

Niegaussowskie procesy stochastyczne

Ćwiczenia 11. i 12.

Zadanie 1. Obliczyć całkę stochastyczną $\int_0^t W_\tau dW_\tau$, gdzie proces Wienera W_t jest procesem stochastycznym o następujących własnościach:

- $W_0 = 0$,
- W_t ma niezależne przyrosty,
- $W_s - W_t \sim N(0, t - s)$ dla $0 \leq s < t$,
- W_t ma ciągłe trajektorie.

Z powyższego wynika, że $W_t \sim N(0, t)$ oraz W_t jest w każdym punkcie nieróżniczkowalna.

Zadanie 2. Korzystając z lematu Itô znaleźć równanie spełniane przez cenę kontraktu Farward $F_t = S_t e^{r(T-t)}$, jeżeli cena aktywa S_t spełnia równanie $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$.

Zadanie 3. Rozwiązać stochastyczne równanie różniczkowe na cenę aktywa z modelu Blacka-Scholesa: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Należy skorzystać z lematu Itô.

Zadanie 4. Równanie Fokkera-Plancka można zapisać w postaci równania ciągłości dla prawdopodobieństwa: $\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}$, gdzie $J(x, t)$ oznacza strumień gęstości prawdopodobieństwa. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania Fokkera-Plancka dla stanu równowagi dynamicznej, czyli dla $J(x, t) = 0$.

Zadanie 5. Korzystając z równania Fokkera-Plancka znaleźć rozkład prawdopodobieństwa stóp procentowych w stanie stacjonarnym w modelu Hulla-White'a, w którym dynamika zmian stóp procentowych dana jest przez: $dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dW_t$.

Zadanie 6. Ruchy Browna można opisać jako proces Wienera, czyli: $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$, gdzie X_t to położenie cząstki brownowskiej. Korzystając z definicji procesu Wienera podać rozkład położenia cząstki brownowskiej. Zapisać równanie Fokkera-Plancka dla cząstki brownowskiej i wyznaczyć rozkład jej położenia na jego podstawie (w stanie stacjonarnym).

Lemat Itô

Dla każdego procesu stochastycznego X_t , spełniającego równanie: $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$, gdzie a_t i b_t to odpowiednie procesy, proces $G(t, X_t) \equiv G_t$ spełnia równanie:

$$\bullet dG(t, X_t) = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a_t \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + b_t \frac{\partial G}{\partial x} dW_t.$$

Równanie Fokkera-Plancka

Dla procesu stochastycznego X_t , spełniającego równanie: $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, prawdopodobieństwo $P(x, t)$, że proces X_t przyjmie wartość x w chwili t opisane jest równaniem Fokkera-Plancka:

$$\bullet \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x)P(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x)P(x, t)],$$

gdzie współczynnik dryfu $A(x) = \mu(x)$ oraz współczynnik dyfuzji $B(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)$. W stanie stacjonarnym rozwiązanie tego równania jest następujące:

$$\bullet P(x) = \frac{\text{const.}}{B(x)} \exp \left[2 \int_0^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right],$$