Kolokwium II z QFT

Grzegorz Gil i Arkadiusz Trawiński

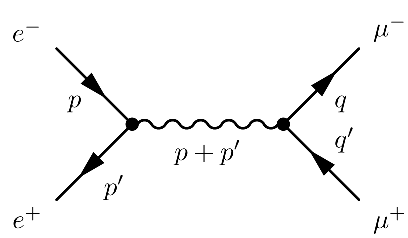
23 kwietnia 2010 roku

Spis treści

1 Rozpraszanie $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

1.1 Diagram Feynmana

W wiodącym rzędzie w rachunku zaburzeń istnieje dokładnie jeden diagram Feynmana dający wkład do procesu $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ w QED,



gdzie p, p' to czteropędy odpowiednio elektronu i pozytonu, a q, q' to czteropędy odpowiednio mionu i antymionu.

1.2 Amplituda rozpraszania

Z powyższego diagramu, w cechowaniu Feynmana, możemy odczytać następujące wyrażenie na amplitudę rozpraszania.

$$-i\mathcal{M} = \bar{v}(p', s_2) ie\gamma^\mu u(p, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p+p')^2 + i\epsilon} \bar{U}(q, s_3) ie\gamma^\nu V(q', s_4) \tag{1}$$

$$= \frac{ie^2}{(p+p')^2 + i\epsilon} \bar{v}(p', s_2)\gamma^\mu u(p, s_1)\bar{U}(q, s_3)\gamma_\nu V(q', s_4) \tag{2}$$

1.3 Niezmienniczy element macierzowy

Uśredniając $|\mathcal{M}|^2$ po spinach cząstek wchodzących i sumując po spinach cząstek wychodzących otrzymujemy poniższe wyrażenie na niezmienniczy element macierzowy. Przyjęto oznaczenie na masę elektronu m oraz M na masę mionu.

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \operatorname{Tr}\left\{\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p}' - m))\right\} \operatorname{Tr}\left\{\gamma_\mu(\not{q}' - M)\gamma^\nu(\not{q} + M))\right\} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \operatorname{Tr}\left\{\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu \not{p}' - m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right\} \operatorname{Tr}\left\{\gamma_\mu \not{q}'\gamma_\nu \not{q} - M^2\gamma_\mu\gamma_\nu\right\} \tag{4}$$

$$= 4\frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \left\{p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - g^{\mu\nu}\left[(pp') + m^2\right]\right\} \left\{q'_\mu q_\nu + q'_\nu q_\mu - g_{\mu\nu}\left[(qq') + M^2\right]\right\} \tag{5}$$

$$= 8\frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \left\{(pq')(p'q) + (pq)(p'q') - (pp')\left[(qq') + M^2\right] - (qq')\left[(pp') + m^2\right]\right.$$

$$\left. +2\left[(pp') + m^2\right]\left[(qq') + M^2\right]\right\} \tag{6}$$

$$= 8\frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \left\{(pq')(p'q) + (pq)(p'q') + (pp')M^2 + (qq')m^2 + 2m^2M^2\right\} \tag{7}$$

1.4 Różniczkowy przekrój czynny

W celu wygodnego opisu procesu zderzenia pary e^-e^+ będziemy posługiwać się układem CMS. Kinematyka tego procesu została opisana w dodatku A. Wynika z niej, że niezmienniczy element macierzowy możemy zapisać jako funkcję energii padającego elektronu E oraz kąta θ, jaki tworzą między sobą wektory pędu padającego elektronu i produkowanego mionu.

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 8\frac{e^4}{(p+p')^4} \left\{(pq')(p'q) + (pq)(p'q') + (pp')M^2 + (qq')m^2 + 2m^2M^2\right\} \tag{8}$$

$$= 8\frac{e^4}{(2E)^4} \left\{(E^2 - \sqrt{E^2 - m^2}\sqrt{E^2 - M^2}\cos\theta)^2 + (E^2 + \sqrt{E^2 - m^2}\sqrt{E^2 - M^2}\cos\theta)^2\right.$$

$$\left. + (2E^2 - m^2)M^2 + (2E^2 - M^2)m^2 + 2m^2M^2\right\} \tag{9}$$

$$= 8\frac{e^4}{(2E)^4} \left\{2E^4 + (E^2 - m^2)(E^2 - M^2)\cos^2\theta + 2E^2(m^2 + M^2)\right\} \tag{10}$$

$$= \frac{e^4}{2} \left\{2 + (1 - \frac{m^2}{E^2})(1 - \frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta + 2\frac{m^2 + M^2}{E^2}\right\} \tag{11}$$

Stosując wzór na różniczkowy przekrój czynny w układzie CMS wyznaczony w dodatku B otrzymujemy.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 64E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}}|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 64E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}}\frac{e^4}{2}\left\{2+(1-\frac{m^2}{E^2})(1-\frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta + 2\frac{m^2+M^2}{E^2}\right\} \tag{13}$$

$$= \frac{e^4}{512\pi^2 E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}}\left\{2+(1-\frac{m^2}{E^2})(1-\frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta + 2\frac{m^2+M^2}{E^2}\right\} \tag{14}$$

1.5 Całkowity przekrój czynny

Całkując różniczkowy przekrój czynny po $\mathrm{d}\Omega$ dostajemy wyrażenie na całkowity przekrój czynny

$$\sigma = \int\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\cos\theta \tag{15}$$

$$= \frac{e^4}{256\pi E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}}\int\left\{2+(1-\frac{m^2}{E^2})(1-\frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta + 2\frac{m^2+M^2}{E^2}\right\}\mathrm{d}\cos\theta \tag{16}$$

$$= \frac{e^4}{128\pi E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}}\left\{2+\frac{1}{3}(1-\frac{m^2}{E^2})(1-\frac{M^2}{E^2}) + 2\frac{m^2+M^2}{E^2}\right\} \tag{17}$$

2 Rozparaszanie $e^+e^- \rightarrow \tilde{\mu}^+\tilde{\mu}^-$

2.1 Reguła Feynmana

Lagranżjan dla teorii opisującej oddziaływanie z polem elektromagnetycznym elektronów i cząstek skalarnych $\tilde{\mu}^\pm$ o takiej samej masie i ładunku co miony jest poniższej postaci.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_e(i\not{D} - m)\Psi_e + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - M^2\phi^*\phi \tag{18}$$

Gdzie D_μ jest pochodną kowariantą zdefiniowaną wyrażeniem:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{19}$$

Część tego lagranżjanu odpowiadająca za oddziaływanie jest więc równa:

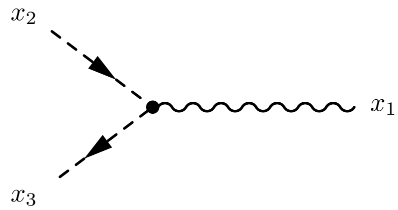
$$\mathcal{L}_{int} = eA_\mu\bar{\Psi}_e\gamma^\mu\Psi_e + ie\left\{A_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - A_\mu\phi\partial^\mu\phi^*\right\} + e^2A_\mu\phi^*A^\mu\phi. \tag{20}$$

Znajdźmy regułę Feynmana związaną z wierzchołkiem $\tilde{\mu}^+\tilde{\mu}^-A_\mu$. W tym celu poszukajmy wkładu do trzypunktowej funkcji Greena dla pól $\tilde{\mu}^+$, $\tilde{\mu}^-$ i A_ν odpowiadającej diagramowi poniższej postaci.

Od tego miejsca zaniedbujemy oddziaływanie z elektronem, ponieważ nie wnosi ono żadnego wkładu do powyższego diagramu. Funkcjonał generujący dla swobodnej teorii opisującej cząstki $\tilde{\mu}^\pm$ i pole elektromagnetyczne jest postaci:

$$W_0[J] = exp\left\{i\int \mathrm{d}^4u\mathrm{d}^4v J_+(u)G(u-v)J_-(v) + \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4u\mathrm{d}^4v J_\alpha(u)D^{\alpha\beta}(u-v)J_\beta(v)\right\}, \tag{21}$$

gdzie $G(u-v) = \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(u-v)}}{k^2-M^2+i\epsilon}$ to propagator pola skalarnego, a $D^{\alpha\beta}(u-v) = \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{g^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}e^{-ik(u-v)}$ to propagator pola A_μ.



Rysunek 1: Wierzchołek oddziaływania $\tilde{\mu}^+$, $\tilde{\mu}^-$ i A_ν.

Wkład do działania odpowiadający oddziaływaniu $\tilde{\mu}^+\tilde{\mu}^- A_\mu$ jest równy

$$S_{int} = \int \mathrm{d}^4 y (ie) \left\{ A_\mu(y)\phi^*(y)\partial^\mu_y \phi(y) - A_\mu(y)\phi(y)\partial^\mu_y \phi^*(y) \right\}. \tag{22}$$

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń fragment funkcjonału generującego naszej teorii, który daje niezerowy wkład do rozważanej przez nas funkcji Greena jest postaci

$$W[J] = \exp(iS_{int})W_0[J] \approx (1 + iS_{int})W_0[J]. \tag{23}$$

Pomijając wkłady związane z brakiem oddziaływań (odpowiadające $1 \cdot W_0[J]$) otrzymujemy:

$$W[J] = i(ie) \int \mathrm{d}^4 y \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J^\mu(y)} \left[\frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \partial^\mu_{y_+} \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} - \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} \partial^\mu_{y_-} \frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \right] W_0[J], \tag{24}$$

gdzie na końcu obliczeń podstawimy $y = y_- = y_+$.
Pamiętając, że na końcu poniższego rachunku podstawimy $J^\nu = J_+ = J_- = 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
G^{(3)}_\nu(x_1,x_2,x_3) &= \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J^\nu(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_+(x_2)} \frac{\delta}{\delta J_-(x_3)} W[J] \bigg|_{J^\nu = J_+ = J_- = 0} && (25)\\
&= \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J^\nu(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_+(x_2)} \frac{\delta}{\delta J_-(x_3)} \\
&\times i(ie) \int \mathrm{d}^4 y \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J^\mu(y)} \left[\frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \partial^\mu_{y_+} \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} - \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} \partial^\mu_{y_-} \frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \right] W_0[J] && (26)\\
&= \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J^\nu(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_+(x_2)} \frac{\delta}{\delta J_-(x_3)} \\
&\times i(ie) \int \mathrm{d}^4 y \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J^\mu(y)} \left[\frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \partial^\mu_{y_+} \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} - \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} \partial^\mu_{y_-} \frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \right] \\
&\times \frac{1}{3!} \left\{ i \int \mathrm{d}^4 u \mathrm{d}^4 v J_+(u) G(u-v) J_-(v) - \frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 u \mathrm{d}^4 v J^\alpha(u) D_{\alpha\beta}(u-v) J^\beta(v) \right\}^3 && (27)\\
&= e \frac{\delta}{\delta J^\nu(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_+(x_2)} \frac{\delta}{\delta J_-(x_3)} \int \mathrm{d}^4 y \frac{1}{3!} 3 \cdot 2 \left(-\frac{i}{2}\right) \int \mathrm{d}^4 v \left[D_{\mu\rho}(y-v) J^\rho(v) + J^\rho(v) D_{\rho\mu}(v-y) \right] \\
&\times i \left\{ \frac{\delta}{\delta J_-(y_-)} \partial^\mu_{y_+} \int \mathrm{d}^4 v G(y_+ - v) J_-(v) - \frac{\delta}{\delta J_+(y_+)} \partial^\mu_{y_-} \int \mathrm{d}^4 u J_+(u) G(u - y_-) \right\} \\
&\times \left\{ i \int \mathrm{d}^4 u \mathrm{d}^4 v J_+(u) G(u-v) J_-(v) - \frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4 u \mathrm{d}^4 v J^\alpha(u) D_{\alpha\beta}(u-v) J^\beta(v) \right\}. && (28)
\end{aligned}$$

Z wyrażenia (28) ograniczamy się tylko do członów odpowiadających diagramowi 1.

$$
\begin{aligned}
G^{(3)}_\nu(x_1,x_2,x_3)\Big|_{\tilde\mu^+\tilde\mu^- A_\nu} &= ie\frac{\delta}{\delta J_+(x_2)}\frac{\delta}{\delta J_-(x_3)}\int \mathrm{d}^4y D_{\nu\mu}(x_1-y) \\
&\times\Big\{\partial^\mu_{y_+}\int \mathrm{d}^4v G(y_+-v)J_-(v)\int \mathrm{d}^4u J_+(u)G(u-y_-) \\
&-\partial^\mu_{y_-}\int \mathrm{d}^4u J_+(u)G(u-y_-)\int \mathrm{d}^4v G(y_+-v)J_-(v)\Big\} && (29) \\
&= ie\int \mathrm{d}^4y D_{\nu\mu}(x_1-y)\Big\{\partial^\mu_{y_+}G(y_+-x_3)G(x_2-y_-)-\partial^\mu_{y_-}G(x_2-y_-)G(y_+-x_3)\Big\} && (30) \\
&= e\int\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4y D_{\mu\nu}(x_1-y)(k_2+k_3)^\mu\frac{e^{-ik_3(y-x_3)}e^{-ik_2(x_2-y)}}{(k_3^2-M^2+i\epsilon)(k_2^2-M^2+i\epsilon)} && (31) \\
&= e\int\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}(k_2+k_3)^\mu\frac{e^{ik_3x_3}e^{-ik_2x_2}}{(k_3^2-M^2+i\epsilon)(k_2^2-M^2+i\epsilon)}\int \mathrm{d}^4y D_{\mu\nu}(x_1-y)e^{-ik_3y}e^{+ik_2y} \\
& && (32) \\
&= e\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}(k_2+k_3)^\mu\frac{g_{\mu\nu}e^{ik_3x_3}e^{-ik_2x_2}e^{-ik_1x_1}}{(k_3^2-M^2+i\epsilon)(k_2^2-M^2+i\epsilon)(k_1^2+i\epsilon)} \\
&\times\int \mathrm{d}^4y e^{-ik_3y}e^{+ik_2y}e^{ik_1y} && (33) \\
&= -ie\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_3-k_2-k_1) \\
&\times(k_2+k_3)^\mu\frac{ie^{ik_3x_3}}{k_3^2-M^2+i\epsilon}\frac{ie^{-ik_2x_2}}{k_2^2-M^2+i\epsilon}\frac{-ig^{\mu\nu}e^{-ik_1x_1}}{k_1^2+i\epsilon} && (34)
\end{aligned}
$$

Przechodząc do reprezentacji pędowej funkcji Greena otrzymujemy:

$$
\tilde G^{(3)}_\nu(k_1,k_2,k_3) = -ie(k_2-k_3)^\mu\frac{i}{k_3^2-M^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2-M^2+i\epsilon}\frac{-ig_{\mu\nu}}{k_1^2+i\epsilon}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_3+k_2+k_1), \tag{35}
$$

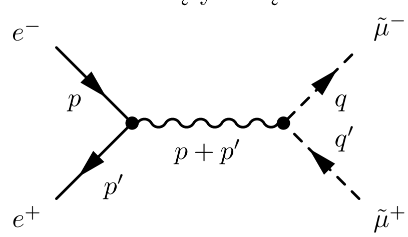
gdzie k_1, k_2, k_3 to czteropędy wychodzące z diagramu.

Z (35) i z rysunku 1 możemy odczytać następującą regułę Feynmana: wierzchołkowi $\tilde\mu^+\tilde\mu^- A_\mu$ przypisujemy wyrażenie postaci $-ie(\pm q\pm q')^\mu$, gdzie:

- wybieramy znak „+” dla cząstki ($\tilde\mu^-$), zarówno wchodzącej jak i wychodzącej;
- wybieramy znak „−” dla antycząstki ($\tilde\mu^+$), zarówno wchodzącej jak i wychodzącej.

2.2 Diagram Feynmana

Istnieje dokładnie jeden diagram Feynmana w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń dla procesu $e^+e^-\to\tilde\mu^+\tilde\mu^-$.



2.3 Amplituda rozpraszania

Stosując te same oznaczenia co w przypadku procesu $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$, zastępując jedynie $\mu^\pm$ przez $\tilde{\mu}^\pm$ otrzymujemy następujące wyrażenie na amplitudę rozpraszania.

$$-i\mathcal{M} = \bar{v}(p', s_2) ie\gamma^\mu u(p, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p+p')^2 + i\epsilon}(-ie)(q^\nu - q'^\nu) \tag{36}$$

$$= \frac{-ie^2}{(p+p')^2 + i\epsilon}\bar{v}(p', s_2)\gamma^\mu u(p, s_1)(q_\mu - q'_\mu) \tag{37}$$

2.4 Niezmienniczy element macierzowy

Uśredniając $|\mathcal{M}|^2$ po spinach cząstek wchodzących dostajemy.

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4}\frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \operatorname{Tr}\left\{\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p}' - m))\right\}(q_\mu - q'_\mu)(q_\nu - q'_\nu) \tag{38}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2} \operatorname{Tr}\left\{\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu \not{p}' - m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right\}(q_\mu - q'_\mu)(q_\nu - q'_\nu) \tag{39}$$

$$= \frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2}\left\{p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - g^{\mu\nu}\left[(pp') + m^2\right]\right\}(q_\mu - q'_\mu)(q_\nu - q'_\nu) \tag{40}$$

$$= \frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2}\left\{2\left[(pq) - (pq')\right]\left[(p'q) - (p'q')\right] - (q-q')^2\left[(pp') + m^2\right]\right\} \tag{41}$$

2.5 Różniczkowy przekrój czynny

W układzie CMS możemy wyrazić niezmienniczy element macierzowy jako funkcję E i kąta θ. Korzystając z wyników z dodatku A otrzymujemy.

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{((p+p')^2 + i\epsilon)^2}\left\{2\left[(pq) - (pq')\right]\left[(p'q) - (p'q')\right] - (q-q')^2\left[(pp') + m^2\right]\right\} \tag{42}$$

$$= \frac{e^4}{(2E)^4}\left\{-2\left[(E^2 - \sqrt{E^2 - m^2}\sqrt{E^2 - M^2}\cos\theta) - (E^2 + \sqrt{E^2 - m^2}\sqrt{E^2 - M^2}\cos\theta)\right]^2\right. \tag{43}$$

$$\left. +4(E^2 - M^2)\left[(2E^2 - m^2) + m^2\right]\right\} \tag{44}$$

$$= \frac{e^4}{(2E)^4}\left\{-8(E^2 - m^2)(E^2 - M^2)\cos^2\theta + 8(E^2 - M^2)E^2\right\} \tag{45}$$

$$= \frac{e^4}{2}\left\{(1 - \frac{M^2}{E^2}) - (1 - \frac{m^2}{E^2})(1 - \frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta\right\} \tag{46}$$

Różniczkowy przekrój czynny wyraża się więc wzorem:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 64E^2}\sqrt{\frac{E^2 - M^2}{E^2 - m^2}}|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{47}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 64E^2}\sqrt{\frac{E^2 - M^2}{E^2 - m^2}}\frac{e^4}{2}\left\{(1 - \frac{M^2}{E^2}) - (1 - \frac{m^2}{E^2})(1 - \frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta\right\} \tag{48}$$

$$= \frac{e^4}{512\pi^2 E^2}\sqrt{\frac{1 - \frac{M^2}{E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}}}\left\{(1 - \frac{M^2}{E^2}) - (1 - \frac{m^2}{E^2})(1 - \frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta\right\}. \tag{49}$$

2.6 Całkowity przekrój czynny

Całkując różniczkowy przekrój czynny po $\mathrm{d}\Omega$ dostajemy wyrażenie na całkowity przekrój czynny.

$$\sigma = \int \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right) \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\cos\theta \tag{50}$$

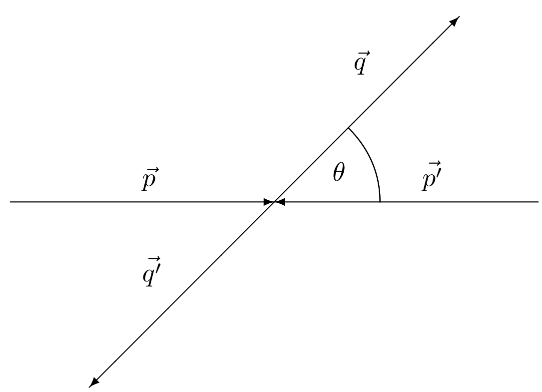
$$= \frac{e^4}{256\pi E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}} \int \left\{(1-\frac{M^2}{E^2}) - (1-\frac{m^2}{E^2})(1-\frac{M^2}{E^2})\cos^2\theta\right\} \mathrm{d}\cos\theta \tag{51}$$

$$= \frac{e^4}{128\pi E^2}\sqrt{\frac{1-\frac{M^2}{E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}} \left\{(1-\frac{M^2}{E^2}) - \frac{1}{3}(1-\frac{m^2}{E^2})(1-\frac{M^2}{E^2})\right\} \tag{52}$$

Dodatki

A Kinematyka

Rozważmy proces $2 \to 2$ w układzie CMS. Jest on schematycznie przedstawiony na rysunku 2. Przez p, p' oznaczmy czteropędy cząstek padających, a przez q, q' czteropędy cząstek wychodzących. Zakładamy, że zarówno masy cząstek wchodzących jak i wychodzących są sobie równe i wynoszą odpowiednio m i M. W układzie CMS energia padających cząstek jest równa i została oznaczona przez E. Wprowadźmy ponadto oznaczenie θ na kąt pomiędzy wektorem $\vec{p}$ a wektorem $\vec{q}$.



Rysunek 2: Zderzenie w układzie środka masy (CMS)

W takim razie w układzie CMS prawdziwe są następujące tożsamości:

$$p = (E, \vec{p}) \tag{53}$$
$$p' = (E, \vec{p'}) = (E, -\vec{p}) \tag{54}$$
$$q = (E, \vec{q}) \tag{55}$$
$$q' = (E, \vec{q'}) = (E, -\vec{q}) \tag{56}$$
$$pq = E^2 - |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta = E^2 - \sqrt{E^2 - m^2}\sqrt{E^2 - M^2}\cos\theta = p'q' \tag{57}$$
$$pq' = E^2 + \sqrt{E^2 - m^2}\sqrt{E^2 - M^2}\cos\theta = p'q \tag{58}$$
$$pp' = E^2 + \vec{p}^2 = 2E^2 - m^2 \tag{59}$$
$$qq' = E^2 + \vec{q}^2 = 2E^2 - M^2 \tag{60}$$
$$(q - q')^2 = -4E^2 + 4M^2 \tag{61}$$

B Różniczkowy przekrój czynny w CMS

Dla procesów $2 \to 2$ w CMS, w których cząstki wchodzące mają takie same masy równe m, a cząstki wychodzące posiadają również takie same masy równe M, korzystając z tożsamości wyprowadzonych w dodatku A wzór na całkowity przekrój czynny możemy uprościć następująco:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(pp')^2 - m^4}} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q'}}{(2\pi)^3 2E_{q'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + q' - p - p')|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{62}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{(pp')^2 - m^4}} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^2 4E_q E_{q'}} \delta(E_q + E_{q'} - E_p - E_{p'})|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{63}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{(2E^2 - m^2)^2 - m^4}} \int \frac{\mathrm{d}\Omega \vec{q}^2 \mathrm{d}|\vec{q}|}{(2\pi)^2 4EE_q} \delta(2E_q - 2E)|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{64}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{4E^4 - 4E^2m^2}} \int \frac{\mathrm{d}\Omega \vec{q}^2 \mathrm{d}|\vec{q}|}{(2\pi)^2 8EE_q} \delta(E_q - E)|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{65}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{4E^4 - 4E^2m^2}} \int \frac{\mathrm{d}\Omega \sqrt{E_q^2 - M^2}\mathrm{d}E_q}{(2\pi)^2 8E} \delta(E_q - E)|\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{66}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2 64E^2} \sqrt{\frac{E^2 - M^2}{E^2 - m^2}} \int \mathrm{d}\Omega |\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{67}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2 64E^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{M^2}{E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}}} \int \mathrm{d}\Omega |\bar{\mathcal{M}}|^2 \tag{68}$$