Relatywistyczna teoria cząstki skalarnej

Arkadiusz Trawiński

23 czerwca 2010

1 Hamiltonian w równaniu Schrödgingera.

Na początku warto zdefiniować co będziemy rozumieli pod sformułowaniem równanie Schrödgingera. Czy każe równanie postaci $\partial_t \left|\psi\right\rangle = H \left|\psi\right\rangle$ nieistotnie od postaci operatora H? W ramach wykładu mechaniki kwantowej I operator H zawsze zawierał część odpowiedzialną za nierelatywistyczny ruch swobodny $\frac{1}{2m}\nabla^2$. W sformułowaniu relatywistycznym (równanie Diraca) operator pola Ψ jest biwektorem, a część swobodna hamiltonianu jest proporcjonalna do ∇.

W obecnej pracy przyjmę nazewnictwo, że wszystkie równania typu $\partial_t \mid \psi\rangle = H \mid \psi\rangle$ są równaniami Schrödgingera, będę jednak konsekwentnie dodawał epitety nierelatywistyczne lub relatywistyczne dla odróżnienia postaci. Część swobodna hamiltonianu oznaczana będzie H_o, która dla przypadku nierelatywistycznego wynosi $\frac{\hat{p}^2}{2m}$.

W przypadku relatywistycznym, żądamy aby $\hat{H}_0$ w działaniu na dowolny stan, który jest wektorem własnym operatora masy o wartości własnej m, dawał $\sqrt{m^2+p^2}$.

2 Równanie na stan związany.

Obecnie naszym celem jest uzyskanie równania, opisującego stan deuteronu $\left|D\right\rangle$ jako stanu związanego protonu $\left|p\right\rangle$ i neutronu $\left|n\right\rangle$. Dzięki poprawnemu opisowi cząstki złożonej będziemy w stanie określić przede wszystkim energię wiązania E_D. W tym celu posłużymy się pracą Gell-Manna i Goldebergera [1] definiującą w języku stanów teorię rozpraszania. Interesować nas będzie rozpraszanie protonu na neutronie. Skoro zakładamy, że deuteron składa się przede wszystkim z tych cząstek nie jest bezzasadne twierdzenie, że w skutek takiego rozpraszania, przy spełnieniu odpowiednich warunków, będzie możliwe związanie tych cząstek w jeden układ.

W wcześniej wspomnianej pracy możemy znaleźć wzór na amplitudę rozpraszania $\hat{T}$.

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\frac{1}{E-\hat{H}_o}\hat{T} \tag{1}$$

W równaniu tym występuje $\hat{V}$, czyli potencjał oddziaływania między protonem, a neutronem. Operatory $\hat{T}$ i $\hat{V}$ w szczególności zależą od energii rozpraszania E. Za operator $\hat{H}_o$ podstawiać będziemy część swobodną pełnego hamiltonianu $\hat{H}$ z relatywistycznego równania Schrödgingera.

Aby rozważać stany związane dokonamy przejścia granicznego $E \to E_D$. Zanim jednak to zrobimy zastosujemy podstawienie

$$\hat{T} = \frac{1}{E-E_D}\left|D\right\rangle\left\langle D\right| + (\text{część regularna przy } E \to E_D). \tag{2}$$

Odzwierciedla ono fakt rezonansu w amplitudzie rozpraszania dla energii bliskich energii wiązania.

Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy pożądany wzór:

$$\left[\hat{H}_o + \hat{V}(E_D)\right] |D\rangle = E_D \, |D\rangle \tag{3}$$

3 Rozpraszanie na partonie.

Pozostajemy teraz postawieni przed następnym problem. Jak sprawdzić doświadczalnie równanie (3)? Tak jak zasze w takich sytuacjach przeprowadzimy eksperyment podobny do tego jaki wykonał Rutherford. Tym razem obserwować będziemy energię oraz kąt rozpraszanych elektronów na deuteronie.

Problem ten rozważać będziemy w układzie w którym obie cząstki wchodzące w skład deuteronu poruszają się z dużymi pędami w tym samym kierunku (i zwrocie). W tak obranym układzie współrzędnych pęd protonu wynosi $\vec{p}_p = x_p\vec{P} + \vec{k}$, a neutronu $\vec{p}_n = x_n\vec{P} - \vec{k}$, gdzie $x_p + x_n = 1$, a $\vec{k}$ jest pędem prostopadłym do $\vec{P}$ - całkowitego pędu układu proton-neutron.

Stosując równanie (3) do przypadku deuteronu mamy $\left[E_D - \hat{H}_o\right] \mid D\rangle = (E_D - E_p - E_n) \mid D\rangle$. W założonym układzie współrzędnych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
E_D - E_p - E_n &= \sqrt{m_D^2 + \vec{P}^2} - \sqrt{m_p^2 + \vec{p}_p^2} - \sqrt{m_n^2 + \vec{p}_n^2} \\
&= P\sqrt{1 + \frac{m_D^2}{P^2}} - |x_p|P\sqrt{1 + \frac{m_p^2 + k^2}{x_p^2 P^2}} - |x_n|P\sqrt{1 + \frac{m_n^2 + k^2}{x_n^2 P^2}} \\
&= P\left(1 + \frac{m_D^2}{P^2}\right) - |x_p|P\left(1 + \frac{m_p^2 + k^2}{x_p^2 P^2}\right) - |x_n|P\left(1 + \frac{m_n^2 + k^2}{x_n^2 P^2}\right) \\
&= P\left(1 - |x_p| - |x_n|\right) + \frac{1}{2P}\left(m_D^2 - \frac{m_p^2 + k^2}{|x_p|} - \frac{m_n^2 + k^2}{|x_n|}\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Po wstawieniu (4) do (3) otrzymujemy:

$$\left[\frac{m_p^2 + k^2}{x_p} + \frac{m_n^2 + k^2}{x_n} + 2P\hat{V}(E_D)\right] |D\rangle = m_D^2 \, |D\rangle \tag{5}$$

Podstawiając $m_n = m_p = m$ i $x_p = x \in [0,1]$ oraz $x_n = 1 - x$, co w prost oznacza, to co założyliśmy - ruch obu cząstek w tym samym kierunku.

$$\left[\frac{m^2 + k^2}{x(1-x)} + 2P\hat{V}(E_D)\right] |D\rangle = m_D^2 \, |D\rangle \tag{6}$$

Pozostaje sprecyzować co to jest $\hat{V}(E_D)$, w tym celu posłużymy się pracą Weinberga [2]. Dokonując założenia, że zarówno proton jak i neutron są cząstkami skalarnymi, a oddziaływanie między nimi odbywa się dzięki innej cząstce skalarnej.

Przy tych założeniach i zgodnie z „nowymi regułami” zawartymi w pracy Weinberga otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\hat{V}\phi(x, \vec{k}) = \int_0^1 \int \frac{\mathrm{d}^2\vec{k}}{2(2\pi)^3} \frac{1}{x(1-x)} \frac{g^2}{|x - x'|} \\
\Bigg\{ \theta(x - x') \left[s - \frac{k'^2 + m^2}{x'} - \frac{(k - k')^2 + m_\pi^2}{x - x'} - \frac{k^2 + m^2}{1 - x} + i\epsilon\right]^{-1} \\
+ \theta(x' - x) \left[s - \frac{k'^2 + m^2}{1 - x'} - \frac{(k - k')^2 + m_\pi^2}{x' - x} - \frac{k^2 + m^2}{x} + i\epsilon\right]^{-1} \Bigg\} \phi(x', \vec{k}')
\end{aligned} \tag{7}$$

Literatura

[1] M. Gell-Mann and M. L. Goldberger. The formal theory of scattering. *Phys. Rev.*, 91:398–408, 1953.

[2] Steven Weinberg. Dynamics at infinite momentum. *Phys. Rev.*, 150:1313–1318, 1966.