Niegaussowskie procesy stochastyczne

Ćwiczenia 7. i 8.

Zadanie 1. Rozważyć rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:
$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})(1 + a\sin(\frac{2\pi \ln x}{\sigma^2}))$ dla $x \in (0, +\infty)$ i $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Wykazać, że wszystkie jego momenty są równe momentom rozkładu log-normalnego o $\mu = 0$. Sprawdzić unormowanie i nieujemność gęstości rozkładu.

Zadanie 2. Dany rozkład prawdopodobieństwa jest stabilny, gdy dowolna kombinacja liniowa zmiennych o tym rozkładzie jest również opisana przez ten rozkład. Sprawdzić warunek konieczny stabilności rozkładu Gaussa - znaleźć rozkład sumy n zmiennych o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Sprawdzić warunek dostateczny stabilności rozkładu Gaussa - znaleźć rozkład kombinacji liniowej $Z = aX + bY$ zmiennych o rozkładach $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Zadanie 3. Sprawdzić stabilność rozkładu Cauchy'ego - znaleźć rozkład kombinacji liniowej $Z = aX + bY$ zmiennych o rozkładach Cauchy'ego z parametrami γ_1, x_1 i γ_2, x_2. Funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego to $\phi(k) = \exp(ikx_0 - \gamma|k|)$.

Zadanie 4. Sprawdzić warunek konieczny stabilności rozkładu wykładniczego - znaleźć rozkład sumy n zmiennych o takim samym parametrze λ.

Zadanie 5. Sprawdzić stabilność rozkładu Lévy'ego - znaleźć rozkład kombinacji liniowej $Z = aX + bY$ zmiennych o różnych parametrach c i μ. Gęstość rozkładu Lévy'ego to: $p(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}}(x-\mu)^{-3/2}\exp(-\frac{c}{2(x-\mu)})$, a jego funkcja charakterystyczna to:
$\phi(t) = \exp[it\mu - \sqrt{c|t|}(1 + i\,\mathrm{sgn}(t))]$.

Zadanie 6. Zmienne X i Y opisane są rozkładem Poissona z parametrem λ. Sprawdzić stabilność dla sumy zmiennych $X + Y$. Sprawdzić stabilność dla kombinacji liniowej zmiennych $aX + bY$.

Niegaussowskie procesy stochastyczne

Ćwiczenia 7. i 8.

Zadanie 1. Rozważyć rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:
$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2})(1 + a\sin(\frac{2\pi \ln x}{\sigma^2}))$ dla $x \in (0, +\infty)$ i $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Wykazać, że wszystkie jego momenty są równe momentom rozkładu log-normalnego o $\mu = 0$. Sprawdzić unormowanie i nieujemność gęstości rozkładu.

Zadanie 2. Dany rozkład prawdopodobieństwa jest stabilny, gdy dowolna kombinacja liniowa zmiennych o tym rozkładzie jest również opisana przez ten rozkład. Sprawdzić warunek konieczny stabilności rozkładu Gaussa - znaleźć rozkład sumy n zmiennych o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Sprawdzić warunek dostateczny stabilności rozkładu Gaussa - znaleźć rozkład kombinacji liniowej $Z = aX + bY$ zmiennych o rozkładach $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Zadanie 3. Sprawdzić stabilność rozkładu Cauchy'ego - znaleźć rozkład kombinacji liniowej $Z = aX + bY$ zmiennych o rozkładach Cauchy'ego z parametrami γ_1, x_1 i γ_2, x_2. Funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego to $\phi(k) = \exp(ikx_0 - \gamma|k|)$.

Zadanie 4. Sprawdzić warunek konieczny stabilności rozkładu wykładniczego - znaleźć rozkład sumy n zmiennych o takim samym parametrze λ.

Zadanie 5. Sprawdzić stabilność rozkładu Lévy'ego - znaleźć rozkład kombinacji liniowej $Z = aX + bY$ zmiennych o różnych parametrach c i μ. Gęstość rozkładu Lévy'ego to: $p(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}}(x-\mu)^{-3/2}\exp(-\frac{c}{2(x-\mu)})$, a jego funkcja charakterystyczna to:
$\phi(t) = \exp[it\mu - \sqrt{c|t|}(1 + i\,\mathrm{sgn}(t))]$.

Zadanie 6. Zmienne X i Y opisane są rozkładem Poissona z parametrem λ. Sprawdzić stabilność dla sumy zmiennych $X + Y$. Sprawdzić stabilność dla kombinacji liniowej zmiennych $aX + bY$.