Niegaussowskie procesy stochastyczne

Ćwiczenia 1. i 2.

Zadanie 1. Zmienna losowa X opisana jest przez rozkład prawdopodobieństwa Pareto $p(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Y = 1/X$. Sprawdzić unormowanie rozkładu zmiennej Y.

Zadanie 2. Rozkład prawdopodobieństwa głębokości ϵ studni potencjału dla pewnego materiału dany jest przez rozkład wykładniczy $p(\epsilon) = \lambda e^{-\lambda\epsilon}$. Czas τ przebywania cząstki w studni zależy od jej głębokości i dany jest przez $\tau(\epsilon) = \tau_0 e^{\epsilon/kT}$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa czasu τ przebywania w studni potencjału.

Zadanie 3. Rozwiązać poprzednie zadanie przy założeniu, że głębokość studni potencjału opisana jest rozkładem normalnym $N(0, \sigma^2)$.

Zadanie 4. Udowodnić, że rozkład dwumianowy $B(n, p)$ w granicy $n \to \infty$, $p \to 0$, przy stałym iloczynie $np = \lambda$ dąży do rozkładu Poissona. (Twierdzenie Poisson'a)

Zadanie 5. Wykazać, że rozkład Poissona dla $\lambda \gg 1$ oraz $k \approx \lambda$ (czyli $k = \lambda\,(1+\delta), \delta \ll 1$) można opisać rozkładem normalnym $N(\lambda, \lambda)$.

Zadanie 6. Udowodnić, że rozkład dwumianowy $B(n, p)$ dla $n \gg 1$ oraz dla $k \approx np$ można opisać rozkładem normalnym $N(np, np(1-p))$. (Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a).

Zadanie 7. Zmienna losowa X opisana jest przez rozkład normalny standardowy $N(0, 1)$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Y = e^X$.

Wskazówka: przybliżenie Stirlinga $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Niegaussowskie procesy stochastyczne

Ćwiczenia 1. i 2.

Zadanie 1. Zmienna losowa X opisana jest przez rozkład prawdopodobieństwa Pareto $p(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Y = 1/X$. Sprawdzić unormowanie rozkładu zmiennej Y.

Zadanie 2. Rozkład prawdopodobieństwa głębokości ϵ studni potencjału dla pewnego materiału dany jest przez rozkład wykładniczy $p(\epsilon) = \lambda e^{-\lambda\epsilon}$. Czas τ przebywania cząstki w studni zależy od jej głębokości i dany jest przez $\tau(\epsilon) = \tau_0 e^{\epsilon/kT}$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa czasu τ przebywania w studni potencjału.

Zadanie 3. Rozwiązać poprzednie zadanie przy założeniu, że głębokość studni potencjału opisana jest rozkładem normalnym $N(0, \sigma^2)$.

Zadanie 4. Udowodnić, że rozkład dwumianowy $B(n, p)$ w granicy $n \to \infty$, $p \to 0$, przy stałym iloczynie $np = \lambda$ dąży do rozkładu Poissona. (Twierdzenie Poisson'a)

Zadanie 5. Wykazać, że rozkład Poissona dla $\lambda \gg 1$ oraz $k \approx \lambda$ (czyli $k = \lambda\,(1+\delta), \delta \ll 1$) można opisać rozkładem normalnym $N(\lambda, \lambda)$.

Zadanie 6. Udowodnić, że rozkład dwumianowy $B(n, p)$ dla $n \gg 1$ oraz dla $k \approx np$ można opisać rozkładem normalnym $N(np, np(1-p))$. (Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a).

Zadanie 7. Zmienna losowa X opisana jest przez rozkład normalny standardowy $N(0, 1)$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Y = e^X$.

Wskazówka: przybliżenie Stirlinga $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.