

Niegaussowskie procesy stochastyczne

Ćwiczenia 3. i 4. i 5.

Zadanie 1. Wyznacz wzór na k -ty moment rozkładu t-Studenta. Rozkład ten ma gęstość $p(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} (1 + \frac{x^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}$. Wyznaczyc wariancję tego rozkładu przy $\nu = 4$.

Zadanie 2. Udowodnij, że rozkład t-Studenta dla $\nu = 1$ jest równoważny rozkładowi Cauchy'ego, zaś w granicy $\nu \rightarrow \infty$ przechodzi w standardowy rozkład normalny. Rozkład Cauchy'ego ma gęstość $f(x) = \frac{1}{\gamma\pi[1+(\frac{x-x_0}{\gamma})^2]}$.

Zadanie 3. Oblicz k -ty moment rozkładu log-normalnego. Przypomnijmy, że rozkład ten ma gęstość $p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2})$.

Zadanie 4. Oblicz k -ty moment rozkładu Pareto. Przypomnijmy, że rozkład ten ma gęstość $f(x) = \frac{\alpha x^\alpha}{x^{\alpha+1}}$. Ile wynoszą i kiedy istnieją wartość oczekiwana i wariancja tego rozkładu?

Zadanie 5. Funkcję charakterystyczną rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X definiujemy jako $G(k) = \langle e^{ikx} \rangle$.

- (i) Oblicz funkcję charakterystyczną rozkładu Gaussa.
- (ii) Udowodnij, że $m_n = \frac{G^{(n)}(0)}{i^n}$, gdzie m_n to moment zwykły rzędu n .
- (iii) Korzystając z funkcji charakterystycznej oblicz trzy pierwsze momenty rozkładu normalnego. Porównaj wynik z wartością oczekiwaną μ i wariancją σ^2 tego rozkładu.

Zadanie 6. Oblicz funkcję charakterystyczną rozkładów wykładniczego oraz Cauchy'ego.

Zadanie 7. Moment centralny μ_n rzędu n zmiennej losowej X definiuje się jako $\mu_n = \langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle$.

- (i) Wyraż cztery pierwsze momenty centralne μ_n za pomocą momentów zwykłych m_n .
- (ii) Oblicz dwa pierwsze momenty centralne zmiennej losowej z rozkładu Gaussa.
- (iii) Oblicz współczynnik skośności $\gamma_1 = \mu_3/(\mu_2)^{3/2}$ oraz kurtozę $\text{Kurt} = \mu_4/\mu_2^2$ rozkładu Gaussa.

Zadanie 8. Kumulantę κ_n rzędu n rozkładu prawdopodobieństwa definiuje się przez $\ln G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n k^n}{n!} \kappa_n$, gdzie $G(k)$ jest funkcją charakterystyczną.

- (i) Rozwijając funkcję $\ln G(k)$ w szereg Taylora i porównując z powyższym wzorem, wyznacz cztery pierwsze kumulanty κ_n za pomocą momentów zwykłych m_n i porównaj z momentami centralnymi μ_n .
- (ii) Znajdź związek pomiędzy kurtozą $\text{Kurt} = \mu_4/\mu_2^2$ a nadmiarową kurtozą $\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2$. Ile wynosi nadmiarowa kurtaza dla rozkładu Gaussa?

Wskazówki: Przybliżenie Stirlinga $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$,

Funkcja Gamma $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{4^n n!}$,

Funkcja Beta $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,

Całka Gaussowska $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a(x+b)^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$