \right)} = \\
&= -\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right) - \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k + i - n + 1}{n} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k - i}{n} \right) = \\
&= -\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k - n + 1}{n} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k + i + 1}{n} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k - i}{n} \right) = \\
&= \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2k + 1}{n} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq -k-1}}^{-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k - i}{n} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k - i}{n} \right) =
\end{aligned}$$

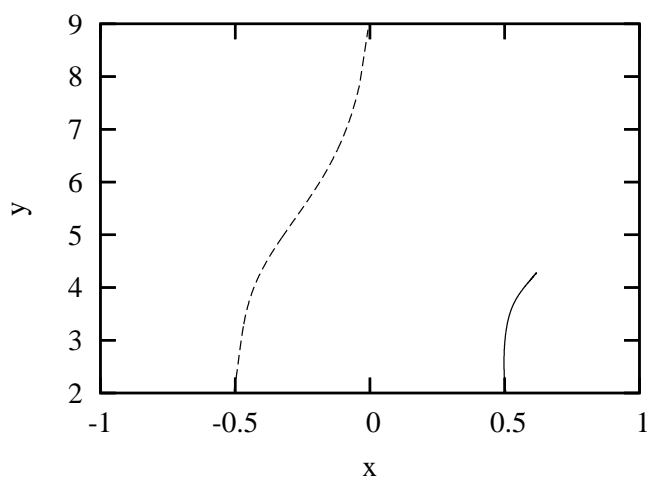
$$= \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq k}}^{n-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{k-i}{n} \right) = 0.$$

Indeks k był dowolny, zatem rzeczywiście takie położenie biegunów jest punktem stałym układu. Możemy zaobserwować, że dla dowolnego położenia początkowego dwóch igieł układ będzie dążył do opisanego w ten sposób stanu, co pokazuje rysunek 6.12.



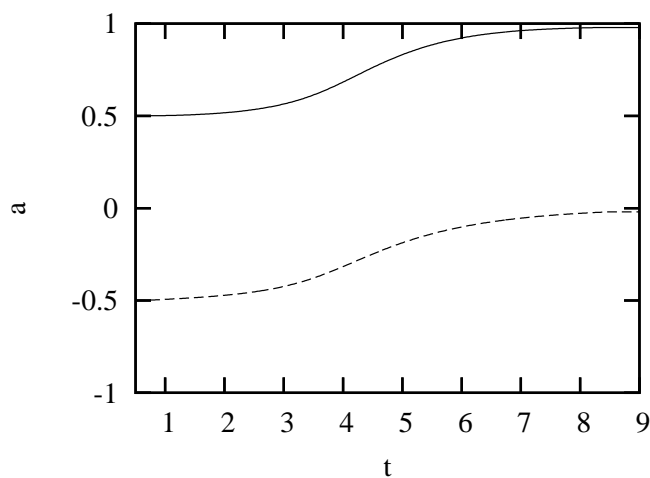
Rysunek 6.12: Kształt dwóch igieł rosnących na półpasku ze stałymi czynnikami wzrostu, startujących z niesymetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.6$, $a_2(0) = 0.8$

Układ równań (6.47) ze stałymi czynnikami wzrostu stanowi bardzo ciekawy przykład układu dynamicznego. Pierwszy człon odpowiada zewnętrznemu oddziaływaniu na każdy z biegunów, które przyciąga je do $a = 0$, drugi zaś to nieliniowe, odpychające oddziaływanie między biegunami. Z uwagi na człon odpychający, trajektorie biegunów nie mogą się przecinać. Tak skomplikowany układ posiada zarazem punkty stałe o tak dużej symetrii. Przypadek stałych czynników wzrostu nie jest jednak interesujący fizycznie. Dużo ciekawsze i ważne z eksperymentalnego punktu widzenia są laplace'owskie czynniki wzrostu. Przy stałych czynnikach wzrostu jak już wiemy, rywalizacja wystąpić nie może. Czy zatem rozważając dwie igły z laplace'owskim czynnikiem wzrostu można uzyskać rywalizację? Zbadajmy najpierw warunki początkowe z symetrią odbicia względem środka paska, tzn. $a_1(0) = -a_2(0)$. Zdać by się mogło, że taką samą symetrię musi mieć także rozwiązanie. W tym przypadku spodziewać się będziemy, tak jak jak można było zaobserwować w eksperymentach odpowiadających wzrostowi Laplace'a, niestabilności rozwiązania. Metody numeryczne zawsze obarczone są jakimś błędem (co może odpowiadać fizycznym fluktuacjom pola Laplace'a), przez co niestabilne rozwiązanie symetryczne będzie przechodzić w jedno ze stabilnych rozwiązań, które znajdować będziemy numerycznie. Rysunek 6.13 przedstawia kształt igieł startujących z $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$.



Rysunek 6.13: Kształt dwóch igieł rosnących na półpasku z laplace'owskimi czynnikami wzrostu startujących z symetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$. (Obcięto na rysunku fazę równoległego wzrostu)

Symetria jest spontanicznie łamana. Przeanalizujmy jeszcze ruch biegunów dla tego przypadku (rysunek 6.14).



Rysunek 6.14: Ruch biegunów dwóch igieł rosnących na półpasku z laplace'owskimi czynnikami wzrostu, startujących z symetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$.

Biegun zwycięskiej igły dąży do zera, natomiast pokonanej spychany jest do 1 lub -1. Dla dwóch igieł równania na ruch biegunów mają postać:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{\pi}{4}d_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}a_1\right) + \frac{\pi}{2}d_2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}a_1\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_2\right)} \\ \dot{a}_2 &= -\frac{\pi}{4}d_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}a_2\right) + \frac{\pi}{2}d_1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}a_2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_1\right)} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Jeśli założymy, że druga igła przegrywa, wówczas $d_2 \rightarrow 0$. Wstawmy zatem do równań $d_2 = 0$

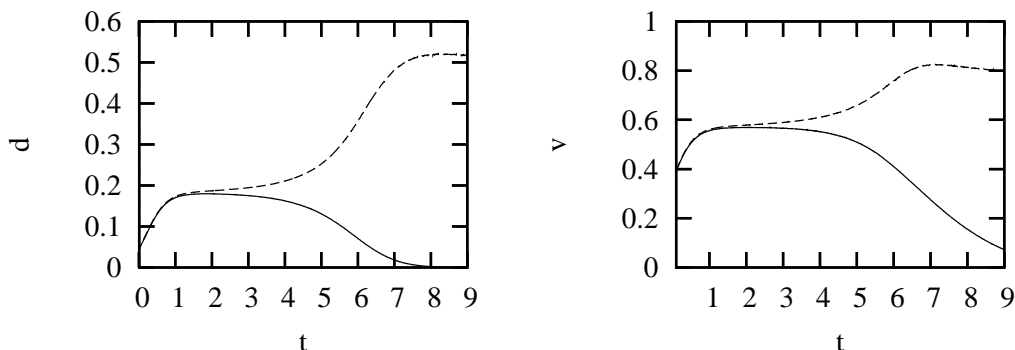
$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{\pi}{4}d_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}a_1\right) \\ \dot{a}_2 &= \frac{\pi}{2}d_1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}a_2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}a_2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}a_1\right)}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Punktem stałym pierwszego z równań jest $a_1 = 0$. Wówczas drugie równanie ma postać

$$\dot{a}_2 = -\frac{\pi}{4}d_1 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}a_2\right) \quad (6.50)$$

i dla niezerowego d_1 , jego punkty stałe to $a_2 = 1$ lub $a_2 = -1$. Zjawisko to można zrozumieć pamiętając że podstawa paska „wciągana” pod działaniem funkcji f_t na powierzchnie boczne igieł wraz z podstawą. Gdy jedna z igieł jest dłuższa, jej obraz zajmuje większą część odcinka, odpowiadający jej biegun zbliża się do zera, a drugi biegun spychany jest ku krańcom.

Proces rywalizacji prześledzić można bardzo dokładnie na rysunku 6.15, przedstawiającym czynniki wzrostu, oraz prędkości igieł z rysunku 6.13.

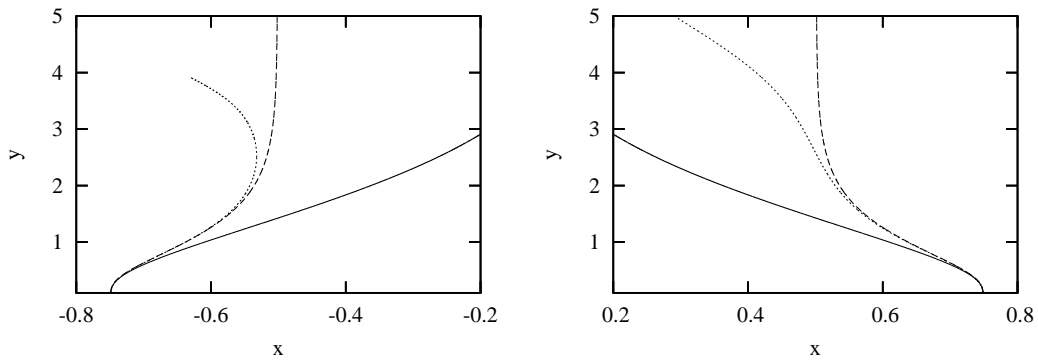


Rysunek 6.15: Zależność czynnika wzrostu d (po lewej) i prędkości wzrostu v (po prawej), dla dwóch igieł rosnących na półpasku z laplace'owskimi czynnikami wzrostu, startujących z symetrycznego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$.

Początkowo igły są identyczne i rosną z jednakową prędkością, do czasu ok.1.5-2 (położenia początkowe igieł są identyczne z dokładnością do 15 cyfr znaczących, a wszelkie różnice w ich ewolucji wynikają z wpływu szumu numerycznego i niestabilności układu). Następnie jedna z igieł wybija się ponad drugą, przez co rośnie coraz szybciej, aż osiągnie asymptotyczne wartości czynnika i prędkości wzrostu dla jednej igły rosnącej samotnie na pasku. W tym samym czasie prędkość i czynnik wzrostu przegrywającej igły spadają do zera. Na rysunku 6.20 obejrzyć możemy wersję rysunku 6.13 z naniesionymi liniami ekwipotencjalnymi pola Laplace'a wokół igieł. Na pole wokół zwycięskiej igły, pokonana zdaje się w ogóle nie mieć wpływu. Gradient pola przy czubku przegrywającej na rysunku igły jest sto razy mniejszy, niż przy czubku wygrywającej.

Aby zbadać dokładniej wpływ igieł na siebie, przyjrzyjmy się dokładniej kształtom początków igieł z rysunku startujących z trochę bardziej rozsuniętego warunku początkowego, czyli $a_1(0) = 0.75 = -a_2(0)$. Porównajmy je z kształtem igieł rosnących ze stałym czynnikiem wzrostu oraz pojedynczą igłą startującą z tych samych warunków początkowych. Porównanie to przedstawia rysunek 6.16.

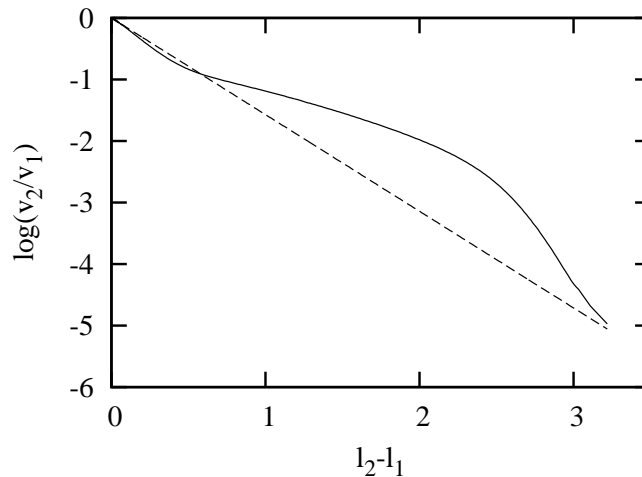
Widać, że zarówno przegrywająca igła (po lewej), jak i wygrywająca (po prawej) początkowo pokrywają się z porównywanymi przypadkami (do wysokości ok 0.5). Pierwsza oddziela



Rysunek 6.16: Porównanie trajektorii dwóch igieł rosnących z laplace'owskimi czynnikami wzrostu (linia kropkowana) z trajektoriami dwóch igieł rosnących ze stałymi czynnikami wzrostu (linia przerywana) i pojedynczymi igłami zaczynającymi się w tych samych punktach co dwie badane, rosnącymi samotnie na pasku (linia ciągła). Początkowe położenia biegunów $a_1(0) = 0.75 = -a_2(0)$. Z lewej zbliżenie lewej igły, a z prawej - prawej igły.

się pojedyncza igła, brak w tym przypadku efektu odpychania między igłami, który utrzymuje asymptotycznie dwie igły w stałej odległości równej jedne. Laplace'owskie igły oddzielają się od przypadku symetrycznego około wysokości 1.5-2 czyli przy wysokości tego samego rzędu co odległość między igłami.

Aby prześledzić proces rywalizacji zbadajmy stosunek prędkości wzrostu v_1/v_2 w funkcji różnicy długości $l_1 - l_2$. Porównajmy zatem dane numeryczne z wynikiem analitycznym dla nieskończenie długich, prostych igieł (4.10), czyli $v_1/v_2 = \exp(\pi/2(l_1 - l_2))$. Porównanie przedstawia rysunek 6.17. Należy zwrócić uwagę, że argumentem funkcji na wykresie jest róż-

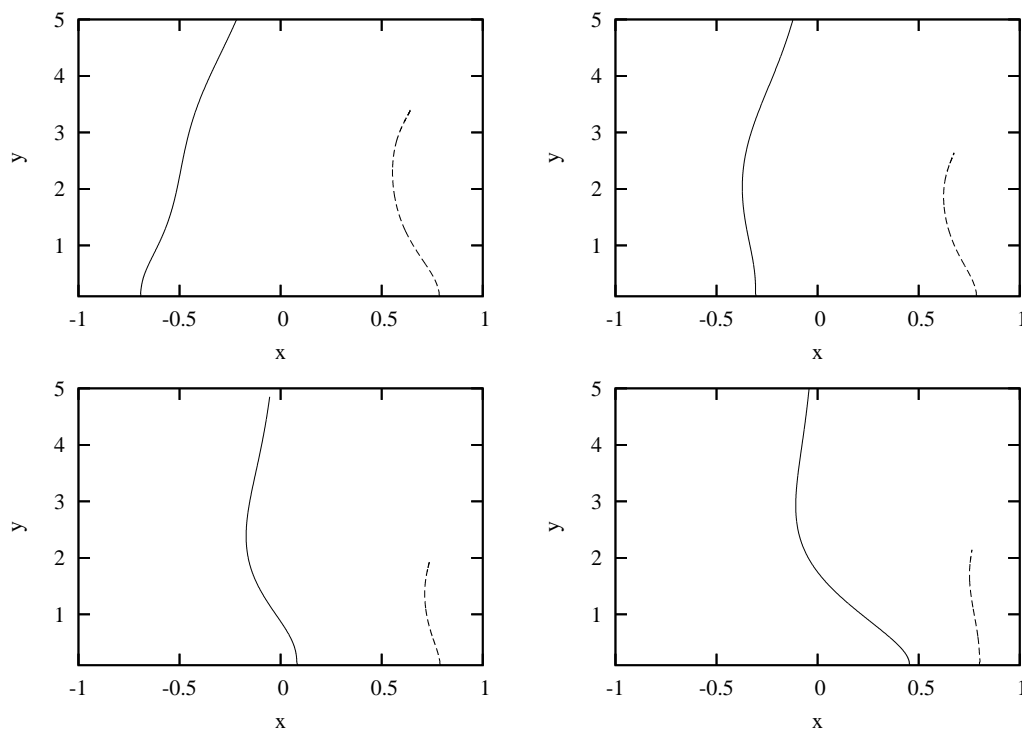


Rysunek 6.17: Stosunek prędkości igieł w funkcji różnicy długości w skali pół-logarytmicznej dla dwóch igieł rosnących na półpasku z laplace'owskimi czynnikami wzrostu, startujących z symetrycznego, stabilnego położenia początkowego biegunów $a_1(0) = 0.5 = -a_2(0)$. Wynik numeryczny (linia ciągła) i wynik analityczny dla nieskończenie długich, prostych igieł (4.10) (linia przerywana)

nica długości, która jest niezerowa dopiero po rozpoczęciu rywalizacji, gdy wysokość igieł jest stosunkowo duża (ok.2). Na początku rywalizacji igły są jeszcze skierowane pionowo do góry

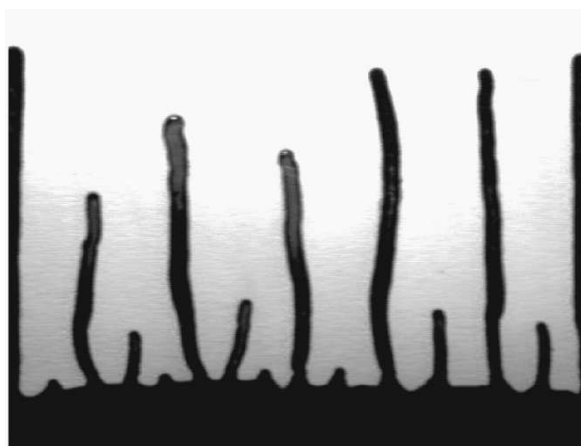
i dlatego dla małych $l_1 - l_2$ wykreślona zależność pokrywa się z wynikiem dla prostych igieł. Na etapie ewolucji odpowiadającym odginaniu się igieł dane numeryczne odbiegają od rozwiązania (4.10). Przyczyną rozbieżności wykresów jest kształt igieł (nie są proste) i miejsce, w którym znajduje się czubek przegranej igły (nie jest to środek przestrzeni między wygrywającą igłą a boczną ścianką). Asymptotycznie wyniki jednak dąży do krzywej analitycznej, gdyż przy dużych różnicach wysokości wpływ wygięcia igieł maleje. Z przyczyn czysto numerycznych, związanych z niedokładnością liczenia \sin i \arcsin dla dużych argumentów urojonych, nie można było zbadać dalszej fazy ewolucji układu.

Dla przypadków niesymetrycznego położenia początkowego biegunów, czynniki wzrostu i prędkości igieł od początku się różnią, zatem równanie Loewnera na półpasku zadaje deterministyczną, stabilną ewolucję, w której zawsze ta sama igła przegrywa rywalizację. Intuicyjnym może wydawać się fakt, że wygrywać będzie igła startująca bliżej osi symetrii paska. Potwierdziły to testy numeryczne. Przykładowe cztery trajektorie igieł, dla przegrywającej igły położonej w $a_2(0) = 0.8$ i $a_1(0) = -0.7, -0.3, 0.1, 0.5$ przedstawia rysunek 6.18.



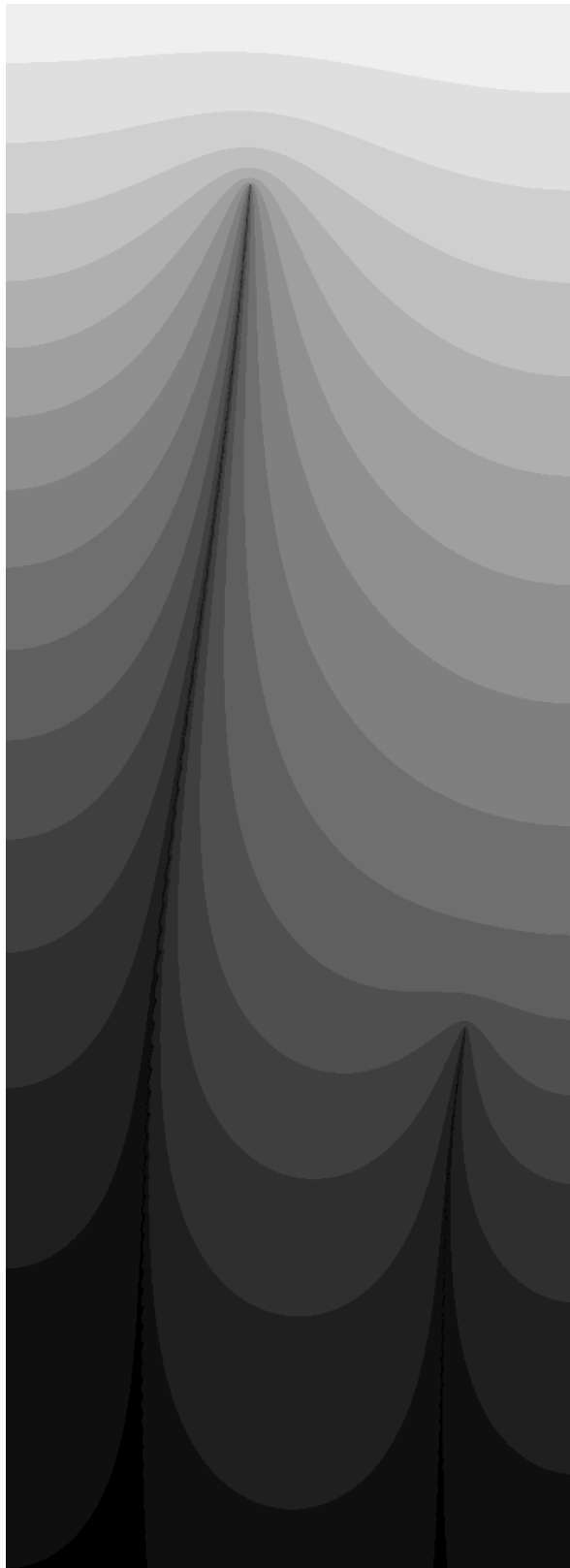
Rysunek 6.18: Przykładowe cztery kształty trajektorii dla dwóch igieł rosnących na półpasku z laplace'owskimi czynnikami wzrostu startujących z położen w $a_2(0) = 0.8$ i $a_1(0) = -0.7, -0.3, 0.1, 0.5$

Eksperyment: Spalanie w komórce Hele-Shawa Uzyskane przez nas wyniki można porównać z obserwacjami doświadczalnymi. Zik i Moses [28] wykonali eksperymenty spalania kartki papieru w prostokątnej komórce Hele Shawa przy małym stężeniu tlenu. Prostokątną kartkę podpalano na jednym z brzegów a przez przeciwległą krawędź podawany był tlen. Wypalane na kartce kształty zmieniały się ze zmianą prędkości dostarczania tlenu. W przypadku granicznym, bardzo małej ilości tlenu, na kartce wypalały się podłużne palce, które z dobrym przybliżeniem traktować można jako igły. Zdjęcie z tego eksperymentu przedstawia rysunek 6.19. Zachowanie igieł na tym rysunku porównajmy z trajektoriami igieł wykreślonymi na



Rysunek 6.19: Zdjęcie z eksperymentu spalania w komórce Hele-Shawa przy bardzo małej ilości tlenu. Widoczne są zjawiska odpychania, rywalizacji i przejmowania przestrzeni po przegranej igle.

rysunkach 6.13 i 6.18. Zaobserwowane dla dwóch igieł na półpasku zjawiska, takie jak: początkowe odpychanie się igieł, rywalizacja i przejmowanie przez zwycięską igłę miejsca nad przegraną wyraźnie widoczne są na załączonym zdjęciu.



Rysunek 6.20: Poziomice pola harmonicznego wokół igieł z rysunku (6.13).

Rozdział 7

Równanie Loewnera dla walca

Kolejnym przypadkiem, którym się zajmiemy, jest problem wzrostu igieł w geometrii paska, ale tym razem z okresowymi warunkami brzegowymi: utożsamimy dwie pionowe ścianki boczne, nadając obszarowi kształt nieskończonego walca. Szczególny przypadek takiego układu (dla prostych igieł) był już badany w rozdziale 4. Okresowe warunki brzegowe pozwalają na modelowanie małej liczby igieł, znajdujących się wewnątrz dużego układu. Przyjmując, jak poprzednio warunek stałego gradientu w nieskończoności, mającego wartość 1, dla pustego (bez igieł) walca rozwiązanie równania Laplace'a jest takie samo jak w poprzednich rozdziałach. Wynika stąd, że i tym przypadku będziemy mogli korzystać z równania (2.26) na czynnik wzrostu, który będzie odpowiadał wzrostowi laplace'owskiemu.

7.1. Równanie Loewnera dla jednej igły

Do wyprowadzenia równania potrzebne nam jest odwzorowanie na walcu wciągające małą igłę w podstawę walca. Klasycznie już rozważamy na pasku \mathbb{P} z utożsamionymi bokami $y = 1$ i $y = -1$, igłę o wysokości $\sqrt{2hd}$ wychodzącą z punktu $a > 0$ na osi rzeczywistej (analogicznie rozważyć można przypadek $a < 0$). Zauważmy, że rozwiązanie równania Laplace'a w takim obszarze ma symetrię odbicia względem osi $x = a$ tzn. zamiana z na $2a - z$ nie zmienia rozwiązania. Wynika stąd, że na prostej $x = a - 1$ normalna do niej składowa gradientu pola znika. Wykonując zamianę zmiennych $\tilde{z} = z - a$ otrzymamy igłę zaczynającą się w zerze o wysokości $\sqrt{2hd}$ na półpasku z warunkiem brzegowym $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ na ściankach bocznych. W tym przypadku poszukiwane odwzorowanie wciągające igły jest identyczne z rozważanym w poprzednim rozdziale, jest to (6.15) z biegunem w $a = 0$:

$$\phi(\tilde{z}) = \tilde{z} + hd \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \tilde{z} \right). \quad (7.1)$$

Stąd szukanym przez nas odwzorowaniem, z dokładnością do stałej addytywnej $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ jest

$$\Psi(z) = z + hd \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (z - a) \right) - a + \tilde{a}. \quad (7.2)$$

Aby unormować nasze odwzorowanie zauważmy, że równanie Loewnera na walcu o podstawie $2L$ powinno dawać równanie Loewnera dla półpłaszczyzny w granicy $L \rightarrow \infty$, czyli

$$\phi(z) = z + \frac{hd}{z - a}. \quad (7.3)$$

Nasz walec ma szerokość 2, nietrudno jednak podać odpowiadającą funkcję wciągającą, dla walca o podstawie $2L$, daną przez przeskalowanie $\Psi(z)$

$$\Psi(z)/L = z/L + \frac{hd}{L^2} \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (z-a)/L \right) - a/L + \tilde{a}/L. \quad (7.4)$$

Przechodząc z $L \rightarrow \infty$ mamy $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}(z-a)/L) \approx \frac{2}{\pi} L/(z-a)$. Wówczas

$$\Psi(z) = z + \frac{hd}{z-a} + \tilde{a} - a. \quad (7.5)$$

Z porównania (7.3) i (7.5) wynika, że należy przyjąć $\tilde{a} = a$.

Podstawiając do złożenia (5.6) i przechodząc z $h \rightarrow 0$ otrzymujemy równanie Loewnera dla jednej igły na walcu

$$\dot{g}_t = d \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (g_t - a) \right). \quad (7.6)$$

Przez przyjętą normalizację, warunek geodezyjności ma taką samą postać jak dla półpłaszczyzny, czyli $a = \text{const}$. Równanie Loewnera dla walca nie wyróżnia punktów na jego podstawie, a jego rozwiązania odpowiadają przesuniętym o stałą rozwiązaniom dla jednej igły na środku półpaska.

7.2. Równanie Loewnera dla wielu igieł

Uogólnienie na $n \in \mathbb{N}$ igieł przeprowadzamy tak samo jak dla półpłaszczyzny. Oznaczmy przez $\gamma_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ wierzchołki łuków $\Gamma_k(t)$. Ponadto wprowadzamy oznaczenia analogiczne do przyjętych na półpłaszczyźnie

$$\begin{aligned} f_t &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n) \\ f_t \circ g_t &= g_t \circ f_t = id, \quad t \geq 0 \\ a_k(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_t(\gamma_k(t) + i\epsilon), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7.7)$$

Analizując odwzorowanie g_t dla czasów t i $t+h$ rozważmy złożenie

$$g_{t+h} = \Psi_n \circ \dots \circ \Psi_2 \circ \Psi_1 \circ g_t + O(h^2), \quad (7.8)$$

gdzie

$$\Psi_j(z) = z + hd_j \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (z - a_j) \right). \quad (7.9)$$

Ponadto dla $j, k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} a_j^0 &= a_j(t) \\ a_j^k &= \Psi_k(a_j^{k-1}) \\ a_j^n &= a_j(t+h) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Z warunku normalizacji wiemy, że $a_j^j = \Psi_j(a_j^{j-1}) = a_j^{j-1}$. Funkcje Ψ_j spełniają założenia lematu o pochodnej złożenia zatem rozwinięcie do członów liniowych w (7.8) ma postać

$$g_{t+h}(z) = g_t(z) + \frac{\pi}{2} h \sum_{i=1}^n d_i \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (g_t - a_i) \right), \quad (7.11)$$

gdyż tak samo jak na pasku przy $h \rightarrow 0$, $a_j^j \rightarrow a_j(t)$. Równania na zmianę a_j możemy znaleźć z tego samego złożenia (7.8), ale pamiętając, że $\Psi_j(a_j^{j-1}) = a_j^{j-1}$

$$a_j(t+h) = a_j + \frac{\pi}{2}h \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}(a_j - a_i) \right) \quad (7.12)$$

Przechodząc w równaniach (7.11) i (7.12) z h do zera otrzymujemy równanie Loewnera dla n igieł na walcu

$$\dot{g}_t(z) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n d_i \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}(g_t - a_i) \right), \quad (7.13)$$

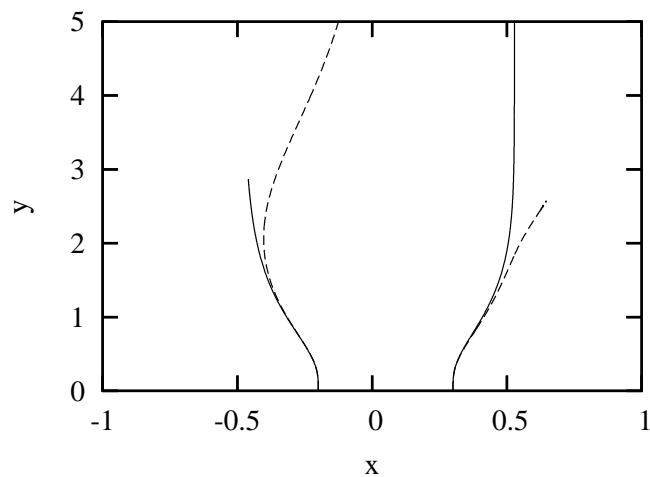
oraz warunek geodezyjności

$$\dot{a}_j(t) = \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2}(a_j - a_i) \right). \quad (7.14)$$

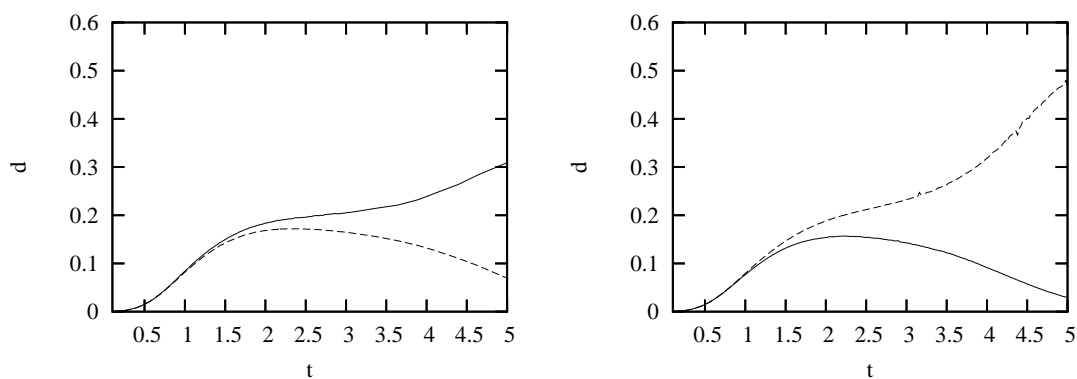
Rozwiązania Jak można zauważyć z symetrii translacyjnej równań (7.13), (7.14) dodanie stałej do a_i w warunkach początkowych nie zmienia dynamiki układu. Dla dwóch igieł stałą zawsze można dobrać tak, by $a_1 = -a_2$ i problem sprowadza się do symetrycznego położenia początkowego dla dwóch igieł na półpasku. Rozważmy ogólniejszy układ n igieł na półpasku z $d = 1$ i tą własnością, że dla każdego bieguna a_i istnieje biegun a_j taki, że $a_i = -a_j$, wówczas

$$\begin{aligned} \dot{g}_t &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^n \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} g_t \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} g_t \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} a_i(t) \right)} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^n \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} g_t \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} (g_t + a_i) \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} (g_t - a_i) \right)} = \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} (g_t - a_i) \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} (g_t + a_i) \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} (g_t - a_i) \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} (g_t - a_i) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (g_t - a_i) \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie dla walca. Analogicznie postępuje się z równaniem na ruch biegunów i również uzyska się wynik jak dla walca. Dla dwóch biegunów, gdy $a_1 - a_2 = 1$ podstawiając do równania (7.14) z $d = 1$ otrzymamy $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0$. Takie położenie względne jest punktem stałym w ewolucji biegunów. Zwróćmy uwagę, że taki układ dąży do położenia, w którym odległość między igłami jest równa jeden i igły rosnąc będą pionowo. Asymptotyczne zachowywać się on będzie jak układ opisany w rozdziale 4, czyli modelu prostych igieł. Zbadajmy zachowanie takiego układu w przypadku laplace'owskim. Kształt igieł na walcu porównany z kształtem dla igieł na pasku i tych samych warunków początkowych przedstawia rysunek 7.1, zaś odpowiednie czynniki wzrostu - rysunek 7.2.



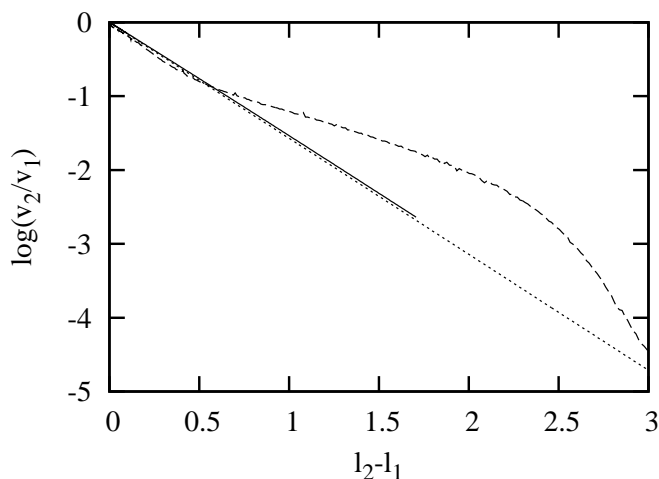
Rysunek 7.1: Kształt dwóch igieł rosnących na walcu (linia ciągła) i na półpasku (linia przerywana) z laplace'owskimi czynnikami wzrostu, startujących z położenia początkowego biegunów $a_1(0) = -0.2$, $a_2(0) = 0.3$.



Rysunek 7.2: Czynniki wzrostu d w funkcji czasu, dla dwóch igieł rosnących na walcu (po lewej) i dwóch igieł rosnących na półpasku (po prawej) z laplace'owskimi czynnikami wzrostu startujących z położenia początkowego biegunów $a_1(0) = -0.2$, $a_2(0) = 0.3$.

Na półpasku wygrywa zawsze igła zaczynająca się bliżej osi symetrii, a ewolucja w tym przypadku jest deterministyczna. Inaczej jest na walcu - z powodu braku ścianek żadna igła nie jest wyróżniona i to która z nich wygra jest czysto losowe - spowodowane niestabilnością i szumem numerycznym

Zwróćmy uwagę na kształt pokonanej igły. Na walcu układ dążył, w fazie równego wzrostu, do stanu stacjonarnego jak przy $d = 1$, czyli równoległych igieł oddalonych od siebie o 1. Gdy jedna z igieł (A) była hamowana, jej oddziaływanie z drugą igłą (B) oraz jej periodycznym odbiciem (B') sprawiało, że igła (A) pozostaje na swym końcu skierowana pionowo do góry. W takim przypadku spodziewamy się dużo lepszej zgodności wyników numerycznych ze wzorem (4.10). Przypomnijmy, wynik ten otrzymany dla prostych igieł w periodycznych warunkach brzegowych ma postać $v_1/v_2 = \exp[\pi/2(l_2 - l_1)]$. Porównanie uzyskanych numerycznie zależności stosunku prędkości v_1/v_2 , w funkcji różnicy długości $l_2 - l_1$ dla igieł na walcu i półpasku z takimi samymi warunkami początkowymi przedstawia rysunek 7.3.



Rysunek 7.3: Logarytm stosunku prędkości w funkcji różnicy długości, dla dwóch igieł rosnących na walcu z Laplace'owskimi czynnikami wzrostu (linia ciągła) i igieł rosnących na półpasku z Laplace'owskimi czynnikami wzrostu (linia przerywana) startujących z położenia początkowego biegunów $a_1(0) = -0.2$, $a_2(0) = 0.3$. Krzywa analityczna dla układu prostych igieł dana przez (4.10) zaznaczona jest linią kropkową.

Powyższe wyniki pokazują, że odejście od zachowania asymptotycznego dla dwóch igieł na półpasku miało swoją przyczynę w istnieniu odbijających ścianek. Efekty brzegowe we wzroście Laplace'a nie mogą być zaniedbane i stosowanie równań nieuwzględniających istnienia brzegu skazana jest na niepowodzenie, jako że rozmiary np. komórki Hele-Shawa nie są zwykle zaniedbywalne w porównaniu z charakterystyczną odległością między dendrytami. Formalizm równania Loewnera dla paska ma zatem szerokie zastosowanie praktyczne.

Rozdział 8

Podsumowanie

W pracy przeanalizowano problem wzrostu igłowych dendrytów w polu harmonicznym (spełniającym równanie Laplace'a). Do rozwiązania problemu użyto aparatu analizy zespolonej. Kluczowe okazało się zastosowanie formalizmu równania Loewnera, za pomocą którego można śledzić ewolucję mapy konforemnej obszaru na zewnątrz rosnących dendrytów na prostszy obszar płaszczyzny zespolonej, na którym rozwiązanie równania Laplace'a łatwo jest znaleźć.

W szczególności po raz pierwszy równanie Loewnera zostało wyprowadzone i rozwiązane w fizycznie bardzo ważnej geometrii komórki Hele-Shawa (odpowiadającej kanałowi, na boczne ścianki którego narzucone są odbijające warunki brzegowe). Pokazano, że wzrost w tej geometrii charakteryzuje się silnymi, nieliniowymi oddziaływaniami między dendrytami, prowadzącymi do zjawiska rywalizacji, w którym dłuższe dendryty hamują wzrost mniejszych znajdujących się w ich sąsiedztwie. To właśnie zjawisko sprawia, że brzeg rosnącego obszaru tworzy skomplikowane, fraktalne formy.

Rachunki analityczne, połączone z obliczeniami numerycznymi pozwoliły na ilościowe scharakteryzowanie rywalizacji między dendrytami. Zbadano wpływ różnych warunków brzegowych (ścianki odbijające, układ periodyczny, nieskończona przestrzeń) na stosunek prędkości dendrytów „zwycięskiego” do „pokonanego” i porównano wyniki ze ścisłym rezultatem, uzyskanym dla periodycznego układu prostych, równoległych igieł.

Otrzymane nowe równanie Loewnera otwiera perspektywę badań poszukujących kolejnych, ścisłych rozwiązań tego równania. Natomiast bliskość opisywanego nim układu do przypadków rzeczywistych daje możliwości porównywania uzyskanych analitycznie i numerycznie wyników z wynikami doświadczeń.

Dodatek A

Numeryczne całkowanie równań Loewnera

Problem klasycznego całkowania Problemy pojawiające się przy całkowaniu równań Loewnera omówimy na przykładzie równania dla półpłaszczyzny i jednej igły. Przypomnijmy, że równanie ma wówczas postać

$$\dot{g}_t(z) = \frac{d(t)}{g_t(z) - a(t)}. \quad (\text{A.1})$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu i dla każdego z możemy znaleźć jego rozwiązanie, przez całkę z warunkiem początkowym $g_0(z) = z$

$$g_t(z) = z + \int_0^t \frac{d(\tau)}{g_\tau(z) - a(\tau)} d\tau. \quad (\text{A.2})$$

Zwróćmy uwagę na postać mianownika funkcji podcałkowej w równaniu (A.2). Gdy $g_\tau(z)$ jest bliskie $a(\tau)$ co odpowiada z bliskiemu $\gamma(\tau)$ ułamek ma osobliwość. Dzieje się tak, gdyż dziedzina g_t czyli $\mathbb{C}_+ \setminus \Gamma(t)$ zmienia się w czasie i w kolejnych chwilach funkcja przestaje być określona w punktach tworzących rosnącą igłę. Ponadto coraz to nowe obszary płaszczyzny są przyciągane w okolice osobliwości. Zastąpmy całkę przez sumę przyjmując krok czasowy Δt

$$g_{N \cdot \Delta t}(z) \approx z + \sum_{i=0}^N \frac{\Delta t \cdot d(i \cdot \Delta t)}{g_{i \cdot \Delta t}(z) - a(i \cdot \Delta t)} \quad (\text{A.3})$$

Przybliżenie całki (A.2) przez sumę (A.3) działa, pod warunkiem, że człony szeregu są odpowiednio małe. Zauważmy jednak, że $\forall \kappa$ i $\forall \Delta t$ istnieje będzie otoczenie czubka igły, w którym

$$\frac{\Delta t \cdot d(i \cdot \Delta t)}{g_{i \cdot \Delta t}(z) - a(i \cdot \Delta t)} > \kappa. \quad (\text{A.4})$$

W związku z tym przybliżanie całki sumą ma sens tylko wówczas gdy rozważamy punkty odległe od wierzchołka igły przy odpowiednio małym kroku czasowym. Nie jest to jednak satysfakcjonująca metoda, gdyż interesuje nas położenie wierzchołka igły w zadanej chwili, czyli znalezienie takiego γ , że $g_t(\gamma)$ jest najbliższe $a(t)$. Aby znaleźć czynnik wzrostu będziemy również potrzebować pierwszych dwóch pochodnych funkcji g_t , przy całkowaniu których występują analogiczne problemy. Sytuacja nie jest wcale lepsza dla innych równań Loewnera tzn. ten sam problem występuje dla półpaska i walca. Jednym ze sposobów rozwiązania problemu jest przedstawiona poniżej metoda.

Składanie odwzorowań Ideę metody można streścić zdaniem: *Zamiast numerycznego całkowania, składanie odwzorowań.* Zauważmy że wszystkie równania Loewnera otrzymaliśmy składając funkcję generującą (φ , ϕ lub Ψ) z g_t by otrzymać g_{t+h} (5.6). Skoro otrzymane równanie jest trudne do numerycznego całkowania wróćmy do wyprowadzenia i zamiast całkować odwzorowanie, g_{t+h} w kolejnej chwili czasu znajdujemy przez złożenie funkcji generującej z g_t . Procedurę da się uogólnić na wiele igieł wprowadzając „dwuwymiarowy” czas T dany równaniem

$$T = t \cdot n + i \quad (\text{A.5})$$

gdzie n to ilość igieł, a i oznacza numer kolejnej igły. Wówczas złożenie

$$g_T = \Phi_T(g_{T-1}) \quad (\text{A.6})$$

wykonane n razy będzie dawać ewolucję układu n igieł w pojedynczym kroku czasowym. Analogicznie stosuje się złożenia w równaniu na ruch biegunów a . Tą metodą jesteśmy w stanie otrzymać $g_t(z)$ dla dowolnego t i z .

Kolejnym problemem jest numeryczne znajdowanie czubka igły, czyli szukania γ_t takiego, że $g_t(\gamma_t) \approx a$. Aby rozwiązać to zagadnienie wprowadźmy funkcję m daną równaniem

$$m(x, y) = |g_t(x + iy) - a(t)|. \quad (\text{A.7})$$

Widać, że w punkcie $x + iy = \gamma_t$ funkcja m ma minimum globalne. Sprowadziliśmy zatem problem znalezienia czubka igły do znalezienia minimum funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych. W napisanym programie, jako metodę minimalizacji używana była tzw. „Downhill simplex method” opisana w pozycji [29]. Z dowolnie obraną dokładnością znajdowano przy jej użyciu położenie czubka igły. Wylizywanie czynnika wzrostu następowało przy użyciu wzoru (6.33)

$$f_t''(a) = - \lim_{z \rightarrow \gamma} \frac{g_t''(z)}{g_t'^3(z)}. \quad (\text{A.8})$$

Osobliwość mianownika w ułamku tego równania jest zbiorem miary zero na płaszczyźnie, czyli numerycznie, przy obliczeniach z podwójną dokładnością, odpowiada to otoczeniu czubka igły o promieniu ok. 10^{-15} . Punkt γ_t znajdowany jest metodą sympleksową z pewną dokładnością δ . Jeśli δ jest dużo większa od granicy szumu czyli 10^{-15} (choć wciąż wystarczająco mała by zapewnić zadowalającą dokładność numeryczną), to problem osobliwości nie będzie występował.

Znajdowanie funkcji g_t' i g_t'' następowało z użyciem rekurencji:

$$g_t'(z) = \Phi_t'(g_{t-1}(z)) \cdot g_{t-1}'(z)$$

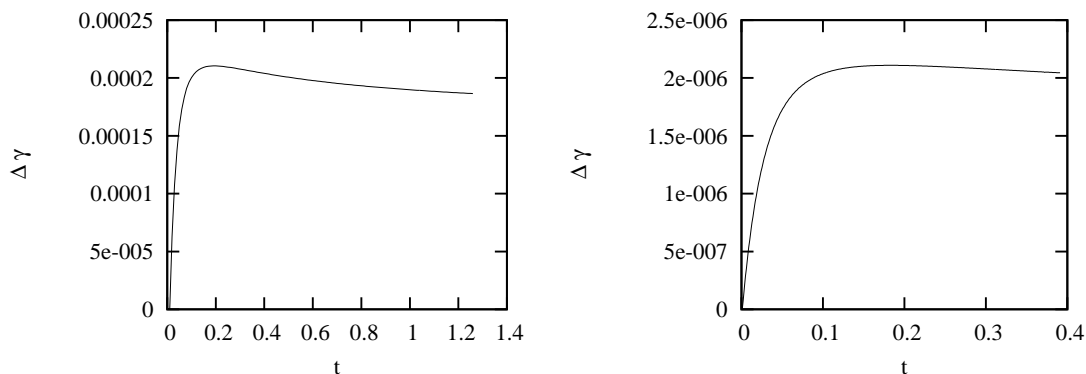
$$g_t''(z) = \Phi_t''(g_{t-1}(z)) \cdot (g_{t-1}'(z))^2 + \Phi_t'(g_{t-1}(z)) \cdot g_{t-1}''(z)$$

z warunkiem początkowym $g_0(z) = z$, $g_0'(z) = 1$ i $g_0''(z) = 0$. Znać trzeba było jedynie Φ_t' oraz Φ_t'' , które łatwo policzyć dla wszystkich badanych przypadków (półpłaszczyzna, półpasek, walec).

Błędy w metodzie W opisanej metodzie numerycznej większość czynników wpływających na błędy jest wspólna dla wszystkich równań. Podstawowe dwa z nich, to:

- Skończony krok czasowy,
- Dokładność „Downhill simplex method”.

W złożeniu (A.6) pomijamy człony rzędu Δt^2 , które znikają w granicy $\Delta t \rightarrow 0$. Dla skończonego kroku czasowego Δt dawać to będzie błąd rzędu Δt^2 dla każdego złożenia. Najlepiej zaobserwować ten błąd można porównując ewolucję dwóch igieł (tutaj akurat na półpłaszczyźnie) przy różnej kolejności składania. Dla $\Delta t \rightarrow 0$ dostajemy równanie Loewnera, ale dla skończonego Δt człony rzędu Δt^2 będą widoczne i będą powodowały różnicę w trajektoriach igieł dla różnej kolejności złożań. Wykreślmy moduł różnicy między położeniami wierzchołków igieł dla różnych kolejności składania w funkcji czasu, dla różnych kroków czasowych. Wyniki przedstawia rysunek A.2 Drugi czynnik wpływający na błąd to dokładność szukania wierz-



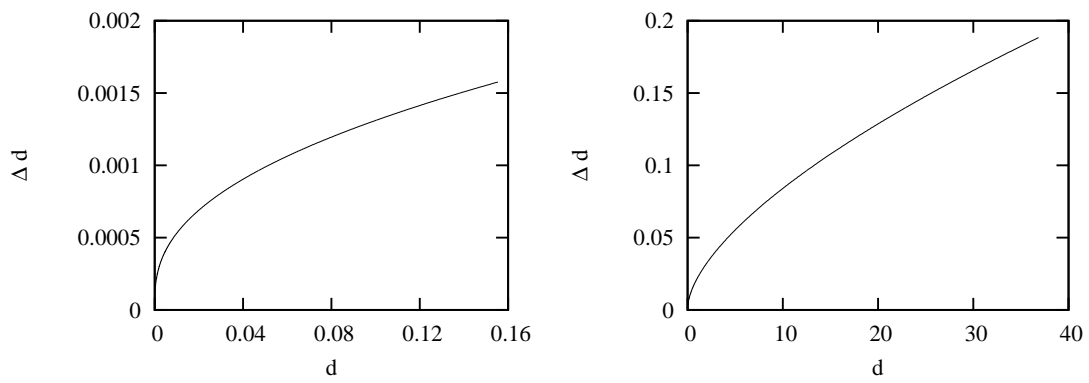
Rysunek A.1: Wartość bezwzględna różnicy między położeniami wierzchołków igieł dla różnych kolejności składania w funkcji czasu, dla dwóch igieł na półpłaszczyźnie, rosnących ze stałymi czynnikami wzrostu. Po lewej -krok czasowy 0.01, po prawej -krok czasowy 0.001

chołka za pomocą metody sympleksowej. Nadmienić należy, że błąd ten jest istotny jedynie w przypadku laplace’owskim, gdy położenie wierzchołka potrzebne jest nam do wyliczenia wzrostu. Błąd w tej operacji będzie wpływał na zachowanie igieł w chwilach późniejszych, w ten sposób błędy propagują się z czasem. W przypadku całkowania równań ze stałymi czynnikami wzrostu, znajdowanie wierzchołka jest potrzebne jedynie do wizualizacji igły i nie wpływa na jej ewolucję.

Dobrym testem dokładności metody sympleksowej i liczenia czynnika wzrostu, jest odzwierciedlanie asymptotycznej wartości d dla jednej igły na pasku. Co ciekawe błąd tej wartości prawie nie zależy od kroku czasowego, za to zmienia się z dokładnością metody sympleksowej osiągając rząd wielkości 10^{-5} dla dokładności 10^{-8} i rząd 10^{-6} dla dokładności 10^{-11} . Dla przypadku półpłaszczyzny i jednej igły możemy zaobserwować narastanie błędu, co można zilustrować analizując zależność między wysokością l a czynnikiem wzrostu d czyli (5.28)

$$d(t) = l(t)^{3/2}. \quad (\text{A.9})$$

Zbadajmy zatem następującą wielkość $l(t)^{3/2} - d(t)$ czyli błąd otrzymanej wartości $d(t)$, w funkcji $d(t)$. Wykresy na rysunku A.2 porównują krok czasowy 0.01 i 0.001. Przy narastaniu błędu $d(t)$ krok czasowy zdaje się mieć duże znaczenie.



Rysunek A.2: $(l(t)^{3/2} - d(t))$ w funkcji $d(t)$, dla jednej igły na półpłaszczyźnie z laplace'owskim czynnikiem wzrostu i krokiem czasowym 0.01 (po lewej) oraz 0.001 (po prawej).

Dodatek B

Kod programu numerycznego

```
#include<iostream>
#include<iomanip>
#include<cstdlib>
#include<cmath>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <complex>
#include <complexf.cpp>
#include<algorithm>
// Definicje dla downhill simplex
#include <nutil.c>
#define TINY 1.0e-5 //A small number.
#define NMAX 5000 //Maximum allowed number of function evaluations.
#define GET_PSUM for (j=1;j<=ndim;j++) {for (sum=0.0,i=1;i<=mpts;i++) sum += p[i][j]; psum[j]=sum;}
#define SWAP(a,b) {swap=(a);(a)=(b);(b)=swap;}
// koniec definicji dla downhill simplex

using namespace std;

double pp=1.5707963267948966192313216916398; //pi/2
double epsilon_log=1.0e-10; //dokladnosc w "downhill simplex"
int timemax=5000; //ilosc krokow czasowych
int iloscigiel; //ilosc igiel
double dt=0.0001; //krok czasowy
double boky=0.03; //bok poczatkowego trojkata w "downhill simplex"
double bokx=0.03; //bok poczatkowego trojkata w "downhill simplex"
double kop=0.000001; // parametr trojkata w downhill simplex
double eta=0; //wykladnik eta
double czas_stalego=1; //jak dlugo poczatkowo ma byc d=1
complex<double> _Imaginary (0,1); // liczba i

//Deklaracje typow tablic wielowymiarowych
double *matrix1D(int a){
    double *tab= new double[a];
    return tab;}

complex<double> *cmatrix1D(int a){
    complex<double> *tab= new complex<double>[a];
    return tab;}

double **matrix2D(int a, int b){
    double **tab = new double*[a];
    for (int i = 0; i < a; i++)
        tab[i] = new double[b];
    return tab;}

complex<double> **cmatrix2D(int a, int b){
    complex<double> **tab = new complex<double>*[a];
    for (int i = 0; i < a; i++)
        tab[i] = new complex<double>[b];
```

```

    return tab;}

double ***matrix3D(int a, int b, int c)
{
    double ***tab = new double**[a];
    for (int i = 0; i < a; i++)
    {
        tab[i] = new double*[b];
        for(int j = 0; j < b; j++)
        {
            tab[i][j] = new double[c];
        }
    }
    return tab;
}

complex<double> ***cmatrix3D(int a, int b, int c)
{
    complex<double> ***tab = new complex<double>**[a];
    for (int i = 0; i < a; i++)
    {
        tab[i] = new complex<double>*[b];
        for(int j = 0; j < b; j++)
        {
            tab[i][j] = new complex<double> [c];
        }
    }
    return tab;
}

//tablice globalne
complex<double> ***a;
complex<double> **d;
complex<double> **gama;
complex<double> *tabliczka;
complex<double> *tabliczka_prim;
complex<double> *tabliczka_bis;
double *dlugosc;
int timefunkcja;

// CYTAT Z NUMERICAL RECIPIES

double *allvec (int n) {
    return (double*) calloc (n,sizeof (double)); }

void frevec (double *vec) {
    free (vec); }

void amoeba(double **p, double y[], int ndim, double ftol, double (*funk)(double []), int *nfunk)

/*Multidimensional minimization of thefunction funk(x) where x[1..ndim] is a vector in ndim
dimensions, by the downhill simplex method of Nelder and Mead. The matrix p[1..ndim+1]
[1..ndim] is input. Its ndim+1 rows are ndim-dimensional vectors which are the vertices of
the starting simplex. Also input is the vector y[1..ndim+1], whose components must be pre
initialized to the values of funk evaluated at the ndim+1 vertices(rows) of p; and ftol the
fractional convergencetolerancetobe achievedinthefunction value(n.b!). On output, p and
y will have been reset to ndim+1 new points all within ftol of a minimum function value, and
nfunk gives the number of function evaluations taken. */

{
    //cout << endl;cout << "a";
    double amotry(double **p, double y[], double psum[], int ndim,
        double (*funk)(double []), int ihi, double fac);
    int i,ih,i,ilo,inhi,j,mpts=ndim+1;
    double rtol,sum,swap,ysave,ytry,*psum;

```

```

psum=vector(1,ndim);
*nfunk=0;
GET_PSUM
for (;) {
    ilo=1;
    //First we must determine which point is the highest (worst), next-highest, and lowest
    //(best), by looping over the points in the simplex.
    ihi = y[1]>y[2] ? (inhi=2,1) : (inhi=1,2);
    for (i=1;i<=mpts;i++) {
        if (y[i] <= y[ilo]) ilo=i;
        if (y[i] > y[ihi]) {
            inhi=ihi;
            ihi=i;
        } else if (y[i] > y[inhi] && i != ihi) inhi=i;
    }
    //rtol=2.0*fabs(y[ihi]-y[ilo])/(fabs(y[ihi])+fabs(y[ilo])+TINY);
    rtol=fabs(p[ihi][1]-p[ilo][1])+fabs(p[ihi][2]-p[ilo][2]);

    //Compute the fractional range from highest to lowest and return if satisfactory.

    if (rtol < ftol) { //If returning, put best point and value in slot 1.
        SWAP(y[1],y[ilo])
        for (i=1;i<=ndim;i++) SWAP(p[1][i],p[ilo][i])
        break;
    }
    if (*nfunk >= NMAX) nrerror("Maximal number of iteration exceeded");
    *nfunk += 2;
    //Begin a new iteration. First extrapolate by a factor -1 through the face of the simplex
    //across from the high point, i.e., reflect the simplex from the high point.
    ytry=amotry(p,y,psum,ndim,funk,ihi,-1.0);
    if (ytry <= y[ilo])
        //Gives a result better than the best point, so try an additional extrapolation by a
        //factor 2.
        ytry=amotry(p,y,psum,ndim,funk,ihi,2.0);
    else if (ytry >= y[inhi]) {
        //The reflected point is worse than the second-highest, so look for an intermediate
        //lower point, i.e., do a one-dimensional contraction.
        ysave=y[ihi];
        ytry=amotry(p,y,psum,ndim,funk,ihi,0.5);
        if (ytry >= ysave) { //Can't seem to get rid of that high point. Better
            for (i=1;i<=mpts;i++) { //contract around the lowest (best) point.
                if (i != ilo) {
                    for (j=1;j<=ndim;j++)
                        p[i][j]=psum[j]=0.5*(p[i][j]+p[ilo][j]);
                    y[i]=(*funk)(psum);
                }
            }
            *nfunk += ndim; //Keep track of function evaluations.
            GET_PSUM //Recompute psum.
        }
    } else --(*nfunk); //Correct the evaluation count.
} //Go back for the test of doneness and the next
free_vector(psum,1,ndim); //iteration.
}

//#include "nrutil.h"

double amotry(double **p, double y[], double psum[], int ndim,
    double (*funk)(double []), int ihi, double fac)

//Extrapolates by a factor fac through the face of the simplex across from the high point, tries
//it, and replaces the high point if the new point is better.

{
    int j;
    double fac1,fac2,ytry,*ptry;

    ptry=vector(1,ndim);
    fac1=(1.0-fac)/ndim;

```

```

    fac2=fac1-fac;
    for (j=1;j<=ndim;j++) ptry[j]=psum[j]*fac1-p[ihi][j]*fac2;
    ytry>(*funkt)(ptry); //Evaluate the function at the trial point.
    if (ytry < y[ihi]) { //If it's better than the highest, then replace the highest.
        y[ihi]=ytry;
        for (j=1;j<=ndim;j++) {
            psum[j] += ptry[j]-p[ihi][j];
            p[ihi][j]=ptry[j];
        }
    }
    free_vector(ptry,1,ndim);
    return ytry;
}

// KONIEC CYTATU Z NUMERICAL RECIPIES

//pojedyncze pchnięcie w chwili time od bieguna numer na półpłaszczyźnie
complex<double> phi(int numer,int time, complex<double> z)
{
    if (abs(z-a[numer][time][numer])<1.0e-10)
    {
        return 0.5*dt*pp*pp*d[numer][time]*sin(pp*a[numer][time][numer]);
    }
    complex<double> sin_ =sin(pp*a[numer][time][numer])*(1.0+pp*pp*dt*d[numer][time]);
    complex<double> cos_ =cos(pp*a[numer][time][numer]);
    complex<double> s=sin(pp*z)-sin_;
    complex<double> f=sqrt(s*s+2*dt*pp*pp*cos_*cos_*d[numer][time]);
    if (s.real()<0) f=-f;
    return f;//+sin_;
}

//pojedyncze pchnięcie w chwili time od bieguna n i jego pochodne
complex<double> fi(int numer,int time, complex<double> z)
{
    complex<double> f1=phi(numer,time,1);
    complex<double> f_1=phi(numer,time,-1);
    complex<double> c=2.0/(f1-f_1);
    complex<double> b=0.5*(f1+f_1);
    complex<double> temp=c*(phi(numer,time,z)-b.real());
    return asin(temp)/pp;
}

complex<double> fi_prim(int numer,int time, complex<double> z)
{
    complex<double> sin_ =sin(pp*a[numer][time][numer])*(1.0+pp*pp*dt*d[numer][time]);
    complex<double> f1=phi(numer,time,1);
    complex<double> f_1=phi(numer,time,-1);
    complex<double> c=2.0/(f1-f_1);
    complex<double> b=0.5*(f1+f_1);
    complex<double> phi_=phi(numer,time,z);
    complex<double> m=sqrt(1.0 - c*c*(phi_ -b)*(phi_ -b));
    complex<double> s=sin(pp*z)-sin_;
    complex<double> temp=c*cos(pp*z)*s/m/phi_;
    return temp;
}

complex<double> fi_bis(int numer,int time, complex<double> z)
{
    complex<double> sin_ =sin(pp*a[numer][time][numer])*(1.0+pp*pp*dt*d[numer][time]);
    complex<double> f1=phi(numer,time,1);
    complex<double> f_1=phi(numer,time,-1);
    complex<double> c=2.0/(f1-f_1);
    complex<double> b=0.5*(f1+f_1);
    complex<double> phi_=phi(numer,time,z);
    complex<double> m=sqrt(1.0 - c*c*(phi_ -b)*(phi_ -b));
    complex<double> s=sin(pp*z)-sin_;

```

```

    complex<double> cos_=cos(pp*z);

    complex<double> temp=c*pp*( cos_*cos_/(m*phi_) - cos_*cos_*s*s/(m*phi_*phi_*phi_) +
    c*c*cos_*cos_*s*s*(phi_-b)/(m*m*m*phi_*phi_) + sin(pp*z)*s/(m*phi_) );
    return temp;
}

//pojedyncze pchnięcie z dwuwymiarowym czasem i jego pochodne
complex<double> fi_(int time_, complex<double> z)
{
    int time=(int)floor((double)(time_)/(double)iloscigiel);
    int numer=time_-time*iloscigiel;
    return fi(numer,time,z);
}

complex<double> fi_prim_(int time_, complex<double> z)
{
    int time=(int)floor((double)(time_)/(double)iloscigiel);
    int numer=time_-time*iloscigiel;
    return fi_prim(numer,time,z);
}

complex<double> fi_bis_(int time_, complex<double> z)
{
    int time=(int)floor((double)(time_)/(double)iloscigiel);
    int numer=time_-time*iloscigiel;
    return fi_bis(numer,time,z);
}

//druga pochodna f z dwuwymiarowym czasem
complex<double> f_bis_(int time_, complex<double> z)
{
    for(int licznik=0;licznik<iloscigiel;licznik++)
    {
        tabliczka[licznik]=z;
        tabliczka_prim[licznik]=1;
        tabliczka_bis[licznik]=0;
    }
    for(int licznik=iloscigiel;licznik<time_+1;licznik++)
    {
        tabliczka[licznik]=fi_(licznik,tabliczka[licznik-1]);
        tabliczka_prim[licznik]=fi_prim_(licznik,tabliczka[licznik-1])*tabliczka_prim[licznik-1];
        tabliczka_bis[licznik]=fi_bis_(licznik,tabliczka[licznik-1])*tabliczka_prim[licznik-1]*
        tabliczka_prim[licznik-1]+fi_prim_(licznik,tabliczka[licznik-1])*tabliczka_bis[licznik-1];
    }
    return abs(tabliczka_bis[time_]/pow(tabliczka_prim[time_],3));
}

//druga pochodna f normalnym czasem
complex<double> f_bis(int time, complex<double> z)
{
    return f_bis_((time+1)*iloscigiel-1,z);
}

//1/f'' w chwili time i na biegunie numer
double dapprox(int time, int numer)
{
    return 1/abs(f_bis(time,gama[numer][time]));
}

// g z druwymiarowym czasem
complex<double> g_(int time_, complex<double> z)
{

```

```

for(int licznik=0;licznik<iloscigiel;licznik++)
    tabliczka[licznik]=z;

for(int licznik=iloscigiel;licznik<time_+1;licznik++)
    tabliczka[licznik]=fi_(licznik,tabliczka[licznik-1]);
return tabliczka[time_];
}

// funkcja g
complex<double> g(int time, complex<double> z)
{
    return g_((time+1)*iloscigiel-1,z);
}

//pomocnicza funkcja do szukania czubka igły (parametr downhill simplex)
double funkcja_log(double x[])
{
    complex<double> z (x[1],x[2]);
    if (x[2]<0) return 100000;
    complex<double> temp=g(timefunkcja,z); /// TU ZMIANA!
    return log(abs(temp.real()-afunkcja)+abs(temp.imag()));
}

//szukanie czubka igły z wykorzystaniem downhill simplex
void szukajgama(int numer,int time)
{
    timefunkcja=time;
    afunkcja=a[numer][time][0].real();
    double p[4][3];
    p[1][1]= gama[numer][time-1].real()+kop;
    p[1][2]= gama[numer][time-1].imag()-boky;
    p[2][1]= gama[numer][time-1].real()-0.8660254037844386467*bokx;
    p[2][2]= gama[numer][time-1].imag()+boky/2;
    p[3][1]= gama[numer][time-1].real()+0.8660254037844386467*bokx;
    p[3][2]= gama[numer][time-1].imag()+boky/2;

    double y[4];
    double x[3];
    x[1]=p[1][1];
    x[2]=p[1][2];
    y[1]=funkcja_log(x);

    x[1]=p[2][1];
    x[2]=p[2][2];
    y[2]=funkcja_log(x);

    x[1]=p[3][1];
    x[2]=p[3][2];
    y[3]=funkcja_log(x);

    double (*wskp[4])={*p,*p[1],*p[2],*p[3]};
    int licznik;
    amoeba(wskp, y, 2, epsilon_log, funkcja_log, &licznik);
    gama[numer][time] = complex<double> ((p[1][1]+p[2][1]+p[3][1])/3,(p[1][2]+p[2][2]+p[3][2])/3);
}

//liczy wartość czynnika wzrostu w chwili t dla igły numer
complex<double> liczd(int numer,int time)
{
    if (eta==0.0) return 1;
    else return pow(dapprox(time,numer),1+eta);
}

//liczy ruch biegunów a w chwili t (dla wszystkich igieł)
void licza(int time)
{
    for(int n=0;n<iloscigiel-1;n++)
        for(int k=0;k<iloscigiel;k++)
            {

```

```

        a[k][time-1][n+1]=fi(n,time-1,a[k][time-1][n]);
    }

    for(int k=0;k<iloscigiel;k++)
    {
        a[k][time][0]=fi(iloscigiel-1,time-1,a[k][time-1][iloscigiel-1]);
    }
}

int main (){

//Deklaracje plików
ifstream filein("in.txt");
ofstream fileout("out.txt");
if(!filein.is_open())
{
    cout << "Blad" <<endl;
    exit(1);
}

double aa,dd;
//wczytuje zmienne z pliku
filein >> eta;
filein >> czas_stalego;
filein >> epsilon_log;
filein >> dt;
filein >> timemax;
filein >> bokx;
bokx=bokx;
filein >> iloscigiel;
//deklaruje zmienne w pamieci
a = cmatrix3D(iloscigiel,timemax,iloscigiel);//położenie obrazu czubka igły a[numer][chwila czasu]
d = cmatrix2D(iloscigiel,timemax); // czynnik wzrostu d[numer][chwila czasu]
gama = cmatrix2D(iloscigiel,timemax); // położenie czubka igły gama[numer][chwila czasu]
//pomocnicze do liczenia f''
tabliczka =cmatrix1D(timemax*iloscigiel);
tabliczka_prim =cmatrix1D(timemax*iloscigiel);
tabliczka_bis =cmatrix1D(timemax*iloscigiel);

dlugosc =matrix1D(iloscigiel); //dlugosc igly

//początkowe dane do zmiennych
for(int n=0;n<iloscigiel;n++)
{
    filein >> aa; ; filein >> dd;
    a[n][0][0]=complex<double> (aa,0);
    d[n][0]=complex<double> (dd,0);
    d[n][1]=complex<double> (dd,0);
    d[n][2]=complex<double> (dd,0);
    d[n][3]=complex<double> (dd,0);
    gama[n][0]=complex<double> (aa,0);
    dlugosc[n]=0;
}
//deklaracje pomocniczych zmiennych
int time_begin=0;
double re, im, t, przyrost;
przyrost=0.0;

//PĘTLA GŁÓWNA PROGRAMU
for(int time=0;time<timemax-1;time++) //zakres zmiany czasu
{
    fileout << endl << time*dt <<" ";
    cout << time*dt <<endl;
    //liczymy czynniki wzrostu
    for(int numer=0;numer<iloscigiel;numer++)
    {
        if (time>czas_stalego) d[numer][time]=liczd(numer,time-1);
        else d[numer][time]=1;
    }
}
}

```

```

    }
    //liczymy położenia biegunów
    liczba(time+1);

    //szukamy wierzchołków igieł w następcj chwili czasu
    for(int numer=0;numer<iloscigiel;numer++)
    {
        szukajgama(numer,time);
        //zapis do pliku
        if (time>0) przyrost=abs(gama[numer][time]-gama[numer][time-1]);
        dlugosc[numer]+=przyrost;
        fileout <<setprecision(16)<<gama[numer][time].real() << " " << gama[numer][time].imag() <<
        " "<< a[numer][time][0].real()<<" "<< d[numer][time].real() << " "<< dlugosc[numer]<< " "<<
        f przyrost/dt<< " ";
    }
}
return 0;
}

```


Bibliografia

- [1] R.González-Cinca, Y. Couder, J. Maurer and A. Hernández-Machado, *Fluctuation and Noise Letters* **4**, L535 (2004)
- [2] P. Szymczak, A. J. C. Ladd, *Geophys. Res. Lett.* **33**, L05401 (2006)
- [3] L. M. Sander, *Contemporary Physics* **41**, 203 (2000)
- [4] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989)
- [5] P. Meakin, *Fractals, Scaling and Growth Far From Equilibrium* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998)
- [6] L. Landau i E. Lifszic, *Mechanika Ósrodków Ciągłych* (PWN, Warszawa, 1958)
- [7] D. A. Kessler, J. Koplik and H. Levine, *Advances in Physics* **37**, 255 (1988)
- [8] T. A. Witten and L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400 (1981)
- [9] J. Kertesz and T. Vicsek, *J. Phys.* **A19**, L257 (1986)
- [10] G. Rossi, *Phys. Rev. A* **34**, 3543 (1986)
- [11] P. Meakin, *Phys. Rev. A* **33**, 1984 (1986)
- [12] R. M. Bradley and D. Kung, *Phys. Rev. A* **34**, 723 (1989)
- [13] J. M. Debierre and L. Turban, *J. Phys. A: Math. Gen* **19**, L131 (1986)
- [14] P. Meakin, *Phys. Rev. A* **37**, 1984 (1988)
- [15] M. E. Cates , *Phys. Rev. A* **34**, 5007 (1989)
- [16] J. Szep and E. Lugosi, *J. Phys. A: Math. Gen* **19**, L1109 (1986)
- [17] K. Kessler and F. Family, *Phys. Rev. E* **39**, 4797 (1989)
- [18] C. Evertsz, *Phys. Rev. A* **41**, 1830 (1990)
- [19] B. Derrida and V. Hamim, *Phys. Rev. A* **45**, 8759 (1992)
- [20] J. Krug, K. Kessner, P. Meakin and F. Family, *Europhys. Lett.* **24**, 527 (1993)
- [21] Y. Huang, G. Ouillon, H. Sauler and D. Sornette, *Phys. Rev. E* **55**, 6433 (1997)
- [22] F. Leja, *Teoria Funkcji Analitycznych* (PWN, Warszawa 1957)
- [23] K. Löwner, *Math. Ann.* **89**, 103 (1923)

- [24] G. Selander, *Two deterministic growth models related to Diffusion-Limited Aggregation*, Doctoral Thesis, 1999 Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden
- [25] W. Kager, B. Nienhuis and L. P. Kadanoff, *J. Stat. Phys.* **115**, 805 (2004)
- [26] M. Bauer and D. Bernard, *Phys. Lett. B* **543**, 135 (2002)
- [27] L. Carleson and N. Makarov, *J. Anal. Math.* **87**, 103 (2002)
- [28] O. Zik and E. Moses, *Phys. Rev. E* **60**, 518 (1999)
- [29] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)