

Relatywistyczna teoria cząstki skalarnej

Arkadiusz Trawiński

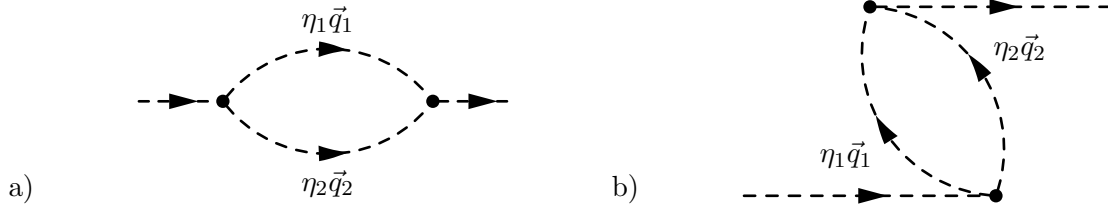
30 czerwca 2010

Postawmy sobie za zadanie obliczenie amplitudy przejścia $\phi \rightarrow \phi$, gdzie ϕ jest rzeczywistym polem skalarnym. Obliczona wielkość wiąże się z poprawką do masy pola ϕ . Amplituda została otrzymana na dwa sposoby – korzystając z reguł Feynmana oraz z „nowych reguł” zdefiniowanych w pracy Weinberga [1].

Założymy, że stała sprzężenia λ jest mniejsza od jeden, dlatego uzasadnione jest stosowanie rachunku zaburzeń. Interesuje nas poprawka do kwadratu masy w pierwszym przybliżeniu dla teorii $\lambda\phi^3$, co oznacza poprawkę jedno pętlową.

Przypomnijmy „nowe reguły”, aby móc otrzymać pożądany wynik:

- Namaluj wszystkie uporządkowane czasowo diagramy.



Rysunek 1: Wszystkie uporządkowane czasowo jedno pętlowe diagramy dla teorii $\lambda\phi^3$.

W przypadku jedno pętlowym mamy dwa diagramy przedstawione na rysunku 1. Diagram 1b) nie daje wkładu do amplitudy (zobacz poniżej).

- Dla każdej wewnętrznej linii dodaj czynnik $\frac{\theta(\eta_n)}{2(2\pi)^3\eta_n}$.
Dla diagramu 1b) $\eta_1 < 0$ oraz $\eta_2 < 0$, dlatego nie wnosi wkładu od szukanej amplitudy.
- Dla każdego wierzchołka, oprócz pierwszego od lewej, dodaj czynnik $(2\pi)^3\delta(\Delta \sum \eta)\delta^2(\Delta \sum \vec{q}^\perp)$.
- Dla każdego stanu pośredniczącego γ dodaj czynnik $\frac{2}{s-s_\gamma+i\epsilon}$, gdzie \sqrt{s} to energia w środku masy.
W naszym przypadku w układzie środka masy cząstka ϕ spoczywa i $s = m^2$.
Dla stanów pośrednich $s_\gamma = \sum_{n \in \gamma} \frac{\vec{q}_n^{\perp 2} + m_n^2}{\eta_n}$.
- Wykonaj całkę po η_n i \vec{q}_n^\perp z iloczynu wszystkich czynników.

W naszym wypadku otrzymujemy:

$$\Sigma(s) = \lambda^2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^1 d\eta_2 \int d^2\vec{q}_1^\perp \int d^2\vec{q}_2^\perp \frac{\theta(\eta_1)}{2(2\pi)^3\eta_1} \frac{\theta(\eta_2)}{2(2\pi)^3\eta_2} (2\pi)^3 \delta(\eta_1 + \eta_2 - 1) \delta^2(\vec{q}_1^\perp + \vec{q}_2^\perp) \frac{2}{s - s_\gamma + i\epsilon} \quad (1)$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\eta_1 \int d^2\vec{q}_1^\perp \frac{1}{\eta_1} \frac{1}{(1-\eta_1)} \left[s - \frac{\vec{q}_1^{\perp 2} + m^2}{\eta_1} - \frac{\vec{q}_1^{\perp 2} + m^2}{1-\eta_1} + i\epsilon \right]^{-1} \quad (2)$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\eta \int d^2\vec{q}_1^\perp \left[m^2\eta(1-\eta) - \vec{q}_1^{\perp 2} - m^2 + i\epsilon \right]^{-1} \quad (3)$$

Zauważmy, że całka po \vec{q}^\perp jest rozbieżna. Wydzielimy rozbieżność całki (3) stosując regularyzację wymiarową. Skorzystamy w tym celu ze znanego wzoru:

$$\int \frac{d^N q}{(2\pi)^N} \frac{1}{(q^2 + \Delta)^n} = \lim_{D \rightarrow N} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{4\pi}{\Delta} \right)^{n - \frac{D}{2}}. \quad (4)$$

Stosując powyższy wzór do równania (3) dla $N = 2$, $n = 1$, $\Delta(\eta) = -m^2\eta(1-\eta) + m^2 - i\epsilon$ i $D = 2 - \epsilon'$ otrzymujemy:

$$\Sigma(m^2) = \lambda^2 \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\eta \int d^2\vec{q}_1^\perp \left[\vec{q}_1^{\perp 2} + \Delta \right]^{-1} \quad (5)$$

$$= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{-1}{2(2\pi)} \int_0^1 d\eta \frac{1}{4\pi} \Gamma\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) \left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon'}{2}}. \quad (6)$$

Możemy rozwinąć $\Gamma\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon'} - \gamma_E + o(\epsilon')$, gdzie γ_E jest stałą Eulera. Podstawiając do (6) dostajemy:

$$\Sigma(m^2) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{-1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\eta \left(\frac{2}{\epsilon'} - \gamma_E\right) \left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon'}{2}} \quad (7)$$

$$= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{-1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\eta \left(\frac{2}{\epsilon'} - \gamma_E\right) \left(1 + \frac{\epsilon'}{2} \ln \frac{4\pi}{\Delta}\right) \quad (8)$$

$$= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{-1}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\eta \left(\frac{2}{\epsilon'} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{\Delta}\right) \quad (9)$$

$$= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{-1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon'} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{m^2} - \int_0^1 d\eta \ln(\eta^2 - \eta + 1)\right). \quad (10)$$

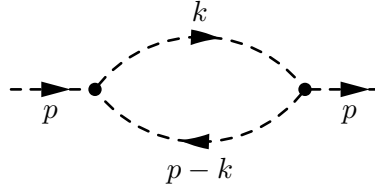
Pozostaje do obliczenia całka po η :

$$\int_0^1 d\eta \ln(\eta^2 - \eta + 1) = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi. \quad (11)$$

Sprawdźmy, czy podobny wynik otrzymamy obliczając szukaną amplitudę z reguł Feynmana. Przy tym podejściu mamy jeden diagram nie uporządkowany czasowo.

Amplituda takiego procesu wynosi:

$$\tilde{\Sigma}(p^2) = i\lambda^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (12)$$



Rysunek 2: Diagram Feynmana.

Liczniki w wyrażeniu (12) możemy połączyć wprowadzając parametr Feynmana x :

$$\tilde{\Sigma}(p^2) = i\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [p^2x - 2pkx + k^2 - m^2 + i\epsilon]^{-2} \quad (13)$$

$$= i\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [(k - px)^2 - p^2x^2 + p^2x - m^2 + i\epsilon]^{-2}. \quad (14)$$

Przesuwając zmienną k o $-px$ oraz dokonując rotacji Wicka otrzymujemy:

$$\tilde{\Sigma}(p^2) = i\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [k^2 - p^2x^2 + p^2x - m^2 + i\epsilon]^{-2} \quad (15)$$

$$= -\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} [-k_E^2 - p^2x^2 + p^2x - m^2 + i\epsilon]^{-2} \quad (16)$$

$$= -\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} [k_E^2 + p^2x^2 - p^2x + m^2 - i\epsilon]^{-2}. \quad (17)$$

Powyższe wyrażenie jest typu (4) dla $N = 4$, $n = 2$, $\Delta = p^2x^2 - p^2x + m^2 - i\epsilon$ i $D = 4 - \epsilon'$:

$$\tilde{\Sigma}(p^2) = -\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) \left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon'}{2}} \quad (18)$$

$$= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lambda^2 \frac{-1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon'} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi}{p^2} - \int_0^1 dx \ln(x^2 - x + \frac{m^2}{p^2})\right). \quad (19)$$

Wyrażenie (19) pokrywa się z poprzednim wynikiem (10) dla $p^2 = m^2 = s$.

Podsumowując obliczenia, po usunięciu części rozbieżnych zarówno w $\Sigma(m^2)$ jak i $\tilde{\Sigma}(m^2)$ mamy:

$$\Sigma_B(m^2) = \tilde{\Sigma}_B(m^2) = \lambda^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\gamma_E - \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) \quad (20)$$

(Wprowadzony został tutaj parametr μ^2 , który zapewnia by wielkość pod logarytmem była bezwymiarowa.)

Aby móc zinterpretować wynik należało by przede wszystkim obliczyć kontrczłonny dla teorii $\lambda\phi^3$. Ich postać w ogólności zależy od schematu renormalizacji. W przypadku, gdy używamy reguł Feynmana znane są schematy renormalizacji OS , MS i \bar{MS} . Czy możliwe jest jednak wprowadzenie różnych schematów renormalizacji w przypadku „nowych reguł”? Wątpliwość bierze się stąd, że przy nowym podejściu nie mamy dodatkowego parametru jak p^2 , ponieważ zawsze $s = m^2$. Jest tu dla autora pewna koncepcyjna niejasność, którą przed dokonaniem dalszych obliczeń trzeba wyjaśnić.

Literatura

- [1] Steven Weinberg. Dynamics at infinite momentum. *Phys. Rev.*, 150:1313–1318, 1966.