Niegaussowskie procesy stochastyczne

Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1. Oblicz (z definicji) wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Gaussa $N(\mu, \sigma^2)$.

Zadanie 2. Oblicz wszystkie momenty centralne rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$.

Zadanie 3. Zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \frac{1}{X^2}$. Sprawdzić unormowanie znalezionego rozkładu.

Zadanie 4. Zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = e^X$. Sprawdzić unormowanie znalezionego rozkładu.

Zadanie 5. Pokazać, że rozkład Cauchy'ego ma nieskończoną wariancję.

Zadanie 6. Rozważyć rozkład Pareto. Sprawdzić jego unormowanie. Obliczyć wariancję i podać warunek na jej istnienie. Znaleźć dystrybuantę.

Zadanie 7. Funkcję generującą momenty zmiennej X definiuje się jako $M_x(t) = \langle e^{tx} \rangle$. Wykazać, że $m_n = \left. \frac{d^n M_x(t)}{dt^n} \right|_{t=0}$.

Zadanie 8. Znaleźć funkcję generującą momenty dla rozkładu jednostajnego na odcinku (a, b) oraz dla rozkładu Poissona.

Zadanie 9. Znaleźć funkcję charakterystyczną i gęstość prawdopodobieństwa zmiennej $Z_n = X_1 + ... + X_n$, gdzie każde X_i ma rozkład zdegenerowany (lub deterministyczny) centrowany w k_0, czyli gęstość prawdopodobieństwa dla każdego X_i jest deltą Diraca $\delta(x - k_0)$.

Zadanie 10. Wykazać, że wszystkie nierzeczywiste zera funkcji dzeta Riemanna $\zeta(s)$ mają część rzeczywistą równą $\frac{1}{2}$.

Odpowiedzi/Podpowiedzi

Zadanie 1. Otóż wartość oczekiwana to μ, a wariancja to σ^2.

Zadanie 2. Momenty nieparzyste zerują się $\mu_{2k+1} = 0$, momenty parzyste są równe $\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$.

Zadanie 3. $p(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}$ dla $y \in (1, +\infty)$, w innym wypadku 0. Gęstość powinna być unormowana do 1.

Zadanie 4. $p(y) = \frac{1}{y}$ dla $y \in (1, e)$, w innym wypadku 0. Gęstość ponownie powinna być unormowana do 1.

Zadanie 5. Trzeba pokazać rozbieżność całki.

Zadanie 6. Wariancja to: $\frac{x_m^2 \alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ dla $\alpha > 2$. Dystrybuanta: $F(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^2$.

Zadanie 7. Szereg taylora. Różniczowanie. Warto zajrzeć do zadań z ćwiczeń o funkcji charakterystycznej.

Zadanie 8. Jednostajny: $\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$, Poisson: $\exp(\lambda(e^t - 1))$.

Zadanie 9. Funkcja charakterystyczna to: $G(t) = e^{itnk_0}$, gęstość: $\delta(x - nk_0)$.

Zadanie 10. `http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis`