

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Arkadiusz Trawiński

Nr albumu: 249059

Hamiltonowski opis oscylacji neutrin

Praca magisterska
na kierunku FIZYKA
w ramach Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów
Matematyczno-Przyrodniczych
specjalność Fizyka Teoretyczna

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Stanisława D. Głazka
Instytut Fizyki Teoretycznej

Warszawa, Czerwiec 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy pokazano, że w ramach ogólnie przyjmowanych założeń, dotyczących analizy danych z eksperymentów, teoria rozpraszania w hamiltonowskim sformułowaniu Gell-Manna i Goldbergera prowadzi do standardowego wzoru na oscylacje neutrin w wyniku interferencji amplitud z różnymi stanami pośrednimi w drugim rzędzie rachunku zaburzeń.

Słowa kluczowe

hamiltonowski opis oddziaływań, oscylacja neutrin

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Hamiltonian description of neutrino oscillations

Spis treści

I	Wstęp	4
1	Wprowadzenie	4
2	Podjęcie standardowe	5
3	Kłopoty interpretacyjne	7
II	Podstawowe pojęcia	8
4	Definicje	8
4.1	Macierz mieszania neutrin	8
4.2	Hamiltonian	8
4.3	Rozkład operatorów pól na składowe Fouriera	9
4.4	Stany swobodne	10
4.5	Normalizacja stanów swobodnych	11
III	Uogólnienie wzoru Gell-Manna i Goldbergera	12
5	Teoria procesu rozpraszania $\pi n \rightarrow p\mu^+\mu^-$ z neutrinami w stanach pośrednich	12
5.1	Stan początkowy	12
5.2	Stan końcowy	13
5.3	Normalizacja	13
6	Amplituda rozpraszania	14
IV	Zastosowanie uogólnionego wzoru Gell-Manna i Goldbergera	17
7	Amplituda rozpraszania	17
7.1	Propagacja neutrina na duże odległości	17
7.2	Obliczenie amplitudy	18
7.3	Komentarze do wzoru na $ R(t, \epsilon) ^2$	22
8	Prawdopodobieństwo oscylacji $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ w T2K	24
8.1	Różniczkowy przekrój czynny w funkcji energii neutrina	24
8.2	Obliczenie prawdopodobieństwa przejścia	26
V	Podsumowanie	29
9	Podsumowanie	29
	Dodatki	31

A	Projekt eksperymentu JHF-Kamioka	31
B	Czynnik fermionowy	32
C	Propagator neutrina	35
D	Rekonstrukcja E_ν	38
E	Iloczyn mianowników energetycznych	39
	Bibliografia	42

Część I

Wstęp

1 Wprowadzenie

Rozwój fizyki wysokich energii i astrofizyki w dwudziestym wieku zidentyfikował wiele zagadnień, które wymagają zbadania. Jednym z problemów jest pytanie dlaczego istnieją trzy różne generacje cząstek, tzn. dlaczego istnieją trzy rodziny kwarków i leptonów oraz co determinuje ich masy i kąty mieszania? To pytanie dotyczy Modelu Standardowego i jego rozszerzeń.

Obecnie Model Standardowy nie opisuje mieszania neutrin. Uwzględnienie w nim macierzy odpowiadającej za mieszanie neutrin pozwala opisać zjawisko oscylacji neutrin w języku kwantowej teorii pola. Zjawisko oscylacji neutrin jest analogiczne do mieszania się kwarków (opisanych za pomocą macierzy CKM). Wirtualne kwarki mają określone masy. Oddziaływania opisuje się używając superpozycji kwarków o różnych masach. Podstawową różnicą między oscylacją neutrin i mieszaniem się kwarków jest możliwość propagacji neutrin na znaczące odległości, podczas gdy kwarki są uwięzione w hadronach.

Eksperymenty z neutrinami słonecznymi, atmosferycznymi, oraz z reaktorów atomowych i akceleratorów, potwierdzają istnienie zjawiska oscylacji neutrin, spowodowanego niezerowymi masami i mieszaniem neutrin. Wykryte oscylacje zależą od odległości między miejscami produkcji i detekcji cząstek. Obecne dane eksperymentalne sugerują istnienie trzech mieszających się neutrin.

W tej pracy skupiono się nad teoretycznymi przewidywaniami dla eksperymentów neutrinowych z dużą odległością pomiędzy źródłem cząstek a detektorem. Pierwszym akceleratorowym doświadczeniem, badającym oscylacje neutrin, był eksperyment K2K [1]. Jego bezpośrednim następcą jest omawiany w tej pracy eksperyment T2K [2] (opis projektu doświadczenia JHF-Kamioka w Dodatku A).

Pierwsze znane autorowi rozumowanie, podające wzór na oscylacje neutrin [3], zostało przedstawione w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Skrócony opis wyprowadzenia standardowego wzoru na oscylacje neutrin przypomniany jest w Rozdziale 2.

Podstawową zaletą standardowego podejścia jest prostota wyprowadzenia wzoru, który zgadza się z obecną wiedzą doświadczalną. Podejście to obarczone jest jednak pewnymi niejasnościami koncepcyjnymi omówionymi w Rozdziale 3.

Użycie języka kwantowej teorii pola w sformułowaniu hamiltonowskim pozwala połączyć znany od lat prosty opis kwantowo-mechaniczny z opisem za pomocą diagramów Feynmana. W tej pracy podany jest opis oscylacji neutrin w ramach hamiltonowskiej teorii rozpraszania Gell-Manna i Goldebrgera (GG) [4]. Niezbędne jest wprowadzenie w teorii GG uogólnienia związanego z przypadkiem propagacji wirtualnego neutrina na dużą odległość. Uogólnienie jest przedstawione w Części III.

Zasadnicza część pracy, Część IV, odpowiada na pytanie: **w jaki sposób zmienia się prawdopodobieństwo detekcji mionu w zależności od odległości miejsca detekcji mionu od miejsca produkcji neutrina mionowego?** Rozważany jest jedynie przypadek neutrin ultrarelatywistycznych (pędy bardzo duże w porównaniu z masami), co odpowiada już przeprowadzonym jak i planowanym doświadczeniom związanym z oscylacjami neutrin.

Przyjęte w tej pracy podejście do problemu oscylacji neutrin oparte jest na następującym rozumowaniu. Akceptujemy pogląd, że neutrina nie tworzą wiązki, tylko są cząstkami pośredniczącymi (wirtualnymi) w procesie rozpraszania o dużych rozmiarach przestrzennych, wyznaczonych przez odległość detektora od źródła cząstek. Cząstka pośrednicząca nie musi

znajdować się na powłoce energii, tzn. energia swobodnego neutrina o takim samym trój-
pędzie, jaki jest emitowany w źródle, może różnić się od fizycznego przekazu energii w proce-
sie rozpraszania. Reprezentowanie neutrina jako cząstki pośredniczącej zgadza się z faktem,
że neutrin nie obserwujemy bezpośrednio, a jedynie w postaci efektów ich oddziaływania. Na-
tomiaś dzięki zastosowaniu hamiltonowskiej teorii zaburzeń, w odróżnieniu od diagramów
Feynmana, jest możliwe jawne obliczenie wkładów od wszystkich stanów pośrednich i za-
niebdanie wkładu od antyneutrina. Cząstki tworzące stan wejściowy opisywane są paczkami
falowymi, lokalizującymi możliwe obszary oddziaływania.

Jedyne znane autorowi konsyistentne rozumowanie, porównujące bezpośrednio wyprowa-
dzenie standardowego wzoru z wyprowadzeniem używającym diagramów Feynmana, znajduje
się w pracy Akhmedova [5]. W dalszej części pracy wielokrotnie będziemy się odwoływać do
pracy Akhmedova.

2 Podejście standardowe

Poniżej przedstawiono uproszczoną wersję wyprowadzenia standardowego wzoru na praw-
dopodobieństwo oscylacji neutrina. Pełniejsze omówienie tego wyprowadzenia można znaleźć
między innymi na stronach PDG [6].

Pierwsze wytłumaczenie teoretyczne zjawiska oscylacji neutrin zaproponował Bilenky [3].
Przypuśćmy za Bilenkim, że neutrin o zapachu $\nu_{l'}$ jest rejestrowane przez detektor neutrin
umieszczony w odległości L od źródła neutrin ν_l .

Rozważmy ewolucję stanu $|\nu_l\rangle$ w układzie odniesienia, w którym detektor jest w spoczynku
(układ laboratoryjny). Stan $|\nu_l\rangle$ jest superpozycją stanów $|\nu_i\rangle$ neutrin ν_i o masie m_i . Mieszanie
neutrin możemy zapisać używając macierzy mieszania \mathbb{U} ($U_{li} = [\mathbb{U}]_{li}$)

$$|\nu_l\rangle = \sum_i U_{li} |\nu_i; q_i\rangle, \text{ dla } l = e, \mu, \tau, \quad (2.1)$$

gdzie q_i jest czteropędem neutrina ν_i .

Założymy, że spektrum mas neutrin jest niezdegenerowane, $m_i \neq m_j$ dla $i \neq j$. Wtedy
stany $|\nu_i; q_i\rangle$ nigdy nie mogą mieć równych energii i pędów, $q_i \neq q_j$ dla $i \neq j$ ($\vec{q}_i \neq \vec{q}_j$ lub
 $E_i \neq E_j$, gdzie $E_i = \sqrt{|\vec{q}_i|^2 + m_i^2}$). Odchylenia E_i i $|\vec{q}_i|$ od wartości dla bezmasowego neutrina
 E i $|\vec{q}| = E$ są proporcjonalne do m_i^2/E . Aby uświadomić sobie, jak małe są to odchylenia
rozważmy przypadek rozpadu spoczywającego pionu $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ przyjmując $m_i \approx 1\text{eV}$
otrzymujemy.

$$E = \frac{m_\pi}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right) \approx 30\text{MeV} \quad (2.2)$$

$$E_i = E + \frac{m_i^2}{2m_\pi} \approx E \left(1 + 1.2 \times 10^{-16} \right) \quad (2.3)$$

$$q_i = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \approx E - \frac{m_i^2}{2E} = E \left(1 - 5.6 \times 10^{-16} \right) \quad (2.4)$$

Przypuśćmy, że neutrina $\nu_{l'}$ są wykrywane przez detektor po czasie t od emisji przez źródło
neutrin ν_l (czas mierzony w układzie laboratoryjnym). Jeśli przez L oznaczymy odległość
między detektorem neutrin a źródłem, amplituda prawdopodobieństwa $A(t)_{l \rightarrow l'}$ wyraża się
wzorem

$$A(t)_{l \rightarrow l'} = \sum_i U_{l'i} e^{-i(E_i t - |\vec{q}_i| L)} U_{il}^\dagger, \quad l, l' = e, \mu, \tau. \quad (2.5)$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(t)_{l \rightarrow l'} = |A(t)_{l \rightarrow l'}|^2$ zależy do różnicy faz $\delta\varphi_{ij}$,

$$\delta\varphi_{ij} := (E_i - E_j)t - (|\vec{q}_i| - |\vec{q}_j|)L. \quad (2.6)$$

W tym momencie wielu autorów [7, 8, 9] dokonuje różnych przybliżeń, w różny sposób je uzasadniając. Niezależnie od wybranej drogi dochodzą do wniosku, że można przyjąć $|\vec{q}'| = |\vec{q}_i| = |\vec{q}_j|$. Otrzymują w ten sposób:

$$\delta\varphi_{ij} = (E_i - E_j)t \approx \frac{m_i^2 - m_j^2}{2|\vec{q}'|}L = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2|\vec{q}'|}L. \quad (2.7)$$

Dla $\nu_l \rightarrow \nu_{l'}$ prawdopodobieństwo oscylacji wynosi:

$$\mathbb{P}(t)_{l \rightarrow l'} = \sum_i |U_{li}|^2 |U_{l'i}|^2 + 2 \sum_{i>j} |U_{l'i} U_{li}^* U_{l'j}^* U_{lj}| \cos(\delta\varphi_{ij} + \phi_{l',ij}), \quad (2.8)$$

gdzie $l, l' = e, \mu, \tau$ i $\phi_{l',ij} = \arg(U_{li} U_{jl}^* U_{j'l'} U_{l'j}^*)$. Aby oscylacja neutrin zachodziła, macierz mieszania musi być różna od identyczności, $\mathbb{U} \neq 1$, oraz przynajmniej dwie wartości spośród m_1, m_2, m_3 muszą być różne. Efekt oscylacji neutrin będzie najlepiej widoczny, jeśli

$$\delta\varphi_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2|\vec{q}'|}L \approx \frac{\pi}{2}. \quad (2.9)$$

Obecne doświadczenia wskazują, że macierz mieszania neutrin \mathbb{U} jest macierzą unitarną. W konsekwencji zachowane jest prawdopodobieństwo

$$\sum_l \mathbb{P}(t)_{l \rightarrow l'} = 1, \quad \sum_{l'} \mathbb{P}(t)_{l \rightarrow l'} = 1. \quad (2.10)$$

Uwzględniając tę zależność otrzymujemy

$$\mathbb{P}(t)_{l \rightarrow l'} = \delta_{ll'} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{l'i} U_{li}^* U_{l'j}^* U_{lj}) \sin^2 \frac{\delta\varphi_{ij}}{2} \pm 4 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{l'i} U_{li}^* U_{l'j}^* U_{lj}) \sin \delta\varphi_{ij}. \quad (2.11)$$

Znak \pm w trzecim członie odpowiada za efekt łamania symetrii CP, $-$ dla neutrin i $+$ dla antyneutrin.

Kolejną tożsamością jest związek, wynikający wprost z definicji $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$,

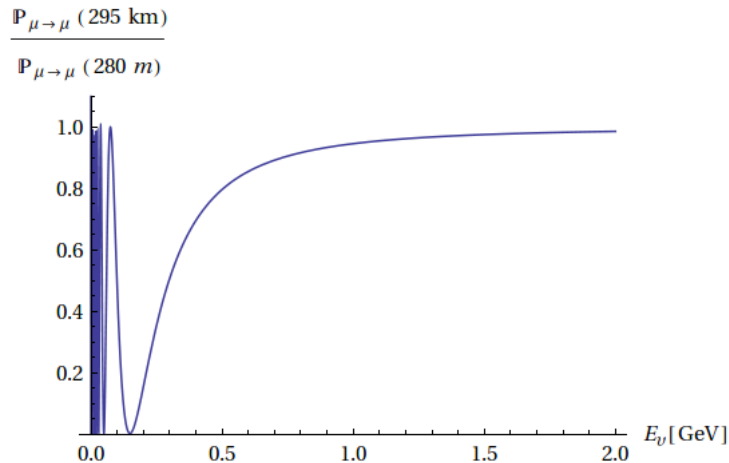
$$\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2 + \Delta m_{31}^2 = 0. \quad (2.12)$$

Rozważmy oscylacje neutrin w przypadku, gdy $|\Delta m_{13(23)}^2| \gg |\Delta m_{12}^2|$. Przypadek ten został zbadany w dotychczas przeprowadzonych doświadczeniach. W większości eksperymentów źródłem neutrin jest rozpad pionu na neutrino mionowe i antymion, $l = \mu$. W doświadczeniu T2K również główny nacisk postawiono na wykrycie neutrin mionowych $l' = \mu$. Uwzględniając powyższe tożsamości otrzymujemy

$$\mathbb{P}(t)_{\mu \rightarrow \mu} = 1 - 4 \left(1 - \sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{13}\right) \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \frac{\delta\varphi_{23}}{2}. \quad (2.13)$$

Charakterystyczne wielkości wchodzące w $\delta\varphi_{ij}$ prowadzą do wyniku w radianach

$$\frac{\delta\varphi_{ij}}{2} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{4|\vec{q}'|}L = 1.27 \frac{\Delta m_{ij}^2 [\text{eV}^2]}{4|\vec{q}'| [\text{GeV}]} L [\text{km}]. \quad (2.14)$$



Rysunek 1: Stosunek prawdopodobieństw wykrycia neutrino mionowego dla $L = 295\text{km}$ i $L = 0.28\text{km}$ od energii propagującego się neutrino $E_\nu[\text{GeV}]$ (odległości charakterystyczne dla eksperymentu T2K, Dodatek A).

3 Kłopoty interpretacyjne

Podjęcie standardowe przedstawione w Rozdziale 2 obarczone jest pewnymi niejasnościami koncepcyjnymi, między innymi wymienionymi w artykule [7]:

1. Dlaczego w rozumowaniu zakłada się, że produkowane neutrino mają ustalony pęd, a energie mogą mieć różne?
2. Jeśli cząstka o ściśle określonym pędzie nie jest zlokalizowana w przestrzeni to w jakim sensie w takim wypadku można mówić o odległości pomiędzy miejscem produkcji i detekcji?
3. Czy dokładne pomiary czasu przelotu i energii neutrino mogą zmienić wyniki pomiarów oscylacji przez identyfikację, które neutrino przeniosło energię?

Podjęcie do problemu oscylacji, wykorzystujące paczki falowe, jakie zaproponował Kayser [10], eliminuje część niejasności. Neutrino, według Kaysera, nie jest generowane jako prosty układ trójstanowy, ale jako superpozycja pakietów falowych, zbudowanych ze stanów własnych masy. Według Kaysera, w niektórych sytuacjach nie będzie się obserwować oscylacji neutrino z powodu zasady nieoznaczoności Haisenberga. Powstaje jednak pytanie o parametry i kształt pakietów falowych neutrino.

Podjęcie Giunti i in. [8] oraz Grimusa i Stockingera [9] wniosło do rozumowania elementy kwantowej teorii pola, których nie było w pracach [3, 7]. Zaproponowali oni traktowanie produkcji i propagacji neutrino, a następnie detekcji mionu, jako jednego procesu fizycznego z neutrinem jako cząstką pośredniczącą (z propagatorem Feynmana dla fermionu).

W pracy Akhmedova [5] można znaleźć porównanie opisu oscylacji neutrino w języku kwantowej teorii pola (KTP) z podstawowym opisem z mechaniki kwantowej bez elementów KTP. Sformułowanie hamiltonowskie KTP ma na celu połączyć w spójną całość oba opisy.

Część II

Podstawowe pojęcia

4 Definicje

4.1 Macierz mieszania neutrin

Do opisu oscylacji neutrin używać będziemy macierzy przejścia - macierzy zmiany bazy. Macierz unitarna \mathbb{U} przeprowadza bazę wektorów własnych swobodnego hamiltonianu (definicja H_0 (4.4)), pola ν_1, ν_2, ν_3 o masach m_1, m_2 i m_3 , na bazę pól ν_e, ν_μ, ν_τ o określonym zapachu e, μ, τ . Rozważamy jedynie przypadek neutrin jako cząstek Diraca. W tej pracy nie zajmujemy się opisem neutrin jako cząstek Majorany.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Macierz mieszania \mathbb{U} może być sparametryzowana przez trzy kąty mieszania θ_{13}, θ_{23} i θ_{12} , gdzie $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$ oraz fazę $\delta \in [0, 2\pi]$ wiążącą się z łamaniem symetrii CP.

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} e^{i\delta} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Stosując skrócony zapis $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ możemy zapisać.

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

- Na podstawie doświadczeń KTK [11], MINOS [12, 13] ustalono $\theta_{23} \approx 45^\circ$ oraz $|\Delta m_{23}^2| \sim 2.72 \begin{pmatrix} +.38 \\ -.25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \text{eV}^2$.
- Na podstawie doświadczeń CHOOZ [14] ustalono $\theta_{13} < 12^\circ$.
- Na podstawie doświadczeń z neutrinami słonecznymi i eksperymentem KamLAND [15] ustalono $\theta_{12} \approx 32^\circ$ oraz $|\Delta m_{12}^2| \sim 7.6 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2$.
- δ jest nie znana, w tej pracy przyjęto (za innymi autorami [2]) równą zero, $\delta = 0$.

4.2 Hamiltonian

Doświadczalnie obserwuje się oddziaływanie neutrin z nukleonami swobodnymi lub w jądrze atomowym, a nie z kwarkami. Dlatego w rozważaniach stosuję teorię efektywną Fermiego, która nie wnika w kwarkową strukturę neutronu n i protonu p .

Ponadto zgodnie z obecną wiedzą doświadczalną (PDG [6]) π^\pm praktycznie zawsze (99.99%) rozpada się na $\mu\nu_\mu$. Oddziaływanie efektywne pionu z leptonami również nie wnika w kwarkową strukturę pionu π^\pm .

Obecnie obie teorie są teoriami efektywnymi Modelu Standardowego i odpowiednie stałe w zasadzie możemy powiązać ze stałymi Modelu Standardowego. W całej pracy stosujemy język Kwantowej Teorii Pola, dlatego hamiltonian $H = H_0 + H_I$ zbudowany jest z operatorów pól.

Hamiltonian swobodny $H_0 = \int d^3x \mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \bar{\mu}(x) \left[-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m_\mu \right] \mu(x) + \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_i(x) \left[-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m_i \right] \nu_i(x) \\ & + m_\pi^2 \pi(x)^\dagger \pi(x) - \vec{\nabla} \pi(x)^\dagger \vec{\nabla} \pi(x) + \bar{n}(x) \left[-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m_\mu \right] n(x) \\ & + \bar{p}(x) \left[-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m_\mu \right] p(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Symbolem m_X oznaczono masy cząstek.

- m_p masa protonu, $m_p = 938,272029(80)\text{MeV}/c^2$
- m_n masa neutronu, $m_n = 939.565560(81)\text{MeV}/c^2$
- m_μ masa mionu μ^\pm , $m_\mu = 105,658367(4)\text{MeV}/c^2$
- m_π masa pionu π^\pm , $m_\pi = 139.57018(35)\text{MeV}/c^2$

Hamiltonian oddziaływania $H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I$ zaproponowany przez Gell-Manna i Levy'ego oraz Weinberga [16, 17] opisuje oddziaływania neutrina mionowego z hadronami.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \vartheta_C \cdot \bar{\nu}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu(x) \cdot \bar{p}(x) \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) n(x) \\ & - i \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \cdot \bar{\nu}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu(x) \cdot \partial_\alpha \pi + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wielkości liczbowe stałych możemy znaleźć na stronach PDG [6].

- G_F stała Fermiego, $\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$,
- ϑ_C kąt Cabbibo, $\sin \vartheta_C \simeq 0.225 - 0.230$, stąd $\vartheta_C \simeq 13.0^\circ - 13.3^\circ$
- g_A stała aksjalna $g_A = 1.2763(7)$,
- F_π stała rozpadu pionu, $F_\pi = 130.4 \pm 0.04 \pm 0.2 \text{MeV}$.

4.3 Rozkład operatorów pól na składowe Fouriera

Do definicji Hamiltonianu w poprzednim paragrafie użyto operatorów pól wyrażonych w reprezentacji położeniowej. Teraz rozłożymy te pola na składowe Fouriera w $x^0 = 0$. Do definicji użyjemy oznaczenia $f_X(k, x) = e^{-iE_X x^0 + i\vec{k}\vec{x}}$, gdzie $X \in \{\mu, \pi, \nu_1, \nu_2, \nu_3, n, p\}$, $E_X = E_X(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_X^2}$ oraz $[dk] = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_X}$.

Pole mionu

$$\mu(x) = \int [dk] \sum_s \left[b_\mu^s(k) u^s(k) f_\mu(k, x) + d_\mu^{\dagger s}(k) v^s(k) f_\mu^*(k, x) \right] \quad (4.6)$$

Pole neutrina o masie m_i

$$\nu_i(x) = \int [dq] \sum_s \left[b_i^s(q) u^s(q) f_i(q, x) + d_i^{\dagger s}(q) v^s(q) f_i^*(q, x) \right] \quad (4.7)$$

Pole neutrina mionowego $\nu \equiv \nu_\mu$ jest ściśle określoną kombinacją $\nu_i(x)$

$$\nu(x) = \sum_{i=1}^3 U_i \nu_i(x), \quad (4.8)$$

gdzie współczynniki $U_i \equiv [\mathbb{U}]_{\mu i} \in \mathbb{C}$.

$$U_1 = -\sin \theta_{12} \cos \theta_{23} - \sin \theta_{13} \cos \theta_{12} \sin \theta_{23} e^{-i\delta} \quad (4.9)$$

$$U_2 = \cos \theta_{12} \cos \theta_{23} - \sin \theta_{13} \sin \theta_{12} \sin \theta_{23} e^{-i\delta} \quad (4.10)$$

$$U_3 = \cos \theta_{13} \cos \theta_{23} \quad (4.11)$$

Pole pionu

$$\pi(x) = \int [dk] \left[b_\pi(k) f_\pi(k, x) + d_\pi^\dagger(k) f_\pi^*(k, x) \right] \quad (4.12)$$

Pole neutronu

$$n(x) = \int [dp] \sum_s \left[b_n^s(p) u^s(p) f_n(p, x) + d_n^{\dagger s}(p) v^s(p) f_n^*(p, x) \right] \quad (4.13)$$

Pole protonu

$$p(x) = \int [dp'] \sum_s \left[b_p^{s'}(p') u^s(p') f_p(p', x) + d_p^{\dagger s'}(p') v^s(p') f_p^*(p', x) \right] \quad (4.14)$$

4.4 Stany swobodne

Swobodne stany cząstek o ustalonym pędzie konstruowane ze stanu próżni $|0\rangle$ w wyniku działania na ten stan operatorów kreacji.

Mionu μ

$$|\mu^+(\vec{k}')\rangle = b_\mu^{\dagger s}(\vec{k}')|0\rangle \quad (4.15)$$

$$|\mu^-(\vec{q}')\rangle = d_\mu^{\dagger s}(\vec{q}')|0\rangle \quad (4.16)$$

Neutrino ν_i

$$|\nu_i(\vec{q}_i)\rangle = d_{\nu_i}^{\dagger s}(\vec{q}_i)|0\rangle \quad (4.17)$$

Pionu π^+

$$|\pi^+(\vec{k})\rangle = b_\pi^{\dagger s}(\vec{k})|0\rangle \quad (4.18)$$

Neutronu n

$$|n(\vec{p})\rangle = d_n^{\dagger s}(\vec{p})|0\rangle \quad (4.19)$$

Protonu p

$$|p(\vec{p}')\rangle = d_p^{\dagger s}(\vec{p}')|0\rangle \quad (4.20)$$

4.5 Normalizacja stanów swobodnych

Zauważmy, że dla dowolnej fali płaskiej opisującej cząstkę $X \in \{\mu, \pi, \nu_1, \nu_2, \nu_3, n, p\}$ iloczyn skalarny wynosi

$$\langle X(\vec{p}) | X(\vec{k}) \rangle = (2\pi)^3 2E_X(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}). \quad (4.21)$$

Czyli normalizacja stanu $|X(\vec{p})\rangle$, to $\delta^{(3)}(0)$. Aby nadać fizyczne znaczenie $\delta^{(3)}(0)$ przypomnijmy, że

$$\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x}(\vec{p} - \vec{k})}. \quad (4.22)$$

Stąd

$$\delta^{(3)}(0) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x}\vec{0}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3}, \quad (4.23)$$

gdzie przez V oznaczyliśmy objętość przestrzeni w której normalizujemy stany. Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\langle X(\vec{p}) | X(\vec{p}) \rangle = (2\pi)^3 2E_X(\vec{p}) \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (4.24)$$

Część III

Uogólnienie wzoru Gell-Manna i Goldbergera

5 Teoria procesu rozpraszania $\pi n \rightarrow p\mu^+\mu^-$ z neutronami w stanach pośrednich

5.1 Stan początkowy

Stan początkowy $|\psi_i(t)\rangle$ skonstruowany jest ze stanu $|\phi_i\rangle$

$$|\phi_i\rangle := \int d^3p \int d^3k \phi_n(\vec{p}, \vec{P}, \vec{L}) \phi_\pi(\vec{k}, \vec{K}) |\pi(\vec{k})n(\vec{p})\rangle, \quad (5.1)$$

gdzie ϕ_π opisuje pion w Tokai, a ϕ_n opisuje neutron w detektorze neutron.

Załóżmy, że paczka falowa ϕ_π ma kształt gaussowski i jest skupiona wokół \vec{K} w chwili $t = 0$. Tak wybieramy układ współrzędnych, aby paczka falowa ϕ_π była scentrowana w położeniu 0.

$$\phi_\pi(\vec{k}, \vec{K}) := (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-3} \exp\left\{-\frac{(\vec{k} - \vec{K})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (5.2)$$

Przyjmujemy, że paczka falowa ϕ_n ma również kształt gaussowski. Jednak w porównaniu z ϕ_π zawiera fazę $(-i\vec{p}\vec{L} + iE_n(\vec{p})T)$ odpowiedzialną za skupienie paczki neutronu w chwili T w pozycji \vec{L} .

$$\phi_n(\vec{p}, \vec{P}, \vec{L}) := (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-3} \exp\left\{-\frac{(\vec{p} - \vec{P})^2}{2\sigma^2} - i\vec{p}\vec{L} + iE_n(\vec{p})T\right\} \quad (5.3)$$

Dla uproszczenia przyjęto tę samą wielkość rozmycia położenia tej cząstki w konstrukcji paczki falowej ϕ_n jak ϕ_π . Szerokość σ paczki falowej neutronu możemy powiązać z jego funkcją falową w jądrze atomowym. Jej szerokość jest rzędu energii Fermiego E_F . Energia Fermiego na nukleon wynosi $E_F = \frac{\hbar}{2m_n} \left(3\pi^2 \frac{A}{4\pi R^3}\right)$, $\sigma \sim E_F \approx 40\text{MeV}$, co odpowiada rozmyciu w położeniu rzędu 1fm.

Konstrukcja stanu początkowego zaproponowana przez Gell-Manna i Goldberger przedstawiona została w pracy [4]. Dzięki zastosowaniu w konstrukcji całki z gęstością rozkładu wykładniczego z parametrem ϵ unika się problemu włączeniowego i nadaje się epsilonowi określony sens fizyczny. Mała wielkość ϵ występuje również w wyrażeniach na amplitudy otrzymane z diagramów Feynmana, nie ma ona jednak wtedy interpretacji fizycznej, a jest jedynie matematycznym sposobem właściwego oddalenia biegunów od osi rzeczywistej.

$$|\psi_i(t)\rangle := \epsilon \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\epsilon\tau} e^{-iH(t-\tau)} e^{-iE_i\tau} |\phi_i\rangle \quad (5.4)$$

$$= e^{-iHt} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} |\phi_i\rangle \quad (5.5)$$

Stan (5.5) nie jest stanem o dobrze określonej energii E_i . Jednak z powodu gaussowskich kształtów paczek falowych w czynnikach w innych częściach wzoru niż czynniki eksponentyjalne hamiltonianów przyjęto $E_i = E_n(\vec{P}) + E_\pi(\vec{K})$.

Całka w stanie opisanym wzorem (5.5) wykonywana jest do 0 ponieważ w teorii GG obszar oddziaływania jest mały w porównaniu z wielkością laboratorium. Aby pozbyć się tego założenia, że obszar oddziaływania jest mały w porównaniu z wielkością laboratorium, wykonajmy całkę w (5.5) po τ od $-\infty$ do t_0 , które dobierzemy zgodnie z wymaganiami doświadczenia.

$$|\psi_i^{(t_0)}(t)\rangle := \epsilon \int_{-\infty}^{t_0} d\tau e^{\epsilon(\tau-t_0)} e^{-iH(t-\tau)} e^{-iE_i\tau} |\phi_i\rangle. \quad (5.6)$$

Przeanalizujmy po kolei znaczenie poszczególnych czynników w powyższej definicji. Stan $|\phi_i\rangle$, jak już wcześniej zostało wspomniane, zdefiniowany jest w chwili $t = 0$. Całkę po τ interpretować możemy jako sumę po stanach dla, których w momencie τ włączane jest oddziaływanie. Stan $e^{-iE_i\tau} |\phi_i\rangle$, dzięki czynnikowi z przodu, jest cofniętym stanem z chwili 0 do chwili τ za pomocą H_0 . Następnie w chwili τ włączane jest oddziaływanie i do czasu t stan jest ewoluowany za pomocą pełnego hamiltonianu H . Zauważmy, że według GG całka jest wykonywana do czasu t_0 z wagą $e^{\epsilon(\tau-t_0)}$. Dzięki zastosowaniu takiej konstrukcji unika się problemu z efektami włączeniowymi, tzn. z oscylacjami powodowanymi nieskończeniem szybkim włączeniem oddziaływania.

Wykonując wprost całkowanie po τ otrzymujemy stan dany poniższym wzorem, różniący się od (5.5) czynnikiem $e^{-i(E_i-H)t_0}$

$$|\psi_i^{(t_0)}(t)\rangle = e^{-iHt} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} e^{-i(E_i-H)t_0} |\phi_i\rangle. \quad (5.7)$$

W Rozdziale 6 po wprowadzeniu definicji amplitudy rozpraszania wrócimy do omówienia różnic w definicjach (5.5) i (5.7). W równaniu (6.14) wykorzystamy wzory na stany w momentach różniących się o to samo Δt od momentu do którego wykonywaliśmy całkę:

$$|\psi_i(t = \Delta t + 0)\rangle = e^{-iH\Delta t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} e^{-iE_i 0} |\phi_i\rangle, \quad (5.8)$$

$$|\psi_i^{(t_0)}(t = \Delta t + t_0)\rangle = e^{-iH\Delta t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} e^{-iE_i t_0} |\phi_i\rangle. \quad (5.9)$$

5.2 Stan końcowy

Stan końcowy opisuje przeewoluowany stan iloczynu fal płaskich

$$|\phi_f\rangle := |\mu^+(\vec{q}')\mu^-(\vec{k}')p(\vec{p}')\rangle, \quad (5.10)$$

do dowolnego czasu t przy użyciu swobodnego hamiltonianu

$$|\psi_f(t)\rangle := e^{-iH_0 t} |\phi_f\rangle. \quad (5.11)$$

W definicji stanu (5.11) użyto H_0 ponieważ przyjęto, że cząstki stanu końcowego od powstania w wierzchołku oddziaływania do ewentualnej rejestracji w detektorze nie oddziałują.

5.3 Normalizacja

Normalizacja stanów nie zmienia się w czasie. Norma stanu końcowego wynosi:

$$\|\psi_f\|^2 = \langle \mu^+(q')\mu^-(k')p(p') | \mu^+(q')\mu^-(k')p(p') \rangle = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^3. \quad (5.12)$$

Na podstawie pracy [4] wiemy, że normalizacja stanu (5.5) w chwili początkowej wynosi:

$$\|\psi_i\|^2 = \langle \psi_i(0) | \psi_i(0) \rangle = \langle \pi(k)n(p) | \pi(k)n(p) \rangle + \frac{1}{\epsilon} \text{Im} \{ \langle \pi(k)n(p) | H_I | \psi_i(t, \epsilon) \rangle \}. \quad (5.13)$$

Fakt, że normalizacja zależy od ϵ nie dziwi nas ponieważ ϵ występował w definicji stanu początkowego (5.5). Zauważmy, że zależność od ϵ w drugim członie (5.13) jest w dwóch miejscach. Zarówno czynnik $\frac{1}{\epsilon}$ oraz iloczyn $\langle \pi(k)n(p)|H_I|\psi_i(t, \epsilon)\rangle$ zależy od ϵ . Wielkość ϵ oszacowano liczbowo w Dodatku E. Okazuje się, że obecnie aparatura pomiarowa nie mierzy energii cząstek z taką dokładnością. Dlatego w rachunkach możemy przyjąć $\epsilon \rightarrow 0$. Przypadek $\epsilon \rightarrow 0$ rozważony został w pracy [4]

$$\|\psi_i\|^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2. \quad (5.14)$$

6 Amplituda rozpraszania

Zdefiniujmy prawdopodobieństwo przejścia ze stanu początkowego $|\psi_i(t)\rangle$ do stanu końcowego $|\psi_f(t)\rangle$ wzorem

$$\mathbb{P}(\psi_i(t) \rightarrow \psi_f(t)) = \frac{|A(t)|^2}{\|\psi_f\|^2 \|\psi_i\|^2}. \quad (6.1)$$

Wielkość $A(t)$ jest amplitudą rozpraszania zdefiniowaną następująco:

$$A(t) := \langle \psi_f(t) | \psi_i(t) \rangle. \quad (6.2)$$

W definicji prawdopodobieństwa przejścia konieczne jest podzielenie przez normy stanów początkowego i końcowego, aby prawdopodobieństwo przyjmowało wartości z przedziału $[0, 1]$.

Prawdopodobieństwo na jednostkę czasu to inaczej pochodna po czasie prawdopodobieństwa. Różniczkowy przekrój czynny $d\sigma$ to prawdopodobieństwo na jednostkę czasu podzielone przez strumień cząstek padających $|J_i| = \frac{|\vec{v}_n - \vec{v}_\pi|}{V}$. (Szczegółowe wyjaśnienie jak powiązać amplitudę przejścia z różniczkowym przekrojem czynnym można znaleźć na przykład w podręczniku Bjorkena i Drella [18]).

$$d\sigma = \frac{1}{|J_i|} \frac{\frac{d}{dt} |A(t)|^2}{\|\psi_f\|^2 \|\psi_i\|^2} \quad (6.3)$$

Dla przypomnienia: wielkość $|\vec{v}_n - \vec{v}_\pi|$ możemy zapisać w sposób niezmienniczy ze względu na transformacje Lorentza. Dla przypadku \vec{v}_n, \vec{v}_π używając mas cząstek m_n, m_π oraz iloczynu czteropędów neutronu P i pionu K

$$|\vec{v}_n - \vec{v}_\pi| = \frac{\sqrt{(P \cdot K)^2 - m_n^2 m_\pi^2}}{E_n E_\pi}. \quad (6.4)$$

Aby obliczyć $\frac{d}{dt} |A(t)|^2$ osobno przekształcimy $A(t)$ i $\dot{A}(t)$. Wykonując iloczyn stanów (5.5) i (5.11) otrzymujemy.

$$A(t) = \langle \phi_f | e^{i(E_f - H)t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} | \phi_i \rangle \quad (6.5)$$

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_i - H + i\epsilon} &= \frac{1}{E_i - H_o + i\epsilon} (E_i - H + i\epsilon + H_I) \frac{1}{E_i - H + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{E_i - H_o + i\epsilon} \left[1 + H_I \frac{1}{E_i - H + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wykorzystując tę tożsamość możemy przekształcić wyrażenie na $A(t)$.

$$\begin{aligned}
A(t) &= \langle \phi_f | \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} e^{i(E_f - H)t} | \phi_i \rangle \\
&= \langle \phi_f | \frac{i\epsilon}{E_i - H_o + i\epsilon} \left[1 + H_I \frac{1}{E_i - H + i\epsilon} \right] e^{i(E_f - H)t} | \phi_i \rangle \\
&= \langle \phi_f | \frac{i\epsilon}{E_i - E_f + i\epsilon} e^{i(E_f - H)t} | \phi_i \rangle \\
&\quad + \frac{1}{E_i - E_f + i\epsilon} \langle \phi_f | H_I e^{i(E_f - H)t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} | \phi_i \rangle
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Amplitudę tę przedstawimy w postaci

$$A(t) = \delta_{f,i}(t) + \frac{1}{E_i - E_f + i\epsilon} R(t, \epsilon), \tag{6.8}$$

gdzie

$$\delta_{f,i}(t) := \langle \phi_f | \frac{i\epsilon}{E_i - E_f + i\epsilon} e^{i(E_f - H)t} | \phi_i \rangle, \tag{6.9}$$

$$R(t, \epsilon) := \langle \phi_f | H_I e^{i(E_f - H)t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} | \phi_i \rangle \tag{6.10}$$

$$= \langle \psi_f(t) | H_I | \psi_i(t) \rangle. \tag{6.11}$$

Zauważmy, że czynnik eksponencjalny możemy zapisać zarówno z lewej jak i z prawej strony mianownika energetycznego (6.10). W przyszłości jednak będziemy rozwijać mianownik energetyczny i aby było to wykonane mianownik musi działać bezpośrednio na stan $|\phi_i\rangle$. Dlatego zapiszemy czynnik eksponencjalny z lewej strony mianownika, tak aby pomiędzy mianownikiem a stanem już teraz nic nie stało.

Różniczkując po czasie (6.5) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\dot{A}(t) &= \frac{d}{dt} \langle \phi_f | e^{i(E_f - H)t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} | \phi_i \rangle \\
&= \langle \phi_f | (i(E_f - H)) e^{i(E_f - H)t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} | \phi_i \rangle \\
&= \langle \phi_f | (-iH_I) e^{i(E_f - H)t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} | \phi_i \rangle \\
&= -iR(t, \epsilon)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Ostatecznie

$$|\dot{A}(t)|^2 = 2\text{Re} [\delta_{f,i}(t) iR^*(t, \epsilon)] + \frac{2\epsilon}{(E_i - E_f)^2 + \epsilon^2} |R(t, \epsilon)|^2. \tag{6.13}$$

Ułamek w powyższym wyrażeniu $\frac{2\epsilon}{(E_i - E_f)^2 + \epsilon^2}$ dla $\epsilon \rightarrow 0$ sprowadza się do delty zachowania energii. Ewolucja stanu początkowego, który nie ma ściśle określonej energii powoduje, że stan końcowy również będzie miał nie określoną energię. Warto zaznaczyć, że operator ewolucji zachowuje energię, o czym świadczy wyrażenie dążące do delty zachowania energii.

Wróćmy teraz do alternatywnej definicji stanu początkowego, gdzie pompowanie wiązki odbywa się aż do czasu t_0 (5.7). W tym przypadku również możemy zdefiniować amplitudę rozpraszania:

$$A^{(t_0)}(\Delta t + t_0) := \langle \psi_f(\Delta t + t_0) | \psi_i^{(t_0)}(\Delta t + t_0) \rangle \tag{6.14}$$

$$= \langle \phi_f | e^{i(E_f - H)\Delta t} \frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} e^{i(E_f - E_i)t_0} | \phi_i \rangle. \tag{6.15}$$

Porównując z analogicznym wyrażeniem na $A(t)$ danym wzorem (6.5) możemy zapisać:

$$A^{(t_0)}(\Delta t + t_0) = e^{i(E_f - E_i)t_0} A(\Delta t + 0). \quad (6.16)$$

Fizycznie interesuje nas moduł $A(t)$ lub też ściślej $\frac{d}{dt}|A(t)|^2$. Stąd w powyższym równaniu, nieistotna jest stała faza, a jedynie różnica czasów: w $A(t)$ mamy $\Delta t = t - 0$, natomiast w $A^{(t_0)}(t)$ mamy $\Delta t = t - t_0$. To jakie t i t_0 zostanie ustalone w konkretnym rachunku zależy od modelu, który ma odtwarzać warunki doświadczalne, które opisujemy. W tej pracy wyróżnione zostały dwa czasy $t = 0$ opisującą paczkę falową π oraz $t = T$ opisującą paczkę falową n .

Wyrażenie (6.16) pokazuje, że obie definicje (5.5) i (5.7) są równoważne.

Część IV

Zastosowanie uogólnionego wzoru Gell-Manna i Goldbergera

7 Amplituda rozpraszania

7.1 Propagacja neutrina na duże odległości

Aby cząstka elementarna mogła propagować się na znaczące odległości nawet przez materię nie oddziałując po drodze to oddziaływanie musi być słabe tzn. $H \approx H_o$. Cząstki stabilne, jak proton, foton, również mogą propagować się na znaczące odległości, jednak w kontakcie z innymi cząstkami elementarnymi, materią wielokrotnie silnie oddziałują niż neutrina.

W wyrażeniu na $R(t, \epsilon)$ pełen hamiltonian H występuje w dwóch miejscach. W mianowniku energetycznym i w eksponencie. Dzięki słabemu oddziaływaniu, czyli małej stałej sprzężenia, możemy użyć rozwinięcia perturbacyjnego w H_I .

Mianownik energetyczny działający bezpośrednio na stan początkowy daje się przekształcić do postaci

$$\frac{i\epsilon}{E_i - H + i\epsilon} |\phi_i\rangle = |\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_o + i\epsilon} H_I |\phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_o + i\epsilon} H_I \frac{1}{E_i - H_o + i\epsilon} H_I |\phi_i\rangle + \dots \quad (7.1)$$

Aby rozwinąć eksponens skorzystamy z rozwinięcia wykazanego w pracy [19].

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha + \int_0^1 ds e^{\alpha(1-s)} \beta e^{\alpha s} + \dots \quad (7.2)$$

Zauważmy szczególną postać drugiego członu, który dla $\alpha = -iH_o t$ oraz $\beta = -iH_I t$ przyjmuje postać

$$-it \int_0^1 ds e^{-iH_o t(1-s)} H_I e^{-iH_o ts} = -i \int_0^t dt' e^{-iH_o(t-t')} H_I e^{-iH_o t'}, \quad (7.3)$$

całkę możemy interpretować jako sumę po chwilach $t' \in [0, t]$ w których zaszło oddziaływanie za pomocą H_I .

Interesuje nas propagacja neutrina, które samo bezpośrednio nie jest obserwowane. Dlatego potrzebne są dwa H_I , jedno związane z produkcją, drugie z absorpcją. W wyrażeniu na $R(t, \epsilon)$ występuje już jedno H_I działające na stan końcowy $|\phi_f\rangle$, jest więc związane z absorpcją neutrina. Potrzebne jest więc jeszcze jedno H_I , związane z produkcją neutrina, może pochodzić z rozwinięcia eksponenty albo mianownika energetycznego. Chcemy jednak, aby neutрино propagowało się już od chwili $t = 0$, a przy rozwinięciu eksponenty pozycję H_I możemy powiązać z momentem oddziaływania. Interpretacja ta jest specyfiką rachunku w formalizmie hamiltonowskim, która w tym wypadku jest zaletą w stosunku do diagramów i reguł Feynmana. Nasze żądanie, aby neutрино propagowało się od chwili $t = 0$ przy rozwinięciu eksponenta nie jest spełnione.

Ostatecznie w wyrażeniu zarówno na $\delta_{f,i}(t)$ jak i $R(t, \epsilon)$ przybliżymy $e^{i(E_f - H)t} \approx e^{i(E_f - H_o)t}$, a mianownik energetyczny rozwiniemy do pierwszego rzędu w H_I .

Jak już wcześniej było wspomniane, aby ze stanu początkowego $|\pi n\rangle$ otrzymać stan końcowy $|\mu^+ \mu^- p\rangle$ tak aby cząstką pośredniczącą było neutрино, to potrzebne są dwa H_I , ponieważ

$$\langle \mu^+ \mu^- p | 1 | \pi n \rangle = 0, \quad (7.4)$$

$$\langle \mu^+ \mu^- p | H_I | \pi n \rangle = 0. \quad (7.5)$$

Dlatego pierwszy nie znikający wyraz w rozwinięciu w H_I wyrażenia (6.10) zawiera dwie macierze oddziaływania H_I .

$$R(t) = R_0(t) + R_1(t) + R_2(t) + \dots \quad (7.6)$$

$$R_0 = R_1 = 0 \quad (7.7)$$

Dalej będziemy przyjmować

$$R(t, \epsilon) = \langle \psi_f | H_I e^{i(E_f - H_o)t} \frac{1}{E_i - H_o + i\epsilon} H_I | \psi_i \rangle \quad (7.8)$$

Następnym członem spełniającym nasze fenomenologiczne założenia jest poprawka zawierająca pętle w trakcie swobodnej propagacji neutrina $\nu \rightarrow \odot \rightarrow \nu$. Taki człon proporcjonalny jest do kwadratu stałej sprzężenia oraz rozbieżnej całki po pędzie w pętli. Aby uzbieżnić całkę konieczne jest wprowadzenie procedury renormalizacji. Poprawka ta wykracza poziom tej pracy i nie będziemy się nią zajmować.

7.2 Obliczenie amplitudy

Kolejnym niezbędnym krokiem przy obliczaniu amplitudy $A(t, \epsilon)$ jest wykonanie całek po pędach.

Z uwzględnieniem paczek falowych $R(t, \epsilon)$ przyjmuje postać:

$$R(t, \epsilon) = \int d^3p \int d^3k \phi_n(\vec{p}) \phi_\pi(\vec{k}) \times \langle \mu^+ \mu^- p | H_I e^{i(E_{\mu^+} + E_{\mu^-} + E_p - H_o)t} \frac{1}{E_\pi + E_n - H_o + i\epsilon} H_I | \pi n \rangle \quad (7.9)$$

Tak jak chcieliśmy w przybliżonym wyrażeniu na $R(t, \epsilon)$ występują dwa operatory oddziaływań H_I , to stanem pośredniczącym pomiędzy stanami $|\pi n\rangle$ i $|\mu^+ \mu^- p\rangle$ może być jedynie stan zawierający neutrina ν_i lub antyneutrino $\bar{\nu}_i$.

Jeśli antyneutrino jest w stanie pośredniczącym, oznacza to, że neutron związany w jądrze atomowym detektora spontanicznie rozpada się, a powstałe w wyniku rozpadu antyneutrino po przebyciu odpowiednio dużego dystansu oddziałuje akurat z pionami w wiązce z drugiego laboratorium. Taki proces jest możliwy, jednak dzięki zastosowaniu paczek falowych w stanie początkowym, źródło i miejsce detekcji oddzielone jest interwałem czasowym. Maksyma paczek falowych wymuszają, aby stan pośredni z neutrinem miał dominujący wkład nad stanem pośrednim z antyneutrinem. Wkład od antyneutrino odpowiada ogonom gaussowskim z paczek falowych.

Dlatego trakcie eksperymentów takich jak T2K wiemy, że cząstką pośredniczącą jest jedynie neutrina. W rachunku oznacza, to że pomiędzy eksponens a ułamek energetyczny wstawimy operator $\sum_{\mu^+ \nu_i n} |\mu^+ \nu_i n\rangle \langle \mu^+ \nu_i n|$, w którym suma przebiega jedynie po ν_i , a nie $\bar{\nu}_i$.

Gdyby uwzględnić w sumie także stany pośredniczące zawierające antyneutrino, to w dalszych rachunkach otrzymalibyśmy propagator neutrina wynikający z reguł Feynmana, Dodatek C.

$$R(t, \epsilon) = \int d^3p \int d^3k \phi_n(\vec{p}) \phi_\pi(\vec{k}) \times \langle \mu^+ \mu^- p | H_I e^{i(E_{\mu^+} + E_{\mu^-} + E_p - H_o)t} \left(\sum_{\mu^+ \nu_i n} |\mu^+ \nu_i n\rangle \langle \mu^+ \nu_i n| \right) \frac{1}{E_\pi + E_n - H_o + i\epsilon} H_I | \pi n \rangle \quad (7.10)$$

W rozważaniach opartych na diagramach Feynmana [5, 8, 9] pomiędzy wierzchołkami oddziaływania jest linia fermionowa. Linia Feynmana nie odpowiada w prosty sposób kwantowym stanom pośrednim. Bieguny propagatora na płaszczyźnie energii wiążą się z dwoma możliwościami, propagacją neutrina i antyneutrina.

Wróćmy do rachunku na $R(t, \epsilon)$.

$$\begin{aligned} R(t, \epsilon) &= \sum_i \int d^3 q_i \int d^3 p \int d^3 k \phi_n(\vec{p}) \phi_\pi(\vec{k}) \\ &\quad \times \langle \mu^- p | H_I e^{i(E_{\mu^-} + E_p - E_n - E_i)t} | \nu_i n \rangle \\ &\quad \times \langle \mu^+ \nu_i | \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} H_I | \pi \rangle \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \int d^3 q_i \int d^3 p \int d^3 k \phi_n(\vec{p}) \phi_\pi(\vec{k}) \\ &\quad \times \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} e^{i[E_\mu(\vec{q}') + E_p(\vec{p}') - E_n(\vec{p}) - E_i(\vec{q}_i)]t} \\ &\quad \times \langle \mu^- p | H_I | \nu_i n \rangle \\ &\quad \times \langle \mu^+ \nu_i | H_I | \pi \rangle \end{aligned} \quad (7.12)$$

Dwa wyrażenia $\langle \mu^- p | H_I | \nu_i n \rangle$, $\langle \mu^+ \nu_i | H_I | \pi \rangle$ stojące w wyrażeniu powyżej zostały obliczone w Dodatku C. Standardowy rachunek w hamiltonowskim opisie wymagał dłuższego wyprowadzenia niż w przypadku opisu feynmanowskiego. Wynik obliczeń możemy zapisać, definiując funkcję \tilde{F} , z której wyłączyliśmy deltę Diraca.

$$\langle \mu^-(q') p(p') | H_I | \nu_i(q_i) n(p) \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_i + \vec{p} - \vec{q}' - \vec{p}') \tilde{F}(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) \quad (7.13)$$

$$\langle \mu^+(k') \nu_i(q_i) | H_I | \pi^+(k) \rangle = \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{k}) \tilde{F}(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i), \quad (7.14)$$

gdzie funkcje \tilde{F} wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) &= (2\pi)^3 U_i \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_n} \\ &\quad \times F(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$F(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) = \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C \cdot \bar{u}_\mu(q') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_i(q_i) \cdot \bar{u}_p(p') \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) u_n(p) \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) &= (2\pi)^3 U_i^* \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_\pi} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} \\ &\quad \times F(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$F(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) = F_\pi \bar{u}_i(q_i) \not{k} (1 - \gamma_5) v_\mu(k') \quad (7.18)$$

Ponadto dla neutrina bezmasowego lub ultrarelatywistycznego zachodzi wzór wykazany w Dodatku B, gdzie przez q oznaczono czterowektor $q = (|\vec{q}|, \vec{q})$.

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{spinach}} F(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) F(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) F^*(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_j) F^*(\nu_j n \rightarrow \mu^- p) = \\ &= 512 \cdot m_\mu [2(kk')(kq) + m_\pi^2(k'q)] [(1+g_A)^2(p'q)(pq') + (1-g_A)^2(pq)(p'q') - m_n m_p (1-g_A^2)(q'q)] \end{aligned} \quad (7.19)$$

Otrzymane wyniki możemy podstawić do wyrażenia (7.12).

$$\begin{aligned}
R(t, \epsilon) &= \sum_i \int d^3 q_i \int d^3 p \int d^3 k \phi_n(\vec{p}) \phi_\pi(\vec{k}) \\
&\times \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} e^{i[E_\mu(\vec{q}') + E_p(\vec{p}') - E_n(\vec{p}) - E_i(\vec{q}_i)]t} \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{q}_i + \vec{p} - \vec{q}' - \vec{p}') \tilde{F} [\nu_i(\vec{q}_i) n(\vec{p}) \rightarrow \mu^-(\vec{q}') p(\vec{p}')] \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{k}) \tilde{F} [\pi^+(\vec{k}) \rightarrow \mu^+(\vec{k}') \nu_i(\vec{q}_i)]
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Dzięki deltom zachowania pędu w wierzchołkach oddziaływania całkowanie po pędach cząstek wchodzących sprowadza się do wyrażenia:

$$\begin{aligned}
R(t, \epsilon) &= \sum_i \int d^3 q_i \phi_n(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i) \phi_\pi(\vec{k}' + \vec{q}_i) \\
&\times \frac{1}{E_\pi(\vec{k}' + \vec{q}_i) - E_{\mu^+}(\vec{k}') - E_i(\vec{q}) + i\epsilon} e^{i[E_\mu(\vec{q}') + E_p(\vec{p}') - E_n(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i) - E_i(\vec{q}_i)]t} \\
&\times \tilde{F} [\nu_i(\vec{q}_i) n(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i) \rightarrow \mu^-(\vec{q}') p(\vec{p}')] \cdot \tilde{F} [\pi^+(\vec{k}' + \vec{q}_i) \rightarrow \mu^+(\vec{k}') \nu_i(\vec{q}_i)]
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Obie paczki falowe ϕ_n i ϕ_π mają kształt Gaussowski, który znacznie upraszcza całkowanie. Czynniki wiodący funkcji pod całkowej ma postać:

$$e^{-\frac{(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{k})^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i - \vec{p})^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{\frac{1}{2}(\vec{K} + \vec{P} - \vec{k}' - \vec{p}' - \vec{q}')^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{2\left(\vec{q}_i - \frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2}\right)^2}{2\sigma^2}} \tag{7.22}$$

Do tego miejsca w ramach przyjętego przybliżenia oddziaływania drugiego rzędu (7.8) otrzymaliśmy ścisły wynik. Aby jednak móc w sposób analityczny wykonać całkę po \vec{q}_i w powyższym wyrażeniu jesteśmy zmuszeni przyjąć przybliżenia:

- Wartość własną $E_i = E_i(\vec{q})$ operatora H_o w działaniu na stan $|\nu_i\rangle$ rozwinieśmy wokół wartości $\frac{1}{2}(\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P})$, wyróżnionej przez czynnik Gaussowski.

$$E_i(\vec{q}_i) \approx E_i + \vec{v}_i \cdot \left(\vec{q}_i - \frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2} \right) \tag{7.23}$$

Symbol E_i oznacza energię neutrino $E_i \equiv E_i \left(\frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2} \right)$,

a \vec{v}_i prędkość neutrino $\vec{v}_i := \frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2E_i}$.

- Energię neutronu $E_n(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i)$ traktowaną jak funkcja \vec{q}_i też rozwijamy wokół pędu $\frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2}$.

$$E_n(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i) \approx E_n + \vec{v}_n \cdot \left(\frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2} - \vec{q}_i \right) \tag{7.24}$$

Symbol E_n oznacza energię neutronu $E_n \equiv E_n \left(\frac{\vec{K} - \vec{k}' - \vec{p}' - \vec{q}' - \vec{P}}{2} \right)$,

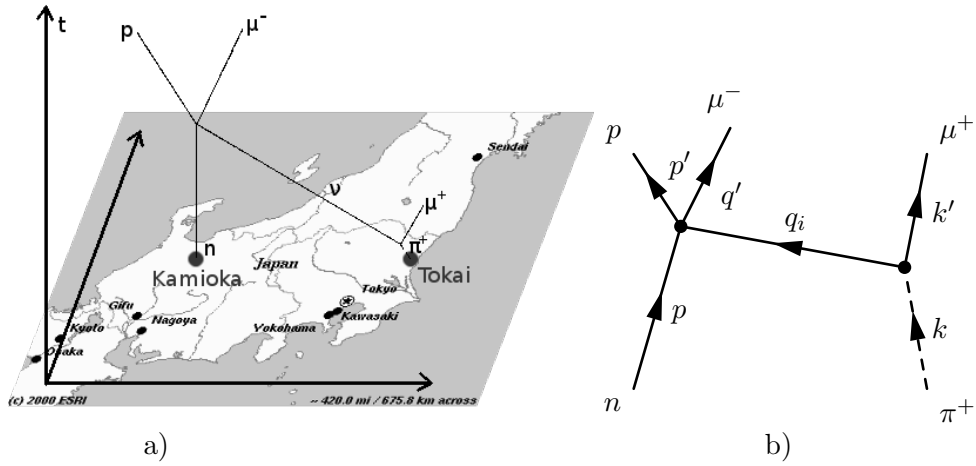
a \vec{v}_n prędkość neutronu $\vec{v}_n := \frac{\vec{K} - \vec{k}' - \vec{p}' - \vec{q}' - \vec{P}}{2E_n}$.

Rozwinięcia dokonujemy w eksponencie do pierwszego rzędu - uwzględniając poprawkę od prędkości, a w pozostałych miejscach do zerowego - nie uwzględniając poprawki od prędkości.

Aby móc uzasadnić takie przybliżenie wróćmy jeszcze raz do wzoru (6.13). Ułamek $\frac{2\epsilon}{(E_i - E_f)^2 + \epsilon^2}$ choć ściśle matematycznie nie jest równy $\delta(E_i - E_f)$, to jednak dla małych ϵ , ale nie zerowych znacząco ogranicza energie cząstek, a tym samym ich pędy. Oszacowanie liczbowe na ϵ znajduje się w Dodatku E.

Poczyn funkcji Gaussa (7.22) wymusza dwie rzeczy. Zawięza zakres całkowania, możliwych pędów \vec{q}_i oraz wymusza zachowanie całkowitego pędu z dokładnością rzędu σ .

Funkcje stojące pod całką w wyrażeniu (7.21), ułamek oraz czynnik fermionowy, są funkcjami wymiernymi, czyli nie oscylują. Natomiast eksponens z urojonym argumentem silnie oscyluje, dlatego jedynie w tym miejscu dokonujemy rozwinięcia do pierwszego rzędu. Te powody wystarczają, aby móc zastosować twierdzenie o punkcie siodłowym i dokonać przybliżenia w (7.21).



Rysunek 2: a) Linie świata cząstek naniesione na mapę Japonii. W przypadku, gdy detektorem jest SK. b) Uporządkowany czasowo diagram wraz z oznaczeniem pędów.

Na mapę Japonii na rys. 2a) mamy naniesiony diagram ilustrujący linie świata cząstek dla dalekiego detektora w eksperymencie T2K. Obok znajduje się uporządkowany czasowo diagram z zaznaczonymi pędami cząstek.

$$\begin{aligned}
R(t, \epsilon) = & \sum_i \int d^3 q_i \left(\sqrt{2\pi\sigma} \right)^{-3} e^{-\frac{(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{K})^2}{2\sigma^2}} \\
& \times \left(\sqrt{2\pi\sigma} \right)^{-3} e^{-\frac{(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i - \vec{P})^2}{2\sigma^2}} - i(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{q}_i) \vec{L} + i \left[E_n + \vec{v}_n \left(\frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2} - \vec{q}_i \right) \right] T \\
& \times e^{i \left[E_\mu(\vec{q}') + E_p(\vec{p}') - E_n - \vec{v}_n \left(\frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2} - \vec{q}_i \right) - E_i - \vec{v}_i \left(\vec{q}_i - \frac{\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}}{2} \right) \right] t} \quad (7.25) \\
& \times \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \\
& \times \tilde{F} [\nu_i n \rightarrow \mu^- p] \cdot \tilde{F} [\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i]
\end{aligned}$$

Dzięki dokonany przybliżeniom w powyższym wyrażeniu możemy wykonać całkę po \vec{q}_i .

$$\begin{aligned}
R(t, \epsilon) = & \sum_i \frac{1}{(\sqrt{4\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\vec{P}+\vec{K}-\vec{q}'-\vec{p}'-\vec{k}')^2} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(T-t)\vec{v}_n+(\vec{v}_{it}-\vec{L})]^2} \\
& \times e^{iE_n(T-t)} e^{iE_{\mu^-}t} e^{iE_p t} \\
& \times e^{i\vec{L}\left(\frac{\vec{K}-\vec{k}'+\vec{p}'+\vec{q}'-\vec{P}}{2}\right)} e^{-iE_i t} \\
& \times \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \\
& \times \tilde{F}[\nu_i n \rightarrow \mu^- p] \cdot \tilde{F}[\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i]
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Podstawiając wyrażenia (7.15) oraz (7.17) do (7.26) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
R(t, \epsilon) = & F_\pi \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \vartheta_C \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_n} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_\pi} \\
& \times \frac{(2\pi)^3}{(4\pi\sigma)^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\vec{P}+\vec{K}-\vec{q}'-\vec{p}'-\vec{k}')^2} \\
& \times e^{i\vec{L}\left(\frac{\vec{K}-\vec{k}'+\vec{p}'+\vec{q}'-\vec{P}}{2}\right)} e^{iE_n(T-t)} e^{iE_{\mu^-}t} e^{iE_p t} \\
& \times \sum_i |U_i|^2 e^{-iE_i t} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(T-t)\vec{v}_n+(\vec{v}_{it}-\vec{L})]^2} \\
& \times \frac{1}{2E_i} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \\
& \times F[\nu_i n \rightarrow \mu^- p] \cdot F[\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i]
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Mamy już wszystkie potrzebne wyniki do obliczenia $|R(t, \epsilon)|^2$:

$$\begin{aligned}
|R(t, \epsilon)|^2 = & \left(F_\pi \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \vartheta_C \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_n} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_\pi} \right)^2 \\
& \times \left[\frac{(2\pi)^3}{(\sqrt{4\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\vec{P}+\vec{K}-\vec{q}'-\vec{p}'-\vec{k}')^2} \right]^2 \\
& \times \sum_{i,j} |U_j U_i|^2 e^{i(E_j - E_i)t} \\
& \times e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(T-t)\vec{v}_n+(\vec{v}_{it}-\vec{L})]^2} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(T-t)\vec{v}_n+(\vec{v}_{jt}-\vec{L})]^2} \\
& \times \frac{1}{2E_i} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \frac{1}{2E_j} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_j - i\epsilon} \\
& \times \frac{1}{2} \sum_{\text{spiny}} F(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) F(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) F^*(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_j) F^*(\nu_j n \rightarrow \mu^- p)
\end{aligned} \tag{7.28}$$

7.3 Komentarze do wzoru na $|R(t, \epsilon)|^2$

- Standardowo przyjmowany wzór na prawdopodobieństwo przejścia od stanu ν_μ do stanu ν_μ po czasie t dany jest wzorem

$$\mathbb{P}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)(t) = \sum_{i,j} |U_j U_i|^2 e^{i(E_j - E_i)t}. \tag{7.29}$$

Wzór ten po raz pierwszy podał Bileny [3], a wyprowadzenie jego powtórzone zostało w Rozdziale 2.

Wyrażenie (7.28) zawiera pod sumą po i, j czynnik $|U_j U_i|^2 e^{i(E_j - E_i)t}$. Ten czynnik jest jednak mnożony przez inne czynniki, zależne zarówno od czasu t jaki i od pędów cząstek, które uczestniczą w procesie kreacji i anihilacji neutrina wirtualnego.

- Macierz mieszania U powoduje powstanie interferencji amplitud w których neutrina w stanach pośrednich mają różne masy. Oscylacja neutrin rozumiana w sformułowaniu hamiltonowskim jest konsekwencją interferencji tych amplitud.

Człony interferencyjne występują zawsze. Wielkość ich zależy jednak od wielu warunków, które mogą spowodować, że interferencja nie będzie obserwowalna eksperymentalnie.

Oscylacja neutrin jako interferencja amplitud znana jest w literaturze [5, 8].

- Propagator neutrina omówiony został szczegółowo w Dodatku E. Propagator ten jako funkcja wyłącznie $|\vec{q}'|$ (energia E_{μ^+} też zależy od $|\vec{q}'|$) posiada pik dla takiego $|\vec{q}'|$ dla którego zachodzi równość fizycznie przenoszonej energii i wartości własnej H_0 .

- Całkowity pęd w procesie $\pi^+ n \rightarrow \mu^+ \mu^- p$ jest zachowany, ponieważ hamiltonian oddziaływania H_I zachowuje pęd. Rozmycie pędów stanów końcowych jest konsekwencją rozmycia pędów w paczkach stanów początkowych. Pęd jest zachowany, chociaż nie jest dobrze określony.

Możliwe jest zastosowanie paczek falowych w stanach końcowych do opisu rozdzielczości aparatury. Takie rozumowanie zostało zaprezentowane w [8].

- Funkcja Gaussa $\left[\frac{(2\pi)^3}{(\sqrt{4\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\vec{P} + \vec{K} - \vec{q}' - \vec{p}' - \vec{k}')^2} \right]^2$ jest znormalizowana do jedności i zbiega do delty Diraca pomnożonej przez objętość przestrzeni, w której normalizujemy stany, gdy $\sigma \rightarrow 0$. To czy możemy uznać, że $\sigma \rightarrow 0$ zależy z jaką dokładnością mierzymy pędy. Gdy $\sigma \sim 40\text{MeV}$, z powodu ruchu w jądrach atomowych, funkcję Gaussa można uznać za bliską delty jeśli któreś z pędów w argumentie funkcji Gaussa są duże w porównaniu z σ . W realnych sytuacjach doświadczalnych np. $|\vec{K}| = 1.3\text{ GeV}$.

Wszystkie znane autorowi prace ignorują ruch nukleonów w jądrze atomowym. Standardowe podejście polega na przyjęciu

$$\left[\frac{(2\pi)^3}{(\sqrt{4\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(\vec{P} + \vec{K} - \vec{q}' - \vec{p}' - \vec{k}')^2} \right]^2 \approx V \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P} + \vec{K} - \vec{q}' - \vec{p}' - \vec{k}'). \quad (7.30)$$

- Standardowe uproszczenie we wzorze (7.22) polega na przyjęciu $\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{K} - \vec{k}' + \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P})$. Trójpęd \vec{q} nigdy nie zależy od zapachu neutrina.

Wzór (7.30) implikuje $\vec{q} \approx \vec{K} - \vec{k}'$ oraz $\vec{q} \approx \vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}$.

- Fizycznie przenoszona energia neutrina w procesie $\pi^+ n \rightarrow \mu^+ \mu^- p$ wynosi $E_\pi - E_{\mu^+}$ lub równoważnie ze względu na zasadę zachowania energii, $E_n - E_p - E_{\mu^-}$.

Wartość własna operatora ewolucji H_0 w działaniu na stan $|\nu_i\rangle$ wynosi $E_i = E_i(\vec{q}) = \sqrt{m_i^2 + \vec{q}^2}$ i zależy od zapachu. Energia fizycznie przenoszona przez neutrina nie zależy od zapachu, dlatego zwykle $E_i \neq E_\pi - E_{\mu^+}$ oraz $E_i \neq E_n - E_p - E_{\mu^-}$.

Gdy fizyczna energia przenoszona przez cząstkę pośredniczącą różni się od wartości własnej hamiltonianu swobodnego w działaniu na stan tej cząstki, to mówimy, że ta cząstka jest poza powłoką energii.

- Prędkość neutrina w procesie zależy od zapachu $\vec{v}_i = \frac{\vec{q}}{E_i}$.
- Dwa czynniki eksponencjalne, zawierające zależność od czasu w kwadracie, możemy połączyć

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(T-t)\vec{v}_n+(\vec{v}_i t-\vec{L})]^2} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2[(T-t)\vec{v}_n+(\vec{v}_j t-\vec{L})]^2} \\ &= e^{-\frac{1}{8}\sigma^2(\vec{v}_i-\vec{v}_j)^2 t^2} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\left[(T-t)\vec{v}_n+\left(\frac{\vec{v}_i+\vec{v}_j}{2}t-\vec{L}\right)\right]^2}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Zauważmy, że powyższe wyrażenie składa się z iloczynu dwóch eksponensów, które dla argumentów znacząco różnych od zera bardzo szybko zanikają.

- Jeśli $\vec{v}_i \approx \vec{v}_j \Leftrightarrow m_i \approx m_j$, tzn. $|\vec{v}_i - \vec{v}_j|t \ll \sigma$ to pierwszy eksponencjalny czynnik jest bliski jedności. Aby również i drugi był równy jedności musi zachodzić $t \approx \frac{L}{v_i}$, bo $(\vec{v}_i + \vec{v}_j)/2 \approx \vec{v}_i$ oraz $v_i \gg v_n$.
 - Jeśli dla $i \neq j$, czyli w członach interferencyjnych $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ co zachodzi tylko wtedy, gdy $m_i \neq m_j$, to pierwszy czynnik eksponencjalny zanika dla dużych t i nie będzie obserwowalna interferencja.
- Przedostatnia linijka w (7.28) zawiera kwadrat mianownika energetycznego. To wyrażenie jest różne od propagatora Feynmana dla neutrina ponieważ nie zawiera części z antyneutrinem (zobacz Dodatek C).
 - Czynnik w ostatniej linijce w (7.28) opisuje spiny cząstek. Jego jawna postać została obliczona w Dodatku B. Czynnik fermionowy jest symetryczny w indeksach i i j .
 - Ułamek $\frac{1}{2}$ w ostatniej linijce w (7.28) pochodzi z uśredniania po spinach wchodzącego neutronu n .

8 Prawdopodobieństwo oscylacji $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ w T2K

8.1 Różniczkowy przekrój czynny w funkcji energii neutrina

Detektory zastosowane w doświadczeniu T2K umożliwiają obserwację mionów w pełnym zakresie kątów. Precyzyjne pomiary pozwalają wyznaczyć całkowity przekrój czynny σ na produkcję mionu w oddziaływaniach prądów naładowanych, Dodatek A. Gdy statystyki zwiększą się, możliwe będzie uzyskanie różniczkowego przekroju czynnego w funkcji energii neutrina, E_ν .

Po zrekonstruowaniu kierunku lotu mionu jest możliwość wyznaczenia energii neutrina, które spowodowało oddziaływanie. W tym celu zarówno w ND280 jak i Super Kamiokande, patrz Dodatek A, korzysta się ze wzoru na rekonstrukcję fizycznie przenoszonej energii neutrina [2]. Wyprowadzenie wzoru można znaleźć w Dodatku D:

$$E_\nu(\vec{q}') = \frac{m_n E_{\mu^-} - \frac{1}{2} m_\mu^2}{m_n - E_{\mu^-} + |\vec{q}'| \cos \theta_\mu}. \quad (8.1)$$

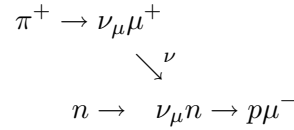
Przez m_μ , m_n oznaczono masę mionu i neutronu, a E_{μ^-} , \vec{q}' i θ_μ oznaczają energię, pęd i kąt mionu mierzonego względem osi łączącej laboratorium w Kamioka z ośrodkiem w Tokai. Wzór (8.1) został podany przy założeniu $m_p = m_n$, tzn. masy protonu i neutron są uznane za równe.

Oznaczając tak jak poprzednio przez V objętość przestrzeni, w której normalizuje się stany, możemy określić strumień cząstek wchodzących oraz normalizację stanów (objętość V dobieramy w ten sposób, aby prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tej objętości było równe 1):

$$|\vec{J}_i| = \frac{|\vec{v}_n - \vec{v}_\pi|}{V}, \quad (8.2)$$

$$\langle X|X \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3}, \text{ dla } X \in \{\pi, n, p, \mu^+, \mu^-\}. \quad (8.3)$$

Całkowity przekrój czynny σ dla procesu



przejścia pionu π^+ i neutronu n oddalonych od siebie o dystans L w mion μ^+ , mion μ^- i proton p jest całką (sumą po wszystkich pędach cząstek wychodzących) z różniczkowego przekroju czynnego

$$\sigma = \int d\sigma, \quad (8.4)$$

gdzie $d\sigma$ dany jest wzorem:

$$d\sigma = V \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} V \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} V \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{V}{|\vec{v}_n - \vec{v}_\pi|} \frac{1}{|\langle \pi n | \pi n \rangle|^2} \frac{1}{|\langle \mu^+ \mu^- p | \mu^+ \mu^- p \rangle|^2} \frac{2\epsilon}{(E_i - E_f)^2 + \epsilon^2} |R(t, \epsilon)|^2 \quad (8.5)$$

Różniczkowy przekrój czynny w funkcji zrekonstruowanej energii fizycznie przenoszonej przez neutrino, E_ν we wzorze (8.1), otrzymujemy z przecałkowania po wszystkich zmiennych różniczkowego przekroju czynnego $d\sigma$ z gęstością punktową $\delta(E_\nu(\vec{q}') - E_\nu)$.

$$\frac{d\sigma}{dE_\nu}(t) = \int \delta(E_\nu(\vec{q}') - E_\nu) d\sigma \quad (8.6)$$

Podsumowując różniczkowy przekrój czynny możemy zapisać poniższą formułą

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dE_\nu}(t) &= \left(F_\pi \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \vartheta_C \right)^2 \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_p} \\
&\times \frac{1}{2E_n 2E_\pi |\vec{v}_n - \vec{v}_\pi|} \cdot \frac{2\epsilon}{(E_{\mu^-} + E_p + E_{\mu^+} - E_\pi - E_n)^2 + \epsilon^2} \\
&\times \frac{1}{V} \left[\frac{(2\pi)^3}{(\sqrt{4\pi}\sigma)^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2} [(\vec{K}-\vec{k}') - (\vec{q}'+\vec{p}'-\vec{P})]^2} \right]^2 \\
&\times \sum_{i,j} |U_j U_i|^2 e^{i(E_j - E_i)t} \\
&\times e^{-\frac{1}{4}\sigma^2 [(T-t)\vec{v}_n + (\vec{v}_i t - \vec{L})]^2} e^{-\frac{1}{4}\sigma^2 [(T-t)\vec{v}_n + (\vec{v}_j t - \vec{L})]^2} \\
&\times \frac{1}{2E_i} \frac{1}{2E_j} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_j - i\epsilon} \\
&\times \frac{1}{2} \sum_{\text{spinach}} F(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) F(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) F^*(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_j) F^*(\nu_j n \rightarrow \mu^- p) \\
&\times \delta(E_\nu(\vec{q}') - E_\nu).
\end{aligned} \tag{8.7}$$

8.2 Obliczenie prawdopodobieństwa przejścia

Wyrażenie (8.7) okazuje się być zbyt trudne, aby obliczyć je analitycznie. Natomiast całkowanie numeryczne dawało wyniki obarczone wieloma błędami rzędu kilkudziesięciu procent spowodowanymi między innymi brakiem dobrego algorytmu wyboru gęstości podziału obszaru całkowania, dla rozważanych funkcji 9 zmiennych, oraz trudnością analizy funkcji podcałkowej, która jedynie w nielicznych obszarach całkowania jest znacząco większa od zera. Np. procedura MonteCarlo w Mathematicie [20] nie osiągnęła zbieżności wyników.

Otrzymane wzory wymagają dalszej pracy nad precyzyjnym obliczeniem. Natomiast standardowe założenia pozwalają uprościć całki i oszacować ich wielkość.

W doświadczeniu T2K daleki detektor Super Kamiokande oddalony o 295 km bada różniczkowy przekrój czynny po czym porównuje się jego wyniki z analogicznymi wynikami w bliskim detektorze ND280 oddalonym o 280 m od tarczy, na której tworzą się piony. Prawdopodobieństwo wykrycia mionu $\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}^{(\text{GG})}$ można zapisać w takim razie poniższą formułą

$$\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}^{(\text{GG})}(t = 295\text{km}/c, t = 280\text{m}/c) := \frac{\frac{d\sigma}{dE_\nu}(E_\nu, t = 295\text{km}/c)}{\frac{d\sigma}{dE_\nu}(E_\nu, t = 280\text{m}/c)}. \tag{8.8}$$

Obecnie dane doświadczalne potwierdzają słuszność standardowego wzoru $\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}$, Rozdział 2 (2.13). Jest to dla nas wskazówka, że jeżeli nasze dotychczasowe obliczenia są prawidłowe, też powinniśmy odtworzyć ten wynik dokonując podobnych uproszczeń, tzn.

$$\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}^{(\text{GG})}(t = 295\text{km}/c, t = 280\text{m}/c) \stackrel{?}{=} \frac{\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t = 295\text{km}/c)}{\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t = 280\text{m}/c)}. \tag{8.9}$$

Pierwsze, co nam się rzuca w oczy kiedy porównujemy definicję (8.8) ze wzorem (8.9), to to, że jeśli różniczkowy przekrój czynny $\frac{d\sigma}{dE_\nu}(t)$ byłby proporcjonalny, do $\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t)$, to mielibyśmy udowodnioną równość w (8.9). Stawiamy więc pytanie:

$$\frac{d\sigma}{dE_\nu}(t) \stackrel{?}{\propto} \mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t). \tag{8.10}$$

Jedyna zależność od czasu w (8.7) znajduje się w $e^{i(E_j - E_i)t}$. Wyrażenia tego nie możemy wyciągnąć przed znak całki, gdyż zależy od argumentów po których wykonuje się całkę.

Przyjmijmy naturalne przybliżenia, które wcześniej były już omawiane w akapicie 7.3, Komentarze do wzoru (7.28) na $|R(t, \epsilon)|^2$, i zobaczmy co z nich wynika:

$$t \approx T \quad \text{i} \quad v_i \approx v_j \approx 1, \quad (8.11)$$

$$\frac{1}{V} \left[\frac{(2\pi)^3}{(\sqrt{4\pi\sigma})^3} e^{-\frac{1}{4\sigma^2} [\vec{K} + \vec{P} - \vec{k}' - \vec{q}' - \vec{p}']^2} \right]^2 \approx (2\pi)^3 \delta^{(3)} (\vec{K} + \vec{P} - \vec{k}' - \vec{q}' - \vec{p}'), \quad (8.12)$$

$$\frac{2\epsilon}{(E_{\mu^-} + E_p + E_{\mu^+} - E_\pi - E_n)^2 + \epsilon^2} \approx (2\pi) \delta (E_{\mu^-} + E_p + E_{\mu^+} - E_\pi - E_n). \quad (8.13)$$

Czynnik fermionowy został obliczony w Dodatku B, tam również znajduje się przybliżenie dla przypadku neutrina bezmasowego

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{spinach}} F(\nu_i n \rightarrow \mu^- p) F(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_i) F^*(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_j) F^*(\nu_j n \rightarrow \mu^- p) \\ & \approx 512 \cdot m_\mu [2(kk')(kq) + m_\pi^2(k'q)] \\ & \cdot [(1 + g_A)^2(p'q)(pq') + (1 - g_A)^2(pq)(p'q') - m_n m_p (1 - g_A^2)(q'q)]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Zauważmy, że dokonując przybliżenia czynnika fermionowego znika nam zależność od indeksów sumowania.

Kwadrat mianownika energetycznego

$$\frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_j - i\epsilon} \quad (8.15)$$

w znaczący sposób zależy od wzajemnej relacji ϵ i $(E_i - E_j)$. Dzięki zastosowaniu w naszych rozważaniach modelu wiązki zaproponowanego przez Gell-Manna i Goldbergera [16] byliśmy w stanie określić liczbowo ϵ , Dodatek E. Z porównania wynika, że $\epsilon \gg (E_i - E_j)$. Takie rozumowanie było początkowo dalece nie oczywiste dla autora, ponieważ w diagramach Feynmana $\epsilon \rightarrow 0$ i nie ma fizycznego znaczenia jego wielkość. Natomiast w hamiltonowskim sformułowaniu ϵ , choć jak się okazało małe, ma fizyczną interpretację.

Z drugiej strony ϵ jest mniejszy od rozdzielczości aparatury, czyli od dokładności z jaką znamy mierzone energie i pędy. Możemy dokonać przybliżenia.

$$\frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_j - i\epsilon} \approx \frac{\pi}{2\epsilon} \delta (E_\pi - E_{\mu^+}(\vec{q}) - |\vec{q}|) \quad (8.16)$$

Przedstawiony ciąg przybliżeń, związany z:

- czasem oddziaływania (8.11),
- zachowaniem pędu i energii (8.12), (8.13),
- czynnikiem fermionowym (8.14),
- mianownikiem energetycznym (8.16),

choć każde z nich z osobna jest naturalne i dość oczywiste, razem daje nie trywialny wynik.

Stosując powyższe przybliżenia otrzymujemy

$$\sum_{i,j} |U_i U_j|^2 \exp [i (E_j(\vec{q}) - E_i(\vec{q})) t] \quad (8.17)$$

jako jedyny wynik, który zależy od parametrów neutrin,

Zauważmy, że w tej postaci wyrażenie pod sumą zależy od parametrów całkowania $\vec{q} = \vec{q}(\vec{K}, \vec{P}, \vec{k}', \vec{p}', \vec{q}')$ i nie możemy go w ogólności wyciągnąć przed znak całki. Warto już teraz zauważyć, że dzięki zachowaniu pędu mamy $\vec{q} = \vec{K} - \vec{k}'$.

W obecności delty zachowania całkowitej energii deltę, związaną z mianownikiem energetycznym, równoważnie możemy przepisać do postaci

$$\delta (E_\pi - E_{\mu^+} - |\vec{q}|) = \delta (E_p + E_{\mu^-} - E_n - |\vec{q}|). \quad (8.18)$$

Skupmy teraz uwagę na delcie zachowania pędu. Używając zależności $\vec{q} = \vec{K} - \vec{k}'$ dostajemy

$$\delta^{(3)} (\vec{K} + \vec{P} - \vec{k}' - \vec{q}' - \vec{p}') = \delta^{(3)} (\vec{P} + \vec{q} - \vec{q}' - \vec{p}'). \quad (8.19)$$

Łącząc wyniki (8.18) i (8.19), dostajemy deltę zachowania czteropędu dla oddziaływania w detektorze (ND280 lub SK). Używając jej możemy przekształcić gęstość punktową (8.6) do postaci

$$\delta (E_\nu(\vec{q}') - E_\nu) = \delta (|\vec{q}'| - E_\nu), \quad (8.20)$$

w której \vec{q}' zostało wyeliminowane, \vec{q} jest pędem neutrina, a E_ν jest fizycznie przecalowaną energią. Fizycznie wyrażenie (8.20) oznacza, że długość pędu $|\vec{q}'|$ daje się przybliżyć przez zrekonstruowaną energię neutrina E_ν (fizycznie przenoszona), Dodatek D.

Ostatecznie suma (8.17) przyjmuje postać nie zależną od parametrów całkowania. Dzięki temu można ją wyciągnąć przed całkę.

$$\sum_{i,j} |U_i U_j|^2 \exp [i (E_j(\vec{q}) - E_i(\vec{q})) t] \approx \sum_{i,j} |U_i U_j|^2 e^{i \frac{m_i^2 - m_j^2}{2|\vec{q}|} t} = \sum_{i,j} |U_i U_j|^2 e^{i \frac{m_i^2 - m_j^2}{2E_\nu} t} = \mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t), \quad (8.21)$$

czyli czynnik do wyciągnięcia przed całkę.

W symboliczny sposób możemy zapisać:

$$\frac{d\sigma}{dE_\nu}(t) \approx \mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t) \int (\dots). \quad (8.22)$$

Reasumując, używając teorii rozpraszania GG wyprowadziliśmy standardowy wzór na prawdopodobieństwo oscylacji neutrin, jako interferencję amplitud przejść z różnymi stanami pośrednimi. Podaliśmy komplet warunków dla których standardowy opis oscylacji jest poprawny.

$$\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}^{(GG)}(t = 295\text{km}/c, t = 280\text{m}/c) = \frac{\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t = 295\text{km}/c)}{\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t = 280\text{m}/c)} \quad (8.23)$$

W pracy nie podano bezpośredniej definicji prawdopodobieństwa oscylacji neutrina po czasie t , czyli wzoru analogicznego do standardowego wzoru $\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}(t)$. Wyliczone prawdopodobieństwo oscylacji między detektorem dalekim a bliskim, $\mathbb{P}_{\mu \rightarrow \mu}^{(GG)}$, jest zdefiniowane jako stosunek zliczeń mionów w obu detektorach. Istnieje jednak możliwość zdefiniowania bezpośrednio prawdopodobieństwa oscylacji neutrina w funkcji odległości od źródła. Wytłumaczenie takiego postępowania można znaleźć między innymi w rozdziale 5.2.1 w pracy Akhmedova [5].

Część V

Podsumowanie

9 Podsumowanie

Odkrycie oscylacji neutrin atmosferycznych w Super-Kamiokande [21] otworzyło nowe możliwości badania mas i parametrów mieszania w sektorze leptonowym. Rozszerzenie Modelu Standardowego o masy neutrina (uwzględniając procedurę renormalizacji) wydaje się nieuchronne. W pracy tej skupiono się na nieznanym dotychczas (według najlepszej wiedzy autora) sposobie wyprowadzenia standardowego wzoru na oscylacje neutrin w ramach formalnej teorii rozpraszania Gell-Manna i Goldbergera (GG), z niezbędnym uogólnieniem.

Pierwszy opis oscylacji neutrin, który podał Bilenky [3], jest pod pewnymi warunkami prawidłowy, jednak obarczony on jest nieścisłościami koncepcyjnymi omówionymi w Rozdziale 3 (ich wyjaśnienie podane są poniżej).

Zastosowanie paczek falowych przez Kaysera [10] usunęło część niejasności, jednak wprowadziło wątpliwość co determinuje szerokość paczek falowych neutrin w momencie ich tworzenia. Co więcej, rozumowanie Kaysera załamuje się, gdy źródło i detektor są w odległości mniejszej niż rozmiar wprowadzonych przez niego paczek falowych neutrin.

W latach 90-tych ubiegłego wieku przestano zajmować się problemem przygotowywania i obserwacji neutrin, ponieważ nie są one ani przygotowywane, ani obserwowane bezpośrednio. Przygotowujemy i obserwujemy jedynie hadrony i leptony oddziałujące z neutrinami.

Zastosowanie formalizmu KTP w drugim rzędzie rachunku zaburzeń pozwoliło wprowadzić neutrino jako nieobserwowalną cząstkę pośrednią [5, 7, 8, 9].

Wspomniane wyżej uogólnienie teorii rozpraszania w hamiltonowskim sformułowaniu GG, Część III, pozwoliło nam uzyskać wzór na amplitudę rozpraszania zależną od odległości między obszarem detekcji mionu a obszarem produkcji neutrina. W oryginalnym sformułowaniu GG rozpraszanie rozpatrywane jest jedynie w przypadku, gdy te obszary pokrywają się i de facto oba wypełniają całą przestrzeń (fale płaskie). Kluczową rolę w identyfikacji obszarów detekcji mionów i produkcji neutrin odgrywają paczki falowe protonu i neutronu.

Dopiero uogólniony wzór (6.13) można było zastosować w przypadku badania problemu oscylacji neutrin (Część IV), ponieważ w tym przypadku czas i obszar oddziaływania są znacznie większe niż w większości eksperymentów.

Wszystkie podejścia związane z KTP znane autorowi opierają się na diagramach Feynmana, które sumują wkłady od wszystkich stanów pośrednich w drugim rzędzie rachunku zaburzeń. W tej pracy, dzięki zastosowaniu hamiltonowskiej teorii, wirtualny stan pośredni z neutrinem jest jawnie uwzględniony a stan pośredni z antyneutrinem nie odgrywa roli (jest wyeliminowany przez układ doświadczalny, tzn. paczki falowe pionu i neutronu).

Opis oscylacji neutrin w formalizmie hamiltonowskim pozwala połączyć znany do tej pory prosty kwantowo-mechaniczny opis oscylacji neutrin z opisem za pomocą diagramów Feynmana. Podział na oba opisy [5] jest zdaniem autora zbędny. Mechanika kwantowa jako jedna teoria prowadzi do wzoru na oscylacje neutrin w przybliżeniu drzewowym niezależnie, czy stosujemy diagramy Feynmana, czy rachunek zaburzeń starego typu.

Używając pełnego wzoru na *oscylację* neutrin w uogólnionej teorii GG, wskazaliśmy warunki, w których interferencja amplitud z różnymi stanami masowymi neutrina w stanach pośrednich daje standardowy wzór.

1. Dzięki zastosowaniu paczek falowych w stanach wejściowych pionu i neutronu dobrze jest określone pojęcie odległości między źródłem i detektorem.

2. Wyróżniony jest czas oddziaływania, odpowiadający czasowi przelotu neutrina od źródła do detektora z prędkością światła.
3. W stanach końcowych nie są zastosowane paczki falowe lecz opis za pomocą fal płaskich, tak jak w [9]. Jest to uzasadnione dla mionu μ^- wykrywanego w detektorze. Dla tego mionu znamy tylko pęd. Jest to również uzasadnione dla protonu p i mionu μ^+ , które nie są obserwowane.
4. Fizyczny przekaz energii niezależnie od tego za pomocą jakiego stanu pośredniego się odbywa jest taki sam i wynosi tyle ile wynika z zasady zachowania energii w wierzchołku oddziaływania w diagramach drzewowych.
5. Energia każdego stanu pośredniego we wzorze na oscylacje neutrin w II rzędzie rachunku zaburzeń jest równa odpowiadającej wartości własnej H_0 .
6. Z punktów 4 i 5 wynika, że neutrina w stanach pośrednich są na powłoce masy i poza powłoką energii, tzn. wartość własna H_0 dla neutrin różni się od fizycznego przekazu energii za pośrednictwem neutrina. Energia swobodna neutrin i fizyczny przekaz energii są bardzo bliskie sobie i mogą być wręcz równe.
7. Jak już zauważył Akhmedov, standardowy wzór na oscylacje neutrin jest wynikiem interferencji amplitud z różnymi stanami pośrednimi. Standardowy wzór opisuje interferencję, gdy neutrina są ultrarelatywistyczne i jest wynikiem interferencji amplitud z różnymi stanami pośrednimi.
8. Problem konstrukcji paczki falowej neutrina nie pojawia się w uogólnionym wzorze teorii Gell-Manna i Goldbergera.

Dodatki

A Projekt eksperymentu JHF-Kamioka

Dodatek napisany jest na podstawie *The JHF-Kamioka neutrino project* [2].

Eksperyment T2K jest częścią projektu JKF-Kamioka, którego celem jest badanie zjawiska oscylacji neutrin. Jest to eksperyment z tzw. długą bazą (ang. Long Baseline Experiment). Eksperymenty tego typu składają się z dwóch detektorów - bliskiego, znajdującego się w pobliżu źródła neutrin, i dalekiego, kilkaset kilometrów dalej.

Strumień neutrin o energii 0.4 – 1 GeV produkowany jest przy użyciu wiązki protonów z synchrotronu (PS) o mocy 50 GeV zlokalizowanego w laboratorium JHF w Tokai. Wiązka protonów uderzając w tarczę węglową produkuje piony, które dalej rozpadają się na neutrina.

Dalekim detektorem w doświadczeniu T2K jest Super-Kamiokande, 50kt wodny detektor Czerenkowa. Odległość między źródłem neutrin, a dalekim detektorem wynosi 295 km, jest to odległość między JHF w Tokai a Super-Kamiokande w Kamioka. Planowany jest drugi daleki detektor Hyper-Kamiokande, będzie to 1 Mt wodny detektor Cerenkova.

W celu monitorowania wiązki neutrin w odległości 280 m od tarczy węglowej umieszczono bliski detektor ND280. Na podstawie danych z tego detektora określa się dokładny strumień neutrin wychodzący z Tokai w stronę Kamioki w funkcji energii neutrin.

W eksperymencie T2K zastosowano krótszą niż zazwyczaj w tego typu eksperymentach rurę rozpadową dla pionów. W ten sposób nieznacznie zmniejszono intensywność wiązki neutrin, ale w znaczący sposób zmniejszono procentowy udział neutrin elektronowych w wiązce. Zgodnie z teorią oscylacji neutrin po kilkuset kilometrach neutrina elektronowe w Kamioko powinny stanowić znaczący udział w wiązce neutrin. Neutrina elektronowe powstałe w Tokai są wtedy tłem dla wykrywanych w dalekim detektorze neutrin elektronowych. Typowo bez oscylacji spodziewanych jest rocznie 5000 oddziaływań neutrin mionowych w całej objętości detektora.

Skupiony strumień neutrin uzyskany jest dzięki wcześniej skupionej wiązce pionów. Są dwie metody, aby dodatkowo otrzymać wyselekcjonowaną w energiach wiązkę neutrin.

- wcześniejsza selekcja pędu pionu dzięki dipolom magnetycznym,
- technika zwana *poza osią* (ang. off-axis tuning) zastosowana tutaj. Polegającą na umieszczeniu rury rozpadowej pionu nie dokładnie na osi Tokai-Kamioka.

Kolejnym ważnym elementem analizy danych z eksperymentu jest określenie energii neutrina przy założeniu kwazi-elastycznego (ang. Quasi-elastic QE) oddziaływania. Oddziaływanie to jest dominującym procesem dla energii neutrin poniżej 1 GeV. W przypadku oddziaływania QE obserwowany jest jedynie rozproszony lepton. Na podstawie danych z detektora można zrekonstruować kierunek lotu leptonu, a stosując poniższy wzór określić energię neutrina.

$$E_\nu(\vec{q}') = \frac{m_n E_{\mu^-} - \frac{1}{2} m_\mu^2}{m_n - E_{\mu^-} + |\vec{q}'| \cos \theta_\mu} \quad (\text{A.1})$$

W powyższym wzorze m_n i m_l to masa neutronu i leptonu ($=e$ lub μ) oraz E_l , p_l i θ_l to odpowiednio energia, pęd i kąt leptonu liczony względem kierunku wiązki neutrin. Wyrowadzenie powyższego wzoru, wraz z wyszczególnieniem założeń potrzebnych do jego wyrowadzenia, znajduje się w Dodatku D.

Głównym celem eksperymentu jest zmierzenie parametrów mieszania z 1% dokładnością i Δm^2 z dokładnością lepszą niż 10^{-4}eV^2 . Dokładne pomiary pozwolą ostatecznie wykluczyć modele rozpadu neutrin oraz teorie dodatkowych wymiarów.

Eksperyment JHF-Kamioka rozpoczął pracę w 2009 roku. Ten eksperyment ma znacznie większą czułość niż inne tego typu eksperymenty z powodu wysokiej mocy akceleratorów w JHF i ogromnego detektora Super-Kamiokande.

B Czynniki fermionowy

Do obliczenia amplitudy rozpraszania (6.13) niezbędne jest obliczenie czynnika fermionowego:

$$F \left[\nu_i(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P})n(\vec{P}) \rightarrow \mu^-(\vec{q}')p(\vec{p}') \right] \cdot F \left[\pi^+(\vec{K}) \rightarrow \mu^+(\vec{k}')\nu_i(\vec{p}' + \vec{q}' - \vec{P}) \right] \quad (\text{B.1})$$

gdzie

$$\begin{aligned} & F \left[\nu_i(q_i)n(p) \rightarrow \mu^-(q')p(p') \right] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\mu(q')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)u_i(q_i) \cdot \bar{u}_p(p')\gamma_\alpha(1 - g_A\gamma_5)u_n(p), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$F \left[\pi^+(k) \rightarrow \mu^+(k')\nu_i(q_i) \right] = (-i)F_\pi \bar{u}_i(q_i)\not{k}(1 - \gamma_5)v_\mu(k'). \quad (\text{B.3})$$

Zdefiniujmy wielkość F_{ij} , którą w dalszych krokach obliczymy.

$$\begin{aligned} F_{ij} := \sum_{\text{spinach}} & [\bar{u}_\mu(q')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)u_i(q_i) \cdot \bar{u}_p(p')\gamma_\alpha(1 - g_A\gamma_5)u_n(p) \cdot \bar{u}_i(q_i)\not{k}(1 - \gamma_5)v_\mu(k')] \\ & \cdot [\bar{u}_\mu(q')\gamma^\beta(1 - \gamma_5)u_j(q_j) \cdot \bar{u}_p(p')\gamma_\beta(1 - g_A\gamma_5)u_n(p) \cdot \bar{u}_j(q_j)\not{k}(1 - \gamma_5)v_\mu(k')]^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Wykorzystując tożsamość $\sum_l u_i^l(q_i)\bar{u}_i^l(q_i) = (q_i + m_i)$ możemy przekształcić

$$\begin{aligned} F_{ij} = \sum_{\text{spinach}} & [\bar{u}_\mu(q')\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)(q_i + m_i)\not{k}(1 - \gamma_5)v_\mu(k') \cdot \bar{u}_p(p')\gamma_\alpha(1 - g_A\gamma_5)u_n(p)] \\ & \cdot [\bar{u}_\mu(q')\gamma^\beta(1 - \gamma_5)(q_j + m_j)\not{k}(1 - \gamma_5)v_\mu(k') \cdot \bar{u}_p(p')\gamma_\beta(1 - g_A\gamma_5)u_n(p)]^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Dalej możemy zapisać wyrażenie jako iloczyn śladów.

$$\begin{aligned} F_{ij} = \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha(1 - \gamma_5)(q_i + m_i)\not{k}(1 - \gamma_5)(\not{k}' - m_\mu)\not{k}(1 - \gamma_5)(q_j + m_j)\gamma^\beta(1 - \gamma_5)(q' + m_\mu) \right\} \\ \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha(1 - g_A\gamma_5)(\not{p} + m_n)\gamma_\beta(1 - g_A\gamma_5)(\not{p}' + m_p) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Zauważmy, że:

$$(1 - g_A\gamma_5)(\not{X} + m)\gamma_\mu(1 - g_A\gamma_5) \quad (\text{B.7})$$

$$= (1 - g_A\gamma_5)(\not{X} + m)(1 + g_A\gamma_5)\gamma_\mu \quad (\text{B.8})$$

$$= [(\not{X} + m) + (\not{X} + m)g_A\gamma_5 - \gamma_5(\not{X} + m) - g_A\gamma_5(\not{X} + m)g_A\gamma_5] \gamma_\mu \quad (\text{B.9})$$

$$= [(\not{X} + m) + (\not{X} + m)g_A\gamma_5 - (-\not{X} + m)g_A\gamma_5 - (-\not{X} + m)g_A^2] \gamma_\mu \quad (\text{B.10})$$

$$= [\not{X} + m + 2\not{X}g_A\gamma_5 + g_A^2\not{X} - mg_A^2] \gamma_\mu \quad (\text{B.11})$$

$$= [\not{X}(1 + g_A\gamma_5)^2 + m(1 - g_A^2)] \gamma_\mu \quad (\text{B.12})$$

Dla $g_A = 1$ powyższa tożsamość przyjmuje postać

$$(1 - \gamma_5)(\not{X} + m)\gamma_\mu(1 - \gamma_5) = 2\not{X}(1 + \gamma_5)\gamma_\mu \quad (\text{B.13})$$

stosując powyższą tożsamość dwu krotnie w pierwszym śladzie otrzymujemy.

$$F_{ij} = \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha 2q_i (1 + \gamma_5) \not{k}' - m_\mu \not{k}' 2q_j (1 + \gamma_5) \gamma^\beta (q' + m_\mu) \right\} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} & \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) (\not{p}' + m_n) \gamma_\beta (1 - g_A \gamma_5) (\not{p}' + m_p) \right\} \\ & = 4 \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \not{k}' (1 - \gamma_5) (\not{k}' - m_\mu) \not{k}' (1 - \gamma_5) q_j \gamma^\beta (q' + m_\mu) \right\} \\ & \cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) (\not{p}' + m_n) \gamma_\beta (1 - g_A \gamma_5) (\not{p}' + m_p) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Pozostałe dwa czynniki $(1 - \gamma_5)$ w pierwszym śladzie pozwalają na dalsze uproszczenia.

$$F_{ij} = 8 \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \not{k}' \not{k}' m_\mu (1 + \gamma_5) \not{k}' q_j \gamma^\beta (q' + m_\mu) \right\} \quad (\text{B.16})$$

$$\cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) (\not{p}' + m_n) \gamma_\beta (1 - g_A \gamma_5) (\not{p}' + m_p) \right\}$$

Stosując tożsamość (B.12) w drugim śladzie otrzymujemy

$$F_{ij} = 8m_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \not{k}' \not{k}' \not{k}' q_j \gamma^\beta (1 - \gamma_5) (q' + m_\mu) \right\} \quad (\text{B.17})$$

$$\cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \left[(\not{p}'(1 + g_A \gamma_5))^2 + m_n(1 - g_A^2) \right] \gamma_\beta (\not{p}' + m_p) \right\}$$

Iloczyn $\not{k}' \not{k}' \not{k}' = 2(kk')\not{k}' - m_\pi^2 \not{k}'$, co wynika wprost z relacji anytykomutacyjnej macierzy Diraca $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.

$$F_{ij} = 8m_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \left[2(kk')\not{k}' - m_\pi^2 \not{k}' \right] q_j \gamma^\beta (1 - \gamma_5) (q' + m_\mu) \right\} \quad (\text{B.18})$$

$$\cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \left[(\not{p}'(1 + g_A \gamma_5))^2 + m_n(1 - g_A^2) \right] \gamma_\beta (\not{p}' + m_p) \right\}$$

Ślad nieparzystej liczby macierzy γ równa się zero, wyrażenie na F_{ij} upraszcza się więc do

$$F_{ij} = 8m_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \left[2(kk')\not{k}' - m_\pi^2 \not{k}' \right] q_j \gamma^\beta (1 - \gamma_5) q' \right\} \quad (\text{B.19})$$

$$\cdot \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \not{p}' (1 + g_A \gamma_5)^2 \gamma_\beta \not{p}' + \gamma_\alpha m_n (1 - g_A^2) \gamma_\beta m_p \right\}$$

$$F_{ij} = 8m_\mu \left[2(kk') \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \not{k}' q_j \gamma^\beta (1 - \gamma_5) q' \right\} + m_\pi^2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha q_i \not{k}' q_j \gamma^\beta (1 - \gamma_5) q' \right\} \right] \quad (\text{B.20})$$

$$\cdot \left[(1 + g_A^2) \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \not{p}' \gamma_\beta \not{p}' \right\} + 2g_A \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \not{p}' \gamma_5 \gamma_\beta \not{p}' \right\} + m_p m_n (1 - g_A^2) \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \gamma_\beta \right\} \right]$$

Najtrudniejszy do obliczenia jest człon $\text{Tr} \left\{ q' \gamma^\alpha q_i \not{k}' q_j \gamma^\beta \gamma_5 q' \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \not{p}' \gamma_5 \gamma_\beta \not{p}' \right\}$, który zawiera iloczyn sześciu macierzy gamma z czynnikiem γ_5 . Korzystając z programów typu Mathematica z dodanym odpowiednio pakietem zawierającym algebrę macierzy Diraca możemy obliczyć ściśle wyrażenie.

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ q' \gamma^\alpha q_i \not{k}' q_j \gamma^\beta \gamma_5 q' \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \not{p}' \gamma_5 \gamma_\beta \not{p}' \right\} \\ & = 32 \left[-(kp)(p'q')(q_i q_j) + (kq_j)(pq_i)(p'q') + (q_i k)(q_j p)(p'q') \right. \\ & \left. + (kp')(pq')(q_i q_j) - (kq_j)(pq')(q_i p') - (q_i k)(pq')(p'q_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Podobnie obliczamy drugą część wyrażenia (B.20).

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \gamma_\alpha q_i \not{k} \not{q}_j \gamma_\beta q' \} \cdot \left[(1 + g_A^2) \text{Tr} \{ \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{p}' \} + m_n m_p (1 - g_A^2) \text{Tr} \{ \gamma_\alpha \gamma_\beta \} \right] = \\ = -32(1 - g_A^2) m_n m_p [(kq_i)(q_j q') + (kq_j)(q_i q') - (kq')(q_i q_j)] \\ + 32(1 + g_A^2) [-(kp)(p'q')(q_i q_j) + (kq_j)(pq_i)(p'q') + (kq_i)(pq_j)(p'q') \\ - (kp')(pq')(q_i q_j) + (kq_j)(pq')(p'q_i) + (kq_i)(pq')(p'q_j)] \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

W symbolicznym sposób możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \gamma^\alpha q_i \not{k} \not{q}_j \gamma^\beta (1 - \gamma_5) q' \} \\ \cdot \left[(1 + g_A^2) \text{Tr} \{ \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{p}' \} + 2g_A \text{Tr} \{ \gamma_\alpha \not{p} \gamma_5 \gamma_\beta \not{p}' \} + m_p m_n (1 - g_A^2) \text{Tr} \{ \gamma_\alpha \gamma_\beta \} \right] \\ = (\text{B.22}) - 2g_A \cdot (\text{B.21}) \\ = 32(1 - g_A^2) m_n m_p [(kq')(q_i q_j) - (kq_i)(q_j q') - (kq_j)(q_i q')] \\ + 32(1 - g_A)^2 (p'q') [-(kp)(q_i q_j) + (kq_j)(pq_i) + (kq_i)(pq_j)] \\ + 32(1 + g_A)^2 (pq') [-(kp')(q_i q_j) + (kq_j)(p'q_i) + (kq_i)(p'q_j)]. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Otrzymujemy:

$$F_{ij} = 8m_\mu \left[2(kk') \cdot (\text{B.23}) + m_\pi^2 \cdot (\text{B.23}, k \leftrightarrow k') \right] \quad (\text{B.24})$$

W wyrażeniu (B.20) występują jeszcze człony mieszane, tzn. iloczyn czynników, z których tylko jeden zawiera γ_5 . Takie wyrażenia są proporcjonalne do i , ponieważ wiemy, że czynnik fermionowy jest liczbą rzeczywistą, to oznacza że, w sumie muszą się redukować do zera.

Masy neutrin m_i są małe w porównaniu z pędem \vec{q}_i jaki mają. Zdefiniujemy czteropęd odpowiadający bezmasowemu neutrino.

$$q = (|\vec{q}|, \vec{q}) \quad (\text{B.25})$$

Zauważmy, że faktycznie jest to czterowektor, ponieważ przy zmianie układu odniesienia (transformacji) długość wektora \vec{q} pozostaje stała, $(q \cdot q) = \text{const} = 0$.

W pierwszym przybliżeniu, traktując neutrina jak cząstki bezmasowe, wyrażenie (B.23) znacznie upraszcza się i przyjmuje postać.

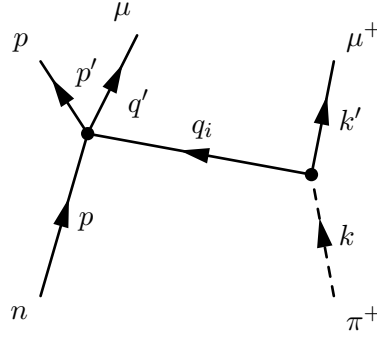
$$(\text{B.23}) = 64(kq)[(1 + g_A)^2 (p'q)(pq') + (1 - g_A)^2 (pq)(p'q') - m_n m_p (1 - g_A^2)(q'q)] \quad (\text{B.26})$$

A stąd otrzymujemy F_{ij}

$$\begin{aligned} F_{ij}^{(0)} = 512 \cdot m_\mu [2(kk')(kq) + m_\pi^2 (k'q)] \\ [(1 + g_A)^2 (p'q)(pq') + (1 - g_A)^2 (pq)(p'q') - m_n m_p (1 - g_A^2)(q'q)] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

C Propagator neutrina

Aby wyznaczyć propagator neutrina w hamiltonowskim sformułowaniu konieczne jest obliczenie kilku czynników.



Rysunek 3: Diagram uporządkowany czasowo - stan pośredni z neutrinem.

Stan pośredni zawierający neutрино

$$\langle \mu^+ \nu_i | H_I | \pi^+ \rangle = \langle 0 | b'_\mu(k') d_i^l(q_i) H_I b_\pi^\dagger(k) | 0 \rangle \quad (C.1)$$

$$= -i \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \int d^3x \langle 0 | b'_\mu(k') d_i^l(q_i) \bar{\nu}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu(x) \cdot \partial_\alpha \pi b_\pi^\dagger(k) | 0 \rangle \quad (C.2)$$

$$= -i \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} U_i^* \int d^3x f_\mu(k', x) f_i(q_i, x) \bar{v}_i^l(q_i) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u'_\mu(k') \partial_\alpha f_\pi(k, x) \quad (C.3)$$

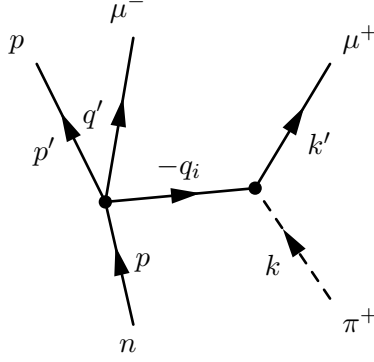
$$= \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} U_i^* \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_\pi} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{k}) \cdot \bar{u}_i^l(q_i) \not{k}' (1 - \gamma_5) v'_\mu(k') \quad (C.4)$$

$$\langle \mu^- p | H_I | \nu_i n \rangle = \langle 0 | b'_\mu(k') b_p^{s'}(p') H_I b_i^{\dagger l}(q_i) b_n^{\dagger s}(p) | 0 \rangle \quad (C.5)$$

$$= \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C \int d^3x \langle 0 | b'_\mu(k') b_p^{s'}(p') \bar{p}(x) \gamma^\alpha (1 - g_A \gamma_5) n(x) \cdot \bar{\mu}(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu(x) b_i^{\dagger l}(q_i) b_n^{\dagger s}(p) | 0 \rangle \quad (C.6)$$

$$= \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C U_i \int d^3x f_\mu^*(q', x) f_p^{s'}(p', x) f_i(q_i, x) f_n(p, x) \cdot \bar{v}_p^{s'}(p') \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) v_n^s(p) \cdot \bar{v}'_\mu(q') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_i^l(q_i) \quad (C.7)$$

$$= \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C U_i \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_n} \cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}_i + \vec{p} - \vec{q}' - \vec{p}') \cdot \bar{u}_p^{s'}(p') \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) u_n^s(p) \cdot \bar{u}'_\mu(q') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_i^l(q_i) \quad (C.8)$$



Rysunek 4: Diagram uporządkowany czasowo - stan pośredni z antyneutrinem.

Stan pośredni zawierający antyneutrino

$$\langle \bar{\nu}_i \mu^- p | H_I | n \rangle = \langle 0 | b_i^l(-q_i) d_\mu^{l'}(q') d_p^{s'}(p') H_I d_n^{\dagger s}(p) | 0 \rangle \quad (\text{C.9})$$

$$= \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C \int d^3x \langle 0 | b_i^l(-q_i) d_\mu^{l'}(q') d_p^{s'}(p') \bar{\nu}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu(x) \quad (\text{C.10})$$

$$\cdot \bar{n}(x) \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) p(x) d_n^{\dagger s}(p) | 0 \rangle \quad (\text{C.11})$$

$$= \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C U_i \int d^3x f_i^*(-q_i, x) f_\mu^{l'}(q', x) f_p^{s'}(p', x) f_n(p, x) \cdot \bar{u}_\mu^{l'}(q') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_i^l(-q_i) \cdot \bar{u}_p^{s'}(p') \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) u_n^s(p) \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C U_i \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_n} \quad (\text{C.13})$$

$$\cdot (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}_i + \vec{p} - \vec{q}' - \vec{p}') \cdot \bar{v}_i^l(-q_i) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\mu^{l'}(q') \cdot \bar{u}_p^{s'}(p') \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) u_n^s(p) \quad (\text{C.14})$$

$$\langle \mu^+ | H_I | \pi^+ \bar{\nu}_i \rangle = \langle 0 | b_\mu^{l'}(k') H_I b_\pi^\dagger(k) b_i^{l'}(-q_i) | 0 \rangle \quad (\text{C.15})$$

$$= -i \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \int d^3x \langle 0 | b_\mu^{l'}(k') \bar{\mu}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu(x) \cdot \partial_\alpha \pi b_\pi^\dagger(k) b_i^{l'}(-q_i) | 0 \rangle \quad (\text{C.16})$$

$$= -i \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} U_i^* \int d^3x f_\mu^{l'}(k', x) f_i(-q_i, x) \bar{u}_\mu^{l'}(k') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_i^l(-q_i) \partial_\alpha f_\pi(k, x) \quad (\text{C.17})$$

$$= \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} U_i^* \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_\pi} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{k}) \cdot \bar{v}_\mu^{l'}(k') \not{k} (1 - \gamma_5) v_i^l(-q_i) \quad (\text{C.18})$$

Propagator Feynmana Sumując czynniki od diagramów uporządkowanych czasowo otrzymujemy propagator neutrina o masie m_i , uwzględniający zarówno propagację neutrina jaki i antyneutrina. W dalszych przekształceniach skorzystamy dodatkowo z zasady zachowania

energii w całym procesie, $q^0 := E_{\mu^-} + E_p - E_n = E_\pi - E_{\mu^+}$.

$$\begin{aligned}
& \sum_i \langle \mu^- p | H_I | \nu_i n \rangle \frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} \langle \mu^+ \nu_i | H_I | \pi^+ \rangle \\
& + \sum_i \langle \mu^+ | H_I | \pi^+ \bar{\nu}_i \rangle \frac{1}{E_n - E_i - E_{\mu^-} - E_p + i\epsilon} \langle \bar{\nu}_i \mu^- p | H_I | n \rangle \\
= & \sum_i \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \frac{G_F}{2} \cos \vartheta_C U_i U_i^* \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^+}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_\pi} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mu^-}} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_n} \\
& \frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}' + \vec{q}_i - \vec{k}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}_i + \vec{p} - \vec{q}' - \vec{p}') \\
& \cdot \bar{u}_p^{s'}(p') \gamma_\alpha (1 - g_A \gamma_5) u_n^s(p) \cdot \bar{u}_\mu^l(q') \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) D_\nu \not{k} (1 - \gamma_5) v_\mu^l(k')
\end{aligned} \tag{C.19}$$

$$D_\nu = \frac{1}{2E_i} \left(\frac{u_i^l(q_i) \cdot \bar{u}_i^l(q_i)}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} - \frac{v_i^l(-q_i) \cdot \bar{v}_i^l(-q_i)}{E_n - E_i - E_{\mu^-} - E_p + i\epsilon} \right) \tag{C.20}$$

$$= \frac{1}{2E_i} \left(\frac{\gamma^0 E_i - \vec{\gamma} \vec{q}_i + m_i}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} - \frac{\gamma^0 E_i + \vec{\gamma} \vec{q}_i - m_i}{E_n - E_i - E_{\mu^-} - E_p + i\epsilon} \right) \tag{C.21}$$

$$= \frac{1}{2E_i} \left(\frac{\gamma^0 E_i - \vec{\gamma} \vec{q}_i + m_i}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i + i\epsilon} - \frac{\gamma^0 E_i + \vec{\gamma} \vec{q}_i - m_i}{E_{\mu^+} - E_\pi - E_i + i\epsilon} \right) \tag{C.22}$$

$$= \frac{1}{2E_i} \left(\frac{\gamma^0 E_i - \vec{\gamma} \vec{q}_i + m_i}{q_i^0 - E_i + i\epsilon} - \frac{\gamma^0 E_i + \vec{\gamma} \vec{q}_i - m_i}{-q_i^0 - E_i + i\epsilon} \right) \tag{C.23}$$

$$= \frac{1}{2E_i} \left(\frac{\gamma^0 E_i - \vec{\gamma} \vec{q}_i + m_i}{q_i^0 - E_i + i\epsilon} - \frac{-\gamma^0 E_i - \vec{\gamma} \vec{q}_i + m_i}{q_i^0 + E_i - i\epsilon} \right) \tag{C.24}$$

$$= \frac{1}{2E_i} \left(\frac{\gamma^0 (E_i - q_i^0) + \not{q}_i + m_i}{q_i^0 - E_i + i\epsilon} - \frac{-\gamma^0 (E_i + q_i^0) + \not{q}_i + m_i}{q_i^0 + E_i - i\epsilon} \right) \tag{C.25}$$

$$= \frac{1}{2E_i} \left(\frac{\not{q}_i + m_i}{q_i^0 - E_i + i\epsilon} - \frac{\not{q}_i + m_i}{q_i^0 + E_i - i\epsilon} \right) \tag{C.26}$$

$$= \frac{\not{q}_i + m_i}{2E_i} \left(\frac{1}{q_i^0 - E_i + i\epsilon} - \frac{1}{q_i^0 + E_i - i\epsilon} \right) \tag{C.27}$$

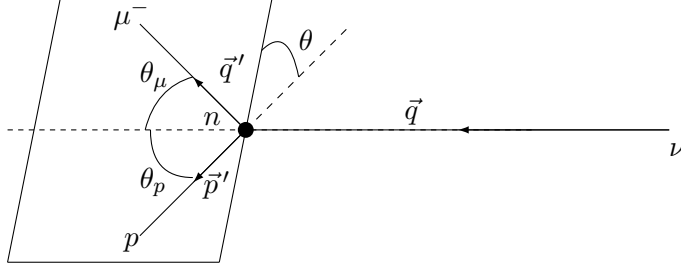
$$= \frac{\not{q}_i + m_i}{2E_i} \frac{2E_i}{(q_i^0)^2 - E_i^2 - i\epsilon'} \tag{C.28}$$

$$= \frac{\not{q}_i + m_i}{q_i^2 - m_i^2 - i\epsilon'} \tag{C.29}$$

Wyrażenie (C.29) jest wzorem na propagator ν_i o masie m_i zgodnym ze znanymi regułami Feynmana. Jak zauważyliśmy w obliczeniach, wzór ten zawiera wkład zarówno od neutrina jak i antyneutrina. W obecności gaussowskich paczek falowych wkład od antyneutrina jest zaniedbywalny.

D Rekonstrukcja E_ν

Rozpatrzmy proces, w którym bezmasowe neutrino (lub ultrarelatywistyczne) o energii E_ν zderza się z spoczywającym neutronem o masie m_n . W wyniku rozpraszania powstaje μ^- (o masie m_μ) rozproszony pod kątem θ_μ do wiązki neutrin oraz proton p (o masie m_p) pod kątem θ_p .



Rysunek 5: Przyjęte oznaczenia kątów w procesie

Ponieważ proces $\nu n \rightarrow \mu^- p$ jest płaski (patrz rys. 5), zasadę zachowania czteropędu możemy zapisać

$$\begin{pmatrix} E_{\mu^-} \\ |\vec{q}'| \cos \theta_\mu \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu \sin \theta \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_p \\ |\vec{p}'| \cos \theta_p \\ -|\vec{p}'| \sin \theta_p \sin \theta \\ -|\vec{p}'| \sin \theta_p \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\nu \\ E_\nu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

gdzie $E_{\mu^-} = \sqrt{|\vec{q}'|^2 + m_\mu^2}$ i $E_p = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_p^2}$.

Ponieważ w doświadczeniu mierzony jest jedynie rozproszony μ^- (znane E_μ, θ_μ), to jest to de facto układ trzech równań z trzema niewiadomymi E_ν, E_p i θ_p . Interesuje nas znalezienie wyrażenia na energię neutrina, E_ν . Wyznaczenie E_ν jest możliwe tylko gdy zaniedbamy masę neutrina, $m_\nu = 0$.

$$\begin{cases} m_n + E_\nu - E_\mu = E_p = \sqrt{m_p^2 + |\vec{p}'|^2} \\ E_\nu - |\vec{q}'| \cos \theta_\mu = |\vec{p}'| \cos \theta_p \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu \sin \theta = |\vec{p}'| \sin \theta_p \sin \theta \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu \cos \theta = |\vec{p}'| \sin \theta_p \cos \theta \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Podnosząc równania do kwadratu i wstawiając trzecie do drugiego otrzymujemy zależność na \vec{p}'^2 .

$$(E_\nu - |\vec{q}'| \cos \theta_\mu)^2 = |\vec{p}'|^2 \cos^2 \theta_p = |\vec{p}'|^2 - |\vec{p}'|^2 \sin^2 \theta_p = |\vec{p}'|^2 - |\vec{q}'|^2 \sin^2 \theta_p \quad (\text{D.3})$$

$$\vec{p}'^2 = E_\nu^2 - 2E_\nu |\vec{q}'| \cos \theta_\mu + \vec{q}'^2 \cos^2 \theta_\mu + \vec{q}'^2 \sin^2 \theta_\mu \quad (\text{D.4})$$

Łącząc otrzymaną zależność z pierwszym równaniem z (D.2) otrzymujemy energię neutrina w zależności od zmierzonego mionu - energię zrekonstruowanego neutrina.

$$E_\nu(\vec{q}') = \frac{m_n E_{\mu^-} - \frac{1}{2}(m_\mu^2 - m_p^2 + m_n^2)}{m_n - E_{\mu^-} + |\vec{q}'| \cos \theta_\mu} \quad (\text{D.5})$$

E Iloczyn mianowników energetycznych

Iloczyn mianowników energetycznych możemy przekształcić do innej postaci.

$$\frac{1}{E_\pi - E_{\mu^+} - E_i \pm i\epsilon} =: \frac{1}{\Delta_i \pm i\epsilon} = \frac{\Delta_i}{\Delta_i^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{\Delta_i^2 + \epsilon^2} \quad (\text{E.1})$$

Przekształcenie to jest analogiczne do wzoru w przypadku, gdy $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\frac{1}{\Delta_i \pm i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{P} \frac{1}{\Delta_i} \mp i\pi\delta(\Delta_i) \quad (\text{E.2})$$

W naszym jednak przypadku ϵ jest dobrze określoną liczbą, nie dąży więc do zera. Dzięki temu istnieje możliwość porównania jej z innymi wielkościami.

W pracy [4] ϵ jest wielkością ściśle zależną od konstrukcji stanu wejściowego, czyli modelu wiązki. Na podstawie cytowanej pracy ϵ powiązać można z długością rury rozpadowej pionu, grubością tarczy w którą uderzają protony tworząc piony, albo długością akceleratora protonów. Zagadnienia budowy wiązki jest skomplikowanym działem fizyki wysokich energii, i nie będziemy tutaj omawiać tego zagadnienia. Przyjmujemy, że długością charakterystyczną związaną z ϵ -em jest $d \approx 1\text{m}$.

$$\epsilon = \frac{\hbar c}{d} \approx \frac{200\text{MeV fm}}{1\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7}\text{eV} \quad (\text{E.3})$$

Iloczyn mianowników możemy zapisać w postaci sumy trzech składników:

$$\frac{1}{\Delta_i - i\epsilon} \frac{1}{\Delta_j + i\epsilon} = \frac{\Delta_i \Delta_j}{(\Delta_i^2 + \epsilon^2)(\Delta_j^2 + \epsilon^2)} + \frac{i\epsilon(\Delta_i - \Delta_j)}{(\Delta_i^2 + \epsilon^2)(\Delta_j^2 + \epsilon^2)} + \frac{\epsilon^2}{(\Delta_i^2 + \epsilon^2)(\Delta_j^2 + \epsilon^2)} \quad (\text{E.4})$$

Aby zbadać, który człon sumy ma dominujący wkład porównajmy ϵ z $\Delta_i - \Delta_j$.

Na podstawie dotychczas przeprowadzonych doświadczeń możemy oszacować różnicę energii neutrin o różnych masach. Typowa energia neutrin w doświadczeniu T2K wynosi 450MeV .

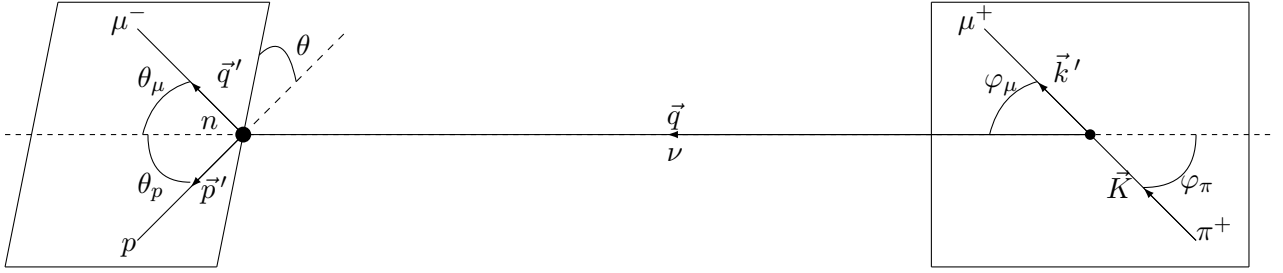
$$\Delta_i - \Delta_j = E_i - E_j \approx \frac{\Delta m_{ij}^2}{2|\vec{q}|} < \frac{3 \cdot 10^{-3}\text{eV}^2}{2 \cdot 450\text{MeV}} = 3.3 \cdot 10^{-12}\text{eV} \quad (\text{E.5})$$

Porównując obie wielkości widzimy, że $(\Delta_i - \Delta_j) \ll \epsilon$, a co za tym idzie człon urojony jest znacznie mniejszy od trzeciego członu w (E.4).

Aby porównać pierwszy i trzeci człon (E.4) warto sporządzić odpowiedni wykres. Wybierzemy w tym celu poniższy układ współrzędnych (E.6) i wyznaczmy jawną postać funkcji stojących w (E.4).

$$P = \begin{pmatrix} m_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q' = \begin{pmatrix} E_{\mu^-} \\ |\vec{q}'| \cos \theta_\mu \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu \sin \theta \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu \cos \theta \end{pmatrix} \quad p' = \begin{pmatrix} E_p \\ |\vec{p}'| \cos \theta_p \\ -|\vec{p}'| \sin \theta_p \sin \theta \\ -|\vec{p}'| \sin \theta_p \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$K = \begin{pmatrix} E_\pi \\ |\vec{K}| \cos \varphi_\pi \\ |\vec{K}| \sin \varphi_\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad k' = \begin{pmatrix} E_{\mu^+} \\ |\vec{k}'| \cos \varphi_\mu \\ |\vec{k}'| \sin \varphi_\mu \\ 0 \end{pmatrix}$$



Rysunek 6: Przyjęte oznaczenia kątów w procesie.

Wykorzystując zasadę zachowania całkowitego pędu możemy wyznaczyć pewne zmienne przy pomocy wprowadzonej wielkości $|\vec{q}'|$.

$$\begin{cases} |\vec{K}| \sin \varphi_\pi = |\vec{k}'| \sin \varphi_\mu \\ |\vec{q}'| \sin \theta_\mu = |\vec{p}'| \sin \theta_p \\ |\vec{q}'| \cos \theta_\mu + |\vec{p}'| \cos \theta_p = |\vec{q}| = |\vec{K}| \cos \varphi_\pi - |\vec{k}'| \cos \varphi_\mu \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Korzystając z układu równań możemy wyznaczyć $|\vec{q}'| = |\vec{K}| \cos \varphi_\pi - |\vec{k}'| \cos \varphi_\mu$ nie używając kątów φ_π i φ_μ .

$$|\vec{K}| \cos \varphi_\pi - |\vec{q}'| = |\vec{k}'| \cos \varphi_\mu \quad (\text{E.8})$$

$$(|\vec{K}| \cos \varphi_\pi)^2 - 2|\vec{q}'||\vec{K}| \cos \varphi_\pi + |\vec{q}'|^2 = (|\vec{k}'| \cos \varphi_\mu)^2 \quad (\text{E.9})$$

$$(|\vec{K}| \cos \varphi_\pi)^2 - 2|\vec{q}'||\vec{K}| \cos \varphi_\pi + |\vec{q}'|^2 = |\vec{k}'|^2 - (|\vec{k}'| \sin \varphi_\mu)^2 \quad (\text{E.10})$$

$$(|\vec{K}| \cos \varphi_\pi)^2 - 2|\vec{q}'||\vec{K}| \cos \varphi_\pi + |\vec{q}'|^2 = |\vec{k}'|^2 - (|\vec{K}| \sin \varphi_\pi)^2 \quad (\text{E.11})$$

$$|\vec{q}'|^2 - 2|\vec{q}'||\vec{K}| \cos \varphi_\pi + |\vec{K}|^2 - |\vec{k}'|^2 = 0 \quad (\text{E.12})$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe dostajemy:

$$|\vec{q}'| = |\vec{K}| \cos \varphi_\pi - \sqrt{|\vec{k}'|^2 - |\vec{K}|^2 \sin^2 \varphi_\pi} \quad (\text{E.13})$$

Na powyższą równość możemy patrzeć dwojako, jako równanie na $|\vec{q}'|$ lub też $|\vec{k}'|$, dlatego energię mionu μ^+ możemy traktować jako funkcję $|\vec{q}'|$, $E_{\mu^+}(|\vec{q}'|)$.

Analogicznie możemy postąpić w przypadku $|\vec{q}'| = |\vec{q}'| \cos \theta_\mu + |\vec{p}'| \cos \theta_p$.

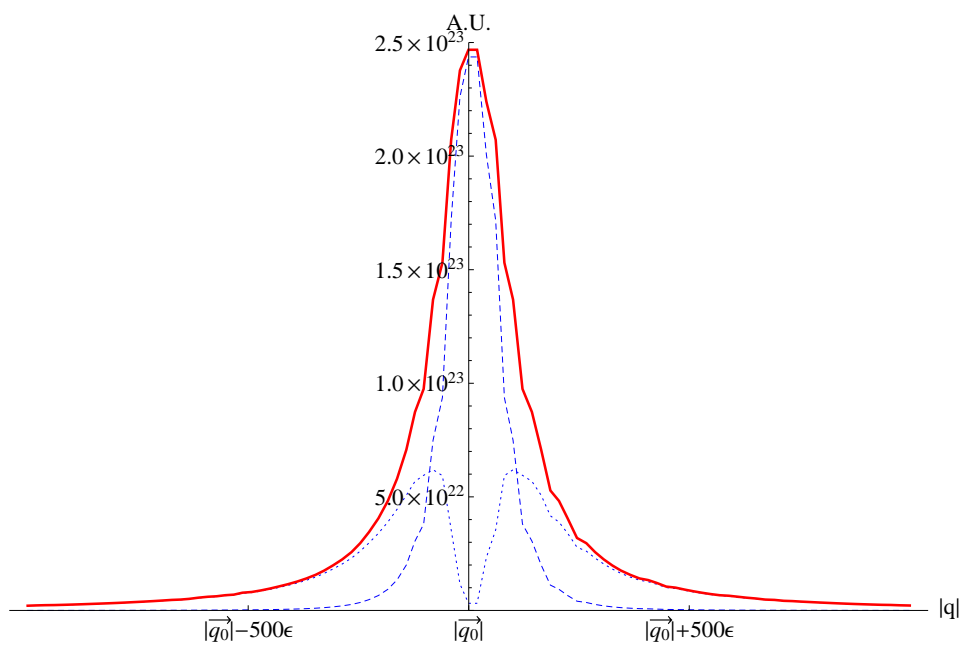
$$|\vec{q}'| = |\vec{q}'| \cos \theta_\mu - \sqrt{|\vec{p}'|^2 - |\vec{q}'|^2 \sin^2 \theta_\mu} \quad (\text{E.14})$$

Wykreślenie pierwszego i drugiego członu, Wykres 7 uświadamia nam, że oba czynniki są porównywalnej wielkości, a w sumie dają pik skupiony wokół długości pędu $|\vec{q}'_0|$ - pędu dla którego neutrino bezmasowe było by na powłoce energii.

$$E_\pi - E_{\mu^+}(\vec{q}'_0) - |\vec{q}'_0| = 0 \quad (\text{E.15})$$

Z wykresu 7. odczytujemy jeszcze jedną ważną informację, pik wokół $|\vec{q}'_0|$ jest wąski, o szerokości kilkuset ϵ . Ponieważ szerokość ta jest o wiele rzędów wielkości mniejsza niż rozdzielczość aparatury pomiarowej mianownik energetyczny możemy przybliżyć przez Deltę Diraca skupioną w $|\vec{q}'_0|$.

$$\frac{1}{\Delta_i - i\epsilon} \frac{1}{\Delta_j + i\epsilon} \propto \delta(|\vec{q}'| - |\vec{q}'_0|) = \delta(E_\pi - E_{\mu^+}(\vec{q}') - |\vec{q}'|) \quad (\text{E.16})$$



Rysunek 7: Przerwana linia pokazuje pierwszy człon w wyrażeniu (E.4), kropkowana trzeci, a ciągła sumę. Drugi człon wyrażenia (E.4), nie narysowany tutaj, jest mniejszy o parę rzędów wielkości od pierwszego i trzeciego członu.

Literatura

- [1] S.H. Ahn et al. Detection of accelerator produced neutrinos at a distance of 250-km. *Phys.Lett.*, B511:178–184, 2001.
- [2] Y. Itow et al. The JHF-Kamioka neutrino project. pages 239–248, 2001.
- [3] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo. Lepton mixing and the *solar neutrino puzzle*. *Comments Nucl. Part. Phys.*, 7:149–152, 1977.
- [4] M. Gell-Mann and M. L. Goldberger. The formal theory of scattering. *Phys. Rev.*, 91:398–408, 1953.
- [5] Evgeny Kh. Akhmedov and Joachim Kopp. Neutrino oscillations: Quantum mechanics vs. quantum field theory. *JHEP*, 1004:008, 2010.
- [6] K. Nakamura. Particle data group. *J. Phys.*, G37:075021, 2010.
- [7] J. Rich. The Quantum mechanics of neutrino oscillations. *Phys. Rev.*, D48:4318–4325, 1993.
- [8] C. Giunti, C.W. Kim, J.A. Lee, and U.W. Lee. On the treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigenstates. *Phys.Rev.*, D48:4310–4317, 1993.
- [9] W. Grimus and P. Stockinger. Real oscillations of virtual neutrinos. *Phys.Rev.*, D54:3414–3419, 1996.
- [10] B. Kayser. On the Quantum Mechanics of Neutrino Oscillation. *Phys. Rev.*, D24:110, 1981.
- [11] M. H. Ahn et al. Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment. *Phys.Rev.*, D74:072003, 2006.
- [12] D.G. Michael et al. Observation of muon neutrino disappearance with the MINOS detectors and the NuMI neutrino beam. *Phys.Rev.Lett.*, 97:191801, 2006.
- [13] P. Adamson et al. Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam. *Phys.Rev.Lett.*, 101:131802, 2008.
- [14] M. Apollonio et al. Limits on neutrino oscillations from the CHOOZ experiment. *Phys.Lett.*, B466:415–430, 1999.
- [15] K. Eguchi et al. First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance. *Phys.Rev.Lett.*, 90:021802, 2003.
- [16] M. Gell-Mann and M Levy. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, 16:705, 1960.
- [17] S. Weinberg. Effective chiral Lagrangians for nucleon - pion interactions and nuclear forces. *Nucl.Phys.*, B363:3–18, 1991.
- [18] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic quantum fields*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [19] R. P. Feynman. An operator calculus having applications in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 84:108–128, 1951.

- [20] Inc. Wolfram Research. *Mathematica Edition: Version 8.0*. Wolfram Research, Inc., 2010.
- [21] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys.Rev.Lett.*, 81:1562–1567, 1998.