

## ANALIZA FUNKCJONALNA I

## 1. Odwzorowania antyliniowe.

Niech  $V, W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad  $\mathbb{C}$ . Odwzorowanie  $F: V \rightarrow W$  nazywamy *antyliniowym*, jeżeli

$$F(\lambda v + \mu w) = \bar{\lambda}F(v) + \bar{\mu}F(w).$$

STWIERDZENIE 1.

- (1) Jeżeli  $F: V \rightarrow W$ ,  $G: W \rightarrow U$  są antyliniowe, to  $G \circ F$  jest liniowe.
- (2) Jeżeli jedno z odwzorowań  $F: V \rightarrow W$ ,  $G: W \rightarrow U$  jest liniowe, a drugie jest antyliniowe, to  $G \circ F$  jest antyliniowe.

Zbiór odwzorowań antyliniowych z  $V$  do  $W$  tworzy przestrzeń wektorową, którą oznaczamy będziemy  $\text{AL}(V, W)$ . Przestrzeń funkcjonałów liniowych  $L(V, \mathbb{C})$  oznaczamy będziemy  $V^*$ , a przestrzeń  $\text{AL}(V, \mathbb{C})$  funkcjonałów antyliniowych  $V^\#$ . Będziemy też używać oznaczenia  $\langle f, v \rangle$  dla ewaluacji  $f(v)$ . Niech  $F: V \rightarrow W$  będzie **odwzorowaniem liniowym**. Odwzorowanie

$$W^* \rightarrow V^*: f \mapsto f \circ F$$

jest, jak wiadomo, liniowe. Nazywamy je będziemy odwzorowaniem *dualnym* lub *sprzężonym* do  $F$  i oznaczamy będziemy  $F^*$ . Podobnie, odwzorowanie

$$W^\# \rightarrow V^\#: f \mapsto f \circ F$$

jest liniowe. Nazywamy je będziemy odwzorowaniem *antydualem* lub *hermitowsko sprzężonym* do  $F$  i oznaczamy będziemy  $F^\#$ .

Podobnie, jeżeli  $F: V \rightarrow W$  jest **odwzorowaniem antyliniowym**, to wzór  $f \mapsto f \circ F$  zadaje odwzorowanie

$$F^*: W^* \rightarrow V^\#: f \mapsto f \circ F,$$

które jest, jak łatwo sprawdzić, liniowe:

$$F^*(\lambda f) = \lambda f \circ F$$

Podobnie, odwzorowanie

$$F^\#: W^\# \rightarrow V^*: f \mapsto f \circ F$$

jest liniowe.

DEFINICJA 2. Sprzężeniem zespolonym funkcjonału liniowego (antyliniowego)  $f$  na  $V$  nazywamy funkcjonał antyliniowy (liniowy)  $\bar{f}$  na  $V$ , zdefiniowany przez

$$\bar{f}(v) = \overline{f(v)}.$$

Sprzężenie zespolone daje kanoniczny antyizomorfizm (t. j. antyliniowy izomorfizm)  $V^*$  i  $V^\#$ . W konsekwencji daje antyizomorfizm przestrzeni  $L(V^*, W^*)$  i  $L(V^\#, W^\#)$ , zdefiniowany wzorem

$$G \rightarrow \bar{G} : \bar{G}(f) = \overline{G(f)},$$

gdzie  $G \in L(V^*, W^*)$ . Niech  $F \in L(V, W)$ . Oczywiście jest związek

$$F^\# = \bar{F}^*.$$

Jak wiadomo z algebry, dla przestrzeni wektorowych wymiaru skończonego mamy kanoniczny izomorfizm  $V$  i  $(V^*)^*$ , zadany wzorem

$$V \ni v \mapsto \varphi_v \in (V^*)^* : \varphi_v(f) = f(v) \text{ dla } f \in V^*,$$

podobnie, ten sam wzór zadaje antyizomorfizm  $V$  i  $(V^\#)^*$

$$V \ni v \mapsto \varphi_v \in (V^\#)^* : \varphi_v(f) = f(v) \text{ dla } f \in V^\#.$$

W przypadku wymiaru nieskończonego wzór powyższy daje injekcję, ale nie surjekcję, przestrzeni  $V$  w  $(V^*)^*$  i w  $(V^\#)^*$ .

STWIERDZENIE 3.

- (1) Istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni  $(V^\#)^*$  i  $(V^*)^\#$ .
- (2) Istnieje kanoniczna iniekcja antyliniowa przestrzeni  $V$  w  $(V^*)^\#$ .
- (3) Istnieje kanoniczna iniekcja antyliniowa przestrzeni  $V$  w  $(V^\#)^*$ .
- (4) Istnieje kanoniczna iniekcja liniowa przestrzeni  $V$  w  $(V^\#)^\#$ .

DOWÓD:

- (1) Niech  $\varphi \in (V^*)^\#$ . Wzór

$$V^\# \ni f \mapsto \overline{\varphi}(f) \in \mathbb{C}$$

określa, jak łatwo sprawdzić, odwzorowanie liniowe, więc element z  $(V^\#)^*$ . Oznaczmy go przez  $\tilde{\varphi}$ . Przyporządkowanie  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych. (Co się zmieni, jeżeli w powyższym wzorze  $\overline{\varphi}$  zastąpimy przez  $\varphi$ ?)

- (2) Sprzężenie zespolone daje antyizomorfizm  $(V^*)^*$  i  $(V^*)^\#$ . Sprzężenie zespolone złożone z kanonicznym włożeniem  $V$  w  $(V^*)^*$  daje żądane włożenie antyliniowe.
- (3) Otrzymujemy przez złożenie włożenia z punktu drugiego z izomorfizmem z punktu pierwszego.
- (4) Otrzymujemy przez złożenie włożenia z punktu poprzedniego ze sprzężeniem zespolonym. ■

Jako proste ćwiczenie zostawiamy dowód następującego stwierdzenia, będące odpowiednikiem znanego z algebry twierdzenia o odwzorowaniach sprzężonych.

STWIERDZENIE 4. Dla  $F, G$  liniowych (antyliniowych) mamy związki

- (1)  $(F + G)^\# = F^\# + G^\#, (F + G)^* = F^* + G^*$ ,
- (2)  $(\lambda F)^\# = \overline{\lambda} F^\#, (\lambda F)^* = \lambda F^*$
- (3)  $(G \circ F)^\# = F^\# \circ G^\#, (G \circ F)^* = F^* \circ G^*$
- (4)  $(F^\#)^\# \supset F, (F^*)^* \supset F$ .

Niech teraz  $F: V \rightarrow V^*$  będzie odwzorowaniem liniowym. Odwzorowanie sprzężone  $F^*: (V^*)^* \supset V \rightarrow V^*$  jest scharakteryzowane związkiem

$$\langle F^*(v), w \rangle = \varphi_v \circ F(w) = \langle F(w), v \rangle \quad (1)$$

i podobnie

$$\langle F^\#(v), w \rangle = \overline{\varphi_v \circ F(w)} = \overline{\langle F(w), v \rangle}. \quad (2)$$

Odwzorowanie liniowe  $F: V \rightarrow V^*$  nazywamy *symetrycznym*, jeżeli  $F = F^*$  na  $V$ , czyli

$$\langle F(v), w \rangle = \varphi_v \circ F(w) = \langle F(w), v \rangle.$$

Odwzorowanie liniowe  $F: V \rightarrow V^\#$  nazywamy *hermitowsko symetrycznym*, jeżeli  $F^\# = F$  na  $V$ , czyli

$$\langle F(v), w \rangle = \varphi_v \circ F(w) = \overline{\langle F(w), v \rangle}.$$

Podobnie, jeżeli  $F: V \rightarrow V^*$  jest odwzorowaniem antyliniowym, to  $\overline{F}: V \rightarrow V^\#$  jest odwzorowaniem liniowym. Odwzorowanie sprzężone  $\overline{F}^\#: (V^\#)^\# \supset V \rightarrow V^*$  jest więc scharakteryzowane związkiem, zgodnie z (2),

$$\langle \overline{F}^\#(v), w \rangle = \overline{\varphi_v \circ \overline{F}(w)} = \overline{\langle \overline{F}(w), v \rangle} = \langle F(w), v \rangle.$$

Równość  $\overline{F}^\# = F$  na  $V$  oznacza

$$\langle F(v), w \rangle = \langle F(w), v \rangle.$$

Jeżeli natomiast  $F: V \rightarrow V^\#$  jest odwzorowaniem antyliniowym, to  $\overline{F}: V \rightarrow V^*$  jest odwzorowaniem liniowym. Odwzorowanie sprzężone  $\overline{F}^*: (V^*)^* \supset V \rightarrow V^*$  jest scharakteryzowane, zgodnie z (1), związkiem

$$\langle \overline{F}^*(v), w \rangle = \varphi_v \circ \overline{F}(w) = \langle \overline{F}(w), v \rangle = \overline{\langle F(w), v \rangle}.$$

Równość  $\overline{F}^* = F$  na  $V$  oznacza

$$\langle F(v), w \rangle = \overline{\langle F(w), v \rangle}.$$

## 2. Przestrzeń z iloczynem skalarnym.

DEFINICJA 5. Iloczynem skalarnym w przestrzeni wektorowej  $V$  nad  $\mathbb{C}$  nazywamy odwzorowanie:

$$h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

takie, że dla  $v, w \in V$  i  $\alpha \in \mathbb{C}$  mamy

- (1)  $h(v, \alpha w) = \alpha h(v, w)$ ,
- (2)  $h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w')$ ,
- (3)  $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$ ,
- (4)  $h(v, v) > 0$  dla  $v \neq 0$  ( $h(v, v) \in \mathbb{R}$ ).

Często można spotkać inny zestaw aksjomatów iloczynu skalarnego:

- (1')  $h(v, \alpha w) = \alpha h(v, w)$ ,  $h(\alpha v, w) = \overline{\alpha} h(v, w)$ ,
- (2')  $h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w')$ ,  $h(v + v', w) = h(v, w) + h(v', w)$ ,
- (3')  $h(v, v) \in \mathbb{R}$ ,
- (4')  $h(v, v) > 0$  dla  $v \neq 0$ .

Oczywistym jest, że (1-4) pociąga za sobą (1'-4'). W obu też przypadkach  $h$  jest odwzorowaniem liniowym ze względu na drugą, a antyliniowym ze względu na pierwszą zmienną. Mówimy, że  $h$  jest formą półtoraliniową.

Pokażemy teraz równoważność obu definicji.

Wyprowadzimy najpierw formułę polaryzacyjną dla odwzorowania półtoraliniowego. Mamy

$$h(v + w, v + w) = h(v, v) + h(w, w) + h(v, w) + h(w, v)$$

oraz

$$h(\iota v + w, \iota v + w) = h(v, v) + h(w, w) - \iota h(v, w) + \iota h(w, v),$$

a stąd, mnożąc drugą tożsamość przez  $\iota$  i dodając do pierwszej, dostajemy (korzystając z półtoraliniowości  $h$ )

$$h(v, w) = \frac{1}{2}(h(v+w, v+w) - h(v, v) - h(w, w)) + \iota \frac{1}{2}(h(\iota v + w, \iota v + w) - h(v, v) - h(w, w)). \quad (3)$$

Podobnie, mnożąc drugą tożsamość przez  $-\iota$  i dodając do pierwszej, dostajemy

$$h(w, v) = \frac{1}{2}(h(v+w, v+w) - h(v, v) - h(w, w)) - \iota \frac{1}{2}(h(\iota v + w, \iota v + w) - h(v, v) - h(w, w)). \quad (4)$$

Z warunku (3') wynika więc równość (3).

**Spostrzeżenie:** Im  $h$  jest formą  $\mathbb{R}$ -dwuliniową, antysymetryczną i niezdegenerowaną. Re  $h$  jest formą  $\mathbb{R}$ -dwuliniową, symetryczną i niezdegenerowaną, więc zadaje na  $V$  strukturę przestrzeni unormowanej. Możemy zatem stosować oznaczenia i konstrukcje właściwe przestrzeniom z normą. Przede wszystkim, jest to przestrzeń metryczna, więc topologiczna.

Ponadto,

- (1)  $h(v, w)$  oznaczamy  $(v | w)$
- (2)  $(h(v, v))^{\frac{1}{2}}$  będziemy oznaczać  $\|v\|$  i nazywać *normą (długością)* wektora  $v$ .

Jak i w przypadku euklidesowym, mamy równość równoległoboku

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

DOWÓD:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = (v + w|v + w) - (v - w|v - w) = 2(v|v) + 2(w|w)$$

■

**Przykłady:**

(1)  $\mathbb{C}^n$  z iloczynem skalarnym

$$(x | y) = \overline{x_1}y_1 + \dots + \overline{x_n}y_n.$$

(2) Przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku  $[a, b]$  z iloczynem skalarnym

$$(f | g) = \int_a^b \overline{f}g.$$

(3) Przestrzeń  $C([a, b])$  funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły z iloczynem skalarnym

$$(f | g) = \int_a^b \overline{f}g + \int_a^b \overline{f}'g',$$

gdzie 'prim' oznacza pochodną.

Przestrzenie z drugiego i trzeciego przykładu są wymiaru nieskończonego. Jako przestrzenie metryczne nie są zupełne i można je, metodą standardową, uzupełnić. Otrzymane w ten sposób przestrzenie oznaczamy  $H^0([a, b])$  i  $H^1([a, b])$ .

### 2.1. Podstawowe własności iloczynu skalarnego.

**TWIERDZENIE 6 (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA).** *Jeśli  $V$  jest przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, to*

$$|(v | w)| \leq \|v\| \|w\|. \quad (5)$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $v$  i  $w$  są liniowo zależne.

DOWÓD: Jeśli  $v = \mathbf{0}$ , to twierdzenie jest trywialne.

Jeśli  $v \neq \mathbf{0}$ , to rozpatrzmy funkcję  $\alpha: \mathbb{R} \ni t \mapsto \|tv + w\|^2 \in \mathbb{R}$ , czyli

$$\alpha(t) = t^2(v | v) + 2t \operatorname{Re}(v | w) + (v | w).$$

Oczywiście  $\alpha(t) \geq 0$ , zatem wyróżnik tego trójmianu jest niedodatni, tzn.,

$$(\operatorname{Re}(v | w))^2 - (\|v\| \|w\|)^2 \leq 0. \quad (6)$$

Dla pewnego rzeczywistego  $\varphi$  mamy

$$(v | w) = e^{i\varphi} |(v | w)|,$$

zatem

$$|(v | w)| = e^{-i\varphi} (v | w) = (e^{i\varphi} v | w) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi} v | w).$$

Stąd i z (6) dostajemy

$$|(v | w)|^2 \leq \|e^{i\varphi} v\|^2 \|w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Jeżeli  $w = \lambda v$ , to

$$|(v | w)| = |\lambda| \|v\|^2 = \|\lambda v\| \|v\| = \|v\| \|w\|.$$

Niech teraz  $|(v | w)| = \|v\| \|w\|$  i  $|(v | w)| = e^{-i\varphi} (v | w)$ . Rozpatrzmy funkcję

$$\begin{aligned} \beta: t \mapsto \beta(t) &= \|e^{i\varphi} t v + w\|^2 = t^2 \|v\|^2 + 2t |(v | w)| + \|w\|^2 = \\ &= t^2 \|v\|^2 + 2t \|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (t \|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

$\beta$  jest równe zero dla  $t_0 = -\frac{\|w\|}{\|v\|}$ , czyli  $w = (e^{i\varphi} \frac{\|w\|}{\|v\|})v$ . ■

Bezpośrednim wnioskiem z nierówności Schwarz'a jest nierówność trójkąta:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(v|w) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Zatem  $\| \cdot \|$  spełnia aksjomaty normy w przestrzeni wektorowej. Z nierówności Schwarz'a wynika też, że iloczyn skalarny jest funkcją ciągłą na  $V \times V$  z normą produktową. Przy okazji zauważmy, że w iloczynie kartezjańskim  $V \times W$  przestrzeni z iloczynami skalarnymi, odpowiednio  $(\cdot | \cdot)_V$  i  $(\cdot | \cdot)_W$  możemy zdefiniować iloczyn skalarny wzorem

$$((v, w)|(v', w')) = (v|v')_V + (w|w')_W.$$

Dla dowolnego podzbioru  $A \subset V$  przestrzeni z iloczynem skalarnym definiujemy zbiór

$$A^\perp = \{w \in V: \forall v \in A, (w|v) = 0\}.$$

Oczywistym jest, że  $A^\perp$  jest domkniętą podprzestrzenią wektorową przestrzeni  $V$ . Mają też miejsce następujące oczywiste relacje

- (1) Jeżeli  $A \subset B$ , to  $A^\perp \supset B^\perp$ .
- (2)  $(A^\perp)^\perp$  zawiera najmniejszą domkniętą podprzestrzeń zawierającą  $A$ .

Ponieważ iloczyn skalarny  $h$  jest formą półtoraliniową, odpowiadają mu dwa odwzorowania  $F_h: V \rightarrow V^*$  i  ${}_h F: V \rightarrow V^\#$  zdefiniowane przez

$$\begin{aligned} \langle F_h(v), w \rangle &= (v | w) \\ \langle {}_h F(v), w \rangle &= (w | v). \end{aligned} \tag{7}$$

$F_h$  jest odwzorowaniem antyliniowym, natomiast odwzorowanie  ${}_h F$  jest liniowe i, jak łatwo zauważyć, hermitowsko symetryczne. Ponadto

$$\langle {}_h F(v), w \rangle = (w | v) = \overline{(v | w)} = \overline{\langle F_h(v), w \rangle} = \langle \overline{F_h}(v), w \rangle,$$

czyli  ${}_h F = \overline{F_h}$ . Jeżeli  $v \in \ker F_h$ , to  $F_h(v) = 0$  i

$$0 = \langle F_h(v), v \rangle = h(v, v) = \|v\|^2.$$

Stąd  $v = \mathbf{0}$ , czyli  ${}_h F$  jest injekcją. W przypadku przestrzeni wymiaru skończonego oznacza to, że  ${}_h F$  jest izomorfizmem. Nie jest tak dla wymiaru nieskończonego, ale, jak zobaczymy w dalszym ciągu wykładu, po ograniczeniu się do funkcjonałów ciągłych i spełnieniu warunku zupełności przestrzeni, znów dostajemy izomorfizm.

Zauważmy jeszcze, że  $A^\perp = F_h^{-1}(A^\circ)$ , gdzie  $A^\circ = \{f \in V^*: f(v) = 0 \forall v \in A\}$ . Możemy tu zastąpić  $F_h$  przez  ${}_h F$  i  $V^*$  przez  $V^\#$ .

### 3. Przestrzeń Hilberta.

Zupełna przestrzeń z normą jest przestrzenią Banacha. Zupełną przestrzeń z iloczynem skalarnym nazywamy *przestrzenią Hilberta*. Przestrzeń Hilberta jest przestrzenią Banacha, więc można korzystać z rachunku różniczkowego i innych metod omawianych w kursie Analizy. Warto zwrócić uwagę na to, że nie każda norma jest równoważna normie hilbertowskiej, tzn. pochodzącej od iloczynu skalarnego. Oczywiście, jest to możliwe dla wymiaru nieskończonego. W przypadku wymiaru skończonego, wszystkie normy są równoważne. Przypomnę tu, że dwie normy  $\| \cdot \|$  i  $\| \cdot \|'$  na przestrzeni wektorowej  $V$  są równoważne, jeżeli istnieją liczby dodatnie  $a, b$  takie, że dla każdego  $v \in V$  zachodzi nierówność  $a\|v\| \leq \|v\|' \leq b\|v\|$ .

**TWIERDZENIE 7 (O RZUCIE PROSTOPADŁYM).** Niech  $H$  będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym  $h$  i niech  $W \subset H$  będzie domkniętą podprzestrzenią wektorową. Wówczas

$$H = W \oplus W^\perp$$

(w sensie algebraicznym i topologicznym).

DOWÓD: Jeżeli  $v \in W \cap W^\perp$ , to  $(v | v) = 0$ , czyli  $v = 0$ .

Czy  $H = W + W^\perp$  ?

Rozpatrzmy funkcję

$$V \ni v \mapsto \alpha(v) = \inf_{y \in W} \|v - y\|^2.$$

Z definicji inf istnieje ciąg  $(y_n \in W)$  taki, że  $\alpha(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v - y_n\|^2$ . Zatem możemy przyjąć, że

$$\alpha(v) \leq \|v - y_n\|^2 \leq \alpha(v) + \frac{1}{n}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(v - y_m) - (v - y_n)\|^2 = \\ &= 2(\|v - y_m\|^2 + \|v - y_n\|^2) - \|2v - (y_m + y_n)\|^2 \\ &\leq 4\alpha + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - 4\alpha = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Zatem ciąg  $y_n$  jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ przestrzeń  $H$  jest zupełna, a podprzestrzeń  $W$  jest domknięta jego granica  $P(v)$  istnieje, należy do  $W$  i  $\alpha(v) = \|v - P(v)\|^2$ .

Pokażemy, że  $v - P(v) \in W^\perp$ . Niech  $y \in W$ , wówczas funkcja

$$f(t) \mapsto \|(v - P(v)) + ty\|^2$$

ma minimum w  $t = 0$ . Z drugiej strony

$$f(t) = \|v - P(v)\|^2 + 2t \operatorname{Re}(y | v - P(v)) + t^2 \|y\|^2,$$

czyli

$$0 = f'(0) = 2 \operatorname{Re}(y | v - P(v)).$$

Ponadto

$$\operatorname{Im}(y | v - P(v)) = \operatorname{Re}(iy | v - P(v)) = 0,$$

bo  $iy \in W$ . Oznacza to, że  $v - P(v) \in W^\perp$ . Rozkład  $v = P(v) + (v - P(v))$  jest rozkładem w sumie prostej (algebraicznej!)  $H = W \oplus W^\perp$ . Trzeba jeszcze pokazać, że suma ta jest sumą topologiczną. Jest to natychmiastowy wniosek z poniższego rachunku

$$\|v\|^2 = (v|v) = (P(v)|P(v)) + (v - P(v)|v - P(v)) = \|P(v)\|^2 + \|v - P(v)\|^2. \quad \blacksquare$$

Odwzorowanie  $P$  zdefiniowane w dowodzie nazywamy rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń  $W$ .

Łatwym wnioskiem z twierdzenia o rzucie prostopadłym jest twierdzenie o reprezentacji funkcyjonału.

**TWIERDZENIE 8 (RIESZA O REPREZENTACJI FUNKCJONAŁU LINIOWEGO I CIĄGŁEGO).** Dla każdego funkcjonału liniowego i ciągłego  $f$  na przestrzeni Hilberta  $H$  istnieje dokładnie jeden wektor  $w_f \in H$  taki, że dla każdego wektora  $v \in H$  zachodzi równość

$$f(v) = (w_f | v).$$

**DOWÓD:** Niech  $W = \ker f$ . Jest to domknięta podprzestrzeń liniowa  $H$ . Domkniętość wynika z ciągłości  $f$ . Na mocy twierdzenia o rzucie prostopadłym  $H = W \oplus W^\perp$ . Pokażemy, że  $W^\perp$  ma wymiar 1. Niech bowiem  $v, w \in W^\perp$ , to  $f(v)w - f(w)v \in W^\perp$  i  $f(f(v)w - f(w)v) = 0$ , więc  $f(v)w - f(w)v \in W$ . Stąd  $f(v)w - f(w)v = 0$  co oznacza, że  $v, w$  są liniowo zależne. Zatem istnieje dokładnie jeden  $v_0 \in W^\perp$  taki, że  $\|v_0\| = 1$  i  $f(v_0) > 0$ . Połóżmy  $w_f = f(v_0)v_0$ . Mamy  $f(w_f) = (f(v_0))^2 = (w_f | w_f)$  i stąd  $f(v) = (w_f | v)$  dla każdego  $v \in H$ . ■

**Uwaga: OD TEGO MIEJSCA  $H^*$  ( $H^\#$ ) oznaczać będzie przestrzeń funkcjonałów liniowych (antyliniowych) i CIĄGŁYCH na  $H$ .**

Przestrzenie  $H^*$  i  $H^\#$  są przestrzeniami Banacha (przestrzeń odwzorowań liniowych i ciągłych między przestrzeniami Banacha jest przestrzenią Banacha). Twierdzenie Riesz'a oznacza, że odwzorowania  $F_h: H \rightarrow H^*$  i  ${}_hF: H \rightarrow H^\#$  (7) są surjektywne. Ponieważ są też injektywne, są izomorfizmami ( $F_h$  antyliniowym, a  ${}_hF$  liniowym) przestrzeni wektorowych. Pokażemy, że są izometriami, czyli izomorfizmami przestrzeni Banacha.

**TWIERDZENIE 9.** *Odwzorowania  ${}_hF$  i  $F_h$  są izometriami (zachowują normę).*

**DOWÓD:** Niech  $f = F_h(w_f)$ . Mamy

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \sup_{\|v\|=1} |(w_f | v)| = \|w_f\|,$$

bo z nierówności Schwarz'a  $|(w_f | v)| \leq \|w_f\|$ . Analogicznie pokazujemy, że  ${}_hF$  jest izometrią

■

**Przykład** Przestrzeń  $\ell^2$  ciągów liczb zespolonych, sumowalnych z kwadratem, tzn.  $(a_i) \in \ell^2$  jeżeli  $\sum |a_i|^2 < \infty$ , z iloczynem skalarnym

$$((a_i) | (b_i)) = \sum \bar{a}_i b_i,$$

jest przestrzenią Hilberta. Ponieważ  ${}_hF$  i  $F_h$  są izometriami, można przy ich pomocy wyposażyć przestrzeń  $H^*$  i  $H^\#$  w iloczyn skalarny, zgodny z zastaną normą:

$$\begin{aligned} (F_h(v) | F_h(w)) &= (w | v) \\ ({}_hF(v) | {}_hF(w)) &= (v | w). \end{aligned}$$

#### 4. Bazy w przestrzeni Hilberta.

Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową. Bazą w  $V$  nazywamy zbiór  $B \subset V$  taki, że każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny i każdy wektor z  $V$  jest skończoną kombinacją liniową wektorów bazy. W przypadku przestrzeni wektorowej z topologią, możemy zmodyfikować pojęcie bazy żądając, by skończone kombinacje liniowe tworzyły zbiór gęsty w  $V$ . Nie jest to jednak wystarczające, i w przypadku ogólnej przestrzeni Banacha pojęcie bazy jest dość skomplikowane. W przestrzeni z iloczynem skalarnym możemy mówić o bazie ortogonalnej i bazie ortonormalnej, co znacznie upraszcza problem definicji.

**DEFINICJA 10.** *Bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta  $H$  nazywamy zbiór  $B \subset H$  taki, że*

- (1) każdy skończony podzbiór  $B$  jest ortonormalny,
- (2) zbiór skończonych kombinacji liniowych wektorów z  $B$  (powłoka liniowa  $B$ ) jest gęsty w  $H$ .

Warunek drugi można zapisać tak: najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą  $B$  jest całe  $H$ .

**STWIERDZENIE 11.** Niech  $B$  i  $B'$  będą bazami ortonormalnymi w przestrzeni Hilberta  $H$ . Wówczas  $B$  i  $B'$  są zbiorami równolicznymi.

**DOWÓD:** W przypadku wymiaru skończonego jest to fakt znany z algebry. Niech więc zbiory  $B$  i  $B'$  będą co najmniej  $\aleph_0$ . Dla skończonego podzbioru  $\{e_1, \dots, e_k\} \subset B$  niech  $W$  będzie podprzestrzenią rozpiętą przez ten podzbiór. Z twierdzenia o rzucie ortogonalnym, dla każdego  $b \in B'$

$$\|b\| = \|Pb\| + \|b - Pb\| \geq \|Pb\|,$$

gdzie  $P: H \rightarrow W$  jest rzutem ortogonalnym. Ponieważ układ wektorów  $\{e_1, \dots, e_k\}$  jest ortonormalny,

$$Pb = (e_1|b)e_1 + \dots + (e_k|b)e_k \quad \text{i} \quad \|Pb\|^2 = |(e_1|b)|^2 + \dots + |(e_k|b)|^2 \leq \|b\|^2 = 1.$$

Wynika stąd, że liczba wektorów  $e \in B$ , dla których  $|(e|b)| > \frac{1}{n}$  jest skończona dla każdego  $n$ . Zatem zbiór  $e \in B: (e|b) \neq 0$  jest przeliczalny. W iloczynie kartezjańskim  $B \times B'$  definiujemy podzbiór  $A = \{(e, b) \in B \times B': (e|b) \neq 0\}$ . Jest on mocy nie większej niż moc zbioru  $\mathbb{N} \times B$  i nie mniejszej niż moc zbioru  $B$  (dla każdego  $b \in B$  istnieje co najmniej jeden wektor  $b' \in B'$ , że  $(b|b') \neq 0$ ). Zbiór  $A$  jest nieskończony, więc moc  $\mathbb{N} \times B$  jest równa mocy  $B$ . Wniosujemy stąd, że moc  $A$  jest równa mocy  $B$ . Zamieniając rolami  $B$  i  $B'$  dostajemy tezę. ■

Mówimy, że przestrzeń Hilberta jest *ośrodkowa*, jeżeli ma przeliczalną bazę ortonormalną. Równoważnie, jeżeli ma przeliczalny zbiór gęsty.

**STWIERDZENIE 12.** Niech  $B$  będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta  $H$ . Wówczas dla każdego wektora  $v \in H$

$$v = \sum_{e \in B} (e|v)e. \tag{8}$$

**DOWÓD:** Z dowodu poprzedniego stwierdzenia wiemy, że tylko przeliczalna liczba wyrazów w sumie (8) jest różna od zera. Możemy więc ograniczyć się do przypadku przestrzeni ośrodkowej z bazą  $\{e_1, e_2, \dots\}$ . Oznaczmy przez  $W_n$  podprzestrzeń rozpiętą przez  $n$  pierwszych wektorów bazy. Niech  $P_n v = \sum_{i=1}^n (e_i|v)e_i$ . Oczywiście,  $P_n v \in W_n$  oraz  $v - P_n v \in W_n^\perp$ , czyli  $P_n v$  jest rzutem ortogonalnym  $v$  na  $W_n$ . Z dowodu twierdzenia o rzucie ortogonalnym wiemy, że

$$\|v - P_n v\| = \inf_{w \in W_n} \|v - w\|,$$

z czego wniosek, że ciąg  $\|v - P_n v\|$  jest malejący. Ponieważ  $\bigcup_n W_n$  jest zbiorem gęstym w  $H$ , ciąg  $\|v - P_n v\|$  maleje do zera. ■

Niech  $H$  będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Rozkład (8) indukuje odwzorowanie

$$I_B: H \rightarrow \ell^2: v \mapsto ((e_i|v)).$$

Odwzorowanie to zachowuje iloczyn skalarny: w oznaczeniach z dowodu Stwierdzenia 12

$$(v|w) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n v|P_n w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \overline{(e_i|v)}(e_i|w) = (((e_i|v))|((e_i|w))).$$

Oznacza to, że baza w ośrodkowej przestrzeni Hilberta zadaje jej izomorfizm (izometrię) z przestrzenią  $\ell^2$ .

**4.1. Ważny przykład.** Niech  $H = L^2([0, 2\pi])$ , tzn.  $H$  jest uzupełnieniem przestrzeni funkcji ciągłych (o wartościach zespolonych) na odcinku  $[0, 2\pi]$  z iloczynem skalarnym

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t)g(t)dt.$$

Niech  $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}$ . Sprawdzamy, że funkcje te tworzą układ ortonormalny w  $L^2([0, 2\pi])$ :

$$(e_l|e_k) = \int_0^{2\pi} e^{-ilt}e^{ikt}dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq l \\ 1 & \text{dla } k = l. \end{cases}$$

Funkcje  $\sin$  i  $\cos$  rozdzielają punkty w  $[0, 2\pi[$ , więc z zespolonej wersji twierdzenia Weierstrassa funkcje ciągłe na  $[0, 2\pi]$  z warunkiem  $f(0) = f(2\pi)$  można jednostajnie przybliżać wielomianami od  $e_1$  i  $e_{-1}$ . Ale  $(e_1)^k = e_k$ , więc powłoka liniowa układu  $(e_k)$  jest jednostajnie gęsta w  $C([0, 2\pi])$  (z warunkiem brzegowym), więc gęsta w  $L^2([0, 2\pi])$ . Rodzina  $B = (e_k)$  tworzy bazę w  $L^2([0, 2\pi])$ . Odwzorowanie  $I_B: L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2$  nazywa się transformatą Fouriera, a reprezentacja

$$L^2([0, 2\pi]) \ni f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

szeregiem Fouriera funkcji  $f$ .

## 5. Operatory w przestrzeni Hilberta.

**5.1. Sprzężenie hermitowskie.** Niech  $H$  będzie przestrzenią Hilberta i niech  $F \in \text{End}(H) = L(H, H)$ . Dla każdego  $w \in V$  odwzorowanie

$$H \ni v \mapsto (w|Fv) \in \mathbb{C}$$

jest liniowe, zatem na mocy twierdzenia o reprezentacji funkcjonału liniowego istnieje  $\tilde{w} \in V$  takie, że  $(w|Fv) = (\tilde{w}|v)$  dla każdego  $v$ . Oznaczmy  $\tilde{w} = F^\dagger w$ . Jak łatwo zauważyć, odwzorowanie  $F^\dagger$  jest liniowe (addytywność oczywista):

$$(F^\dagger \lambda v | w) = (\lambda v | F(w)) = \bar{\lambda}(v | F(w)) = \bar{\lambda}(F^\dagger v | w) = (\lambda F^\dagger v | w).$$

Nazywamy je *sprzężeniem hermitowskim* operatora  $F$ .

**Uwaga.** Sprzężenie hermitowskie operatora  $F$  możemy zdefiniować używając odwzorowania  $F_h: H \rightarrow H^*$ :

$$F^\dagger = F_h^{-1} \circ F^* \circ F_h,$$

lub odwzorowania  ${}_h F: H \rightarrow H^\#$ :

$$F^\dagger = {}_h F^{-1} \circ F^\# \circ {}_h F.$$

**STWIERDZENIE 13.** Dla  $F, G \in L(H)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  mamy

- (1)  $(F^\dagger)^\dagger = F$ ,
- (2)  $(F + G)^\dagger = F^\dagger + G^\dagger$ ,
- (3)  $(\lambda F)^\dagger = \bar{\lambda}F^\dagger$ ,
- (4)  $(F \circ G)^\dagger = G^\dagger \circ F^\dagger$ .

**DOWÓD:**

- (1) Dla  $v, w \in H$  mamy

$$(w|Fv) = (F^\dagger w|v) = \overline{(v|F^\dagger w)} = \overline{((F^\dagger)^\dagger v|w)} = (w|(F^\dagger)^\dagger v).$$

Stąd  $Fv = (F^\dagger)^\dagger v$  i  $F = (F^\dagger)^\dagger$ .

- (2) Oczywiście.
- (3) Mamy

$$((\lambda F)^\dagger w|v) = (w|(\lambda F)v) = (w|F(\lambda v)) = (F^\dagger w|\lambda v) = (\bar{\lambda}F^\dagger w|v).$$

Stąd  $(\lambda F)^\dagger = \bar{\lambda}F^\dagger$ .

- (4)  $((F \circ G)^\dagger w|v) = (w|F \circ Gv) = (F^\dagger w|Gv) = (G^\dagger \circ F^\dagger w|v)$ . ■

**Wniosek.** Przyporządkowanie  $F \mapsto F^\dagger$  jest antyliniowym izomorfizmem w przestrzeni  $L(H)$ .

DEFINICJA 14. Operator  $F: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  nazywamy hermitowskim, jeżeli  $F = F^\dagger$ , to znaczy dla wszystkich  $v, w \in \mathbf{H}$   $(w|Fv) = (Fw|v)$ .

Łatwo zauważyć, że jeżeli operatory  $F, G$  są hermitowskie, to  $F + G$  też jest hermitowski, a  $F \circ G$  na ogół nie jest hermitowski. Z kolei dla hermitowskiego  $F$ , operator  $\lambda F$  jest hermitowski wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

DEFINICJA 15. Operator  $F: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  nazywamy unitarnym, jeżeli jest surjekcją i dla wszystkich  $v, w \in \mathbf{H}$  mamy  $(Fv|Fw) = (v|w)$ .

STWIERDZENIE 16.

- i)  $F$  jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjekcją i dla wszystkich  $v \in \mathbf{H}$  mamy  $(Fv|Fv) = (v|v)$ .
- ii)  $F$  jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy  $F^\dagger F = Id$ .
- iii) Jeżeli  $F, G$  są unitarne, to  $F \circ G$  też jest unitarny.

DOWÓD:

- i) Wynika z formuły polaryzacyjnej (3) i (4).
- ii) Mamy  $(v|w) = (Fv|Fw) = (v|F^\dagger Fw)$ . Stąd  $F^\dagger F = Id$ .
- iii)  $(v|w) = (Gv|Gw) = (F(Gv)|F(Gw))$ . ■

Łatwo zauważyć, że suma operatorów unitarnych na ogół nie jest operatorem unitarnym. Z kolei dla  $F$  unitarnego  $\lambda F$  jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\lambda| = 1$ .

Teraz kilka słów o operatorach rzutowych. Operator  $P \in \mathbf{L}(\mathbf{H})$  taki, że  $P^2 = P$  nazywany jest operatorem rzutowym. Zadaje on rozkład  $\mathbf{H} = V \oplus W$  na sumę prostą podprzestrzeni domkniętych:  $V = \text{im } P = \ker(Id - P)$  i  $W = \ker P$ . Operator rzutowy  $P$  jest operatorem rzutu ortogonalnego, jeżeli  $\ker P = (\text{im } P)^\perp$ , to znaczy, przestrzeń wzdłuż której się rzutuje jest dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni na którą się rzutuje.

STWIERDZENIE 17.  $P: V \rightarrow V$  jest operatorem rzutu ortogonalnego wtedy i tylko wtedy, gdy  $P^2 = P$  i  $P = P^\dagger$ .

DOWÓD: Niech  $P^2 = P$  i  $P^\dagger = P$ . Równość  $P^2 = P$  oznacza, że  $P$  jest operatorem rzutowym. Mamy pokazać, że  $(\text{im } P)^\perp = \ker P$ . Niech  $v \in \ker P$  i niech  $w \in \text{im } P$ , tzn.,  $w = Pw'$ . Wówczas, ponieważ  $P = P^\dagger$ ,

$$(v|w) = (v|Pw') = (P^\dagger v|w') = (Pv|w) = 0.$$

$\text{im } P$  i  $\ker P$  są domknięte i rozpinają  $\mathbf{H}$ , więc  $\ker P = (\text{im } P)^\perp$ .

Założmy teraz, że  $P$  jest operatorem rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń  $V$ . Niech  $v, v_1 \in \mathbf{H}$  i niech  $v = w + w', v_1 = w_1 + w'_1$  gdzie  $w, w_1 \in V$  a  $w', w'_1 \in V^\perp$ . Mamy wówczas

$$(v|Pv_1) = (v|w_1) = (w|w_1) = (w|w_1 + w'_1) = (Pv|v_1).$$

Na koniec ciekawostka:

STWIERDZENIE 18. Jeżeli  $F: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  jest jednocześnie unitarny i hermitowski, to  $\frac{1}{2}(Id - F)$  jest operatorem rzutu ortogonalnego.

DOWÓD: Zauważmy, że  $\frac{1}{2}(Id - F)$  jest hermitowski. Ponadto

$$\left(\frac{1}{2}(Id - F)\right)^2 = \frac{1}{4}(Id - 2F + F^2) = \frac{1}{4}(Id - 2F + F^\dagger F) = \frac{1}{2}(Id - F).$$

Na mocy poprzedniego stwierdzenia dostajemy tezę. ■

## 6. Odwzorowania Fredholma i zwarte.

Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami Hilberta. Jak wiemy z Twierdzenia Riesz, możemy utożsamiać funkcjonały liniowe na przestrzeni Hilberta z elementami przestrzeni Hilberta. Możemy, ale nie musimy i w tym rozdziale robić tego nie będziemy. Niech  $F: X \rightarrow Y$  będzie odwzorowaniem liniowym i ciągłym. Odwzorowanie sprzężone

$$F^*: Y^* \rightarrow X^*: f \mapsto f \circ F$$

jest też ciągle (ograniczone) i jego norma jest równa normie  $F$ :

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} \|Fx\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|f\|=1} |\langle f, Fx \rangle| = \sup_{\|f\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\langle F^*f, x \rangle| = \sup_{\|f\|=1} \|F^*f\| = \|F^*\|$$

Interesować nas będzie równanie  $Fx = b$ . Warunkiem rozwiązalności jest  $b \in \text{im } F$ , więc pytanie sprowadza się do opisu obrazu odwzorowania  $F$ .

STWIERDZENIE 1.

$$\overline{\text{im } F} = (\ker F^*)^\circ = \{y \in Y \mid \langle g, y \rangle = 0 \ \forall g \in \ker F^*\}.$$

DOWÓD: Jeżeli  $y \in \text{im } F$ , to dla  $g \in \ker F^*$  mamy

$$\langle y, g \rangle = \langle Fx, g \rangle = \langle x, F^*g \rangle = 0.$$

W drugą stronę: jeżeli  $g \in (\ker F^*)^\circ$ , to dla każdego  $x \in X$

$$0 = \langle Fx, g \rangle = \langle x, F^*g \rangle$$

i stąd  $F^*g = 0$ . ■

Podstawowym dla dalszych rozważań jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 1. *Dwa warunki są równoważne:*

- (1)  $\dim \ker F < \infty$  i  $\text{im } F$  jest domknięty,
- (2) z każdego ciągu ograniczonego  $(x_n)$  takiego, że ciąg  $Fx_n$  jest zbieżny, można wybrać podciąg zbieżny.

DOWÓD:

$$(2) \Rightarrow (1)$$

Jeżeli wybierzemy ciąg  $(x_n)$  taki, że  $x_n \in \ker F$ , to można wybrać podciąg zbieżny. Stąd kula jednostkowa w  $\ker F$  jest zwarta, czyli wymiar  $\ker F$  jest skończony. Oznaczmy  $V = (\ker F)^\perp$ , ortogonalne dopełnienie  $\ker F$ . Indukowane odwzorowanie  $F: V \rightarrow Y$  jest injekcją. Pokażemy, że istnieje  $c$  takie, że dla  $x \in V$  zachodzi nierówność

$$\|x\| \leq c \|Fx\|. \tag{9}$$

Istotnie, gdyby takie  $c$  nie istniało, to dla każdego  $j$  można by znaleźć wektor  $x_j$  taki, że  $1 = \|x_j\| \geq j \|Fx_j\|$ . Dla takiego ciągu  $Fx_j \rightarrow 0$ , więc można wybrać podciąg  $(x_{j_k})$ , zbieżny do pewnego  $x$ . Oczywiście  $\|x\| = 1$  i  $x \in V$ , ale z ciągłości  $F$ ,  $Fx = 0$ . Sprzeczność, bo  $F$  na  $V$  jest injekcją.

Nierówność (9) oznacza, że odwzorowanie odwrotne (na  $\text{im } F$ ) jest ciągle, a ponieważ wykres jest domknięty, to nie można go przez ciągłość rozszerzyć. Stąd jego dziedzina, czyli  $\text{im } F$ , musi być domknięty.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Niech  $(x_j)$  będzie ciągiem ograniczonym i takim, że ciąg  $Fx_j$  jest zbieżny. Rozłożymy ten ciąg na sumę dwóch:  $x_j = y_j + z_j$ , gdzie  $y_j \in \ker F$  i  $z_j \in (\ker F)^\perp$ . Ciągi te są też ograniczone, bo  $\|x_j\|^2 = \|y_j\|^2 + \|z_j\|^2$ .  $\ker F$  jest wymiaru skończonego, więc można wybrać podciąg zbieżny  $(y_{j_k})$ .  $Fz_j = Fx_j$ , więc ciąg  $(Fz_j)$  jest zbieżny. Ale  $F: (\ker F)^\perp \rightarrow \text{im } F$  jest izomorfizmem ( $\text{im } F$  jest domknięty, więc odwrotne odwzorowanie jest ciągle), więc ciąg  $(z_j)$  jest zbieżny. Stąd ciąg  $x_{j_k} = y_{j_k} + z_{j_k}$  jest zbieżny. ■

**6.1. Odwzorowania zwarte.** Odwzorowanie liniowe i ciągle  $K: X \rightarrow Y$  nazywamy zwartym, jeżeli zbiory ograniczone przeprowadza w przewarte, tzn. z każdego ciągu ograniczonego  $(x_n)$  można wybrać podciąg  $x_{n_k}$  taki, że ciąg  $Kx_{n_k}$  jest zbieżny. Oczywiście jest, że złożenie odwzorowania ograniczonego (czyli ciągłego) ze zwartym jest odwzorowaniem zwartym (mówimy tylko o odwzorowaniach liniowych).

STWIERDZENIE 2. *Odwzorowanie dualne do odwzorowania zwartego jest odwzorowaniem zwartym*

DOWÓD: Niech  $K: X \rightarrow Y$  będzie odwzorowaniem zwartym, a  $C: X \rightarrow X^*$  izomorfizmem Riesz. Niech ciąg  $(g_n)$  w  $Y^*$  będzie ograniczony. Ciągi  $(K^*g_n)$  i  $(C^{-1}K^*g_n)$  są też ograniczone. Zatem istnieje podciąg  $g_{n_k}$  taki, że ciąg  $(KC^{-1}K^*g_{n_k})$  jest zbieżny (bo  $K$  jest zwarty). Mamy

$$\begin{aligned} \|K^*(g_n - g_m)\|^2 &= (C^{-1}K^*(g_n - g_m) | C^{-1}K^*(g_n - g_m)) \\ &= (C^{-1}(g_n - g_m) | KC^{-1}K^*(g_n - g_m)) \\ &\leq \|C^{-1}(g_n - g_m)\| \|KC^{-1}K^*(g_n - g_m)\| \\ &\leq M \|KC^{-1}K^*(g_n - g_m)\| \end{aligned}$$

bo ciąg  $(g_n)$  jest ograniczony. Ze zbieżności  $(\|KC^{-1}K^*(g_{n_k})\|)$  wynika zbieżność  $(K^*g_{n_k})$ .

■

Niech  $\Omega$  będzie obszarem ograniczonym w  $\mathbb{R}^n$ , z gładkim brzegiem. Przestrzeń  $H^s(\Omega)$  definiujemy jako uzupełnienie przestrzeni funkcji gładkich względem normy iloczynu skalarnego

$$(f | g)_s = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} D^{\alpha} \bar{f} D^{\alpha} g.$$

Równoważną normę (dla  $s > 0$ ) dostaniemy biorąc jako iloczyn skalarny odwzorowanie

$$(f, g) \mapsto \sum_{|\alpha|=s} \int_{\Omega} D^{\alpha} \bar{f} D^{\alpha} g + \int_{\Omega} \bar{f} g.$$

Przestrzeń  $H^s(\Omega)$  możemy też definiować jako przestrzeń funkcji z  $L^2(\Omega)$ , których pochodne dystrybucyjne do rzędu  $s$  też należą do  $L^2(\Omega)$ . Mamy oczywisty ciąg gęstych włożeń

$$H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \dots H^s(\Omega) \dots$$

Włożenia te są odwzorowaniami zwartymi (Lemat Rellicha). Mamy stąd dualny ciąg zwartych i gęstych włożeń

$$(H^0(\Omega))^* \subset (H^1(\Omega))^* \subset (H^2(\Omega))^* \subset \dots (H^s(\Omega))^* \dots$$

Utożsamiamy  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  z dualną do niej i oznaczamy  $(H^s(\Omega))^* = H^{-s}(\Omega)$ . Otrzymujemy w ten sposób ciąg zwartych i gęstych włożeń

$$\dots H^{-s}(\Omega) \supset \dots \supset H^{-1}(\Omega) \supset H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \dots H^s(\Omega) \dots \quad (10)$$

## 6.2. Odwzorowania Fredholma.

DEFINICJA 1. Odwzorowanie (liniowe i ciągłe)  $F: X \rightarrow Y$  nazywamy *Fredholma*, jeżeli  $\text{im } F$  jest podprzestrzenią domkniętą, a  $\dim \ker F$  oraz  $\dim Y / \text{im } F$  są skończone.

Ze Stwierdzenia 1 wynika, że  $\dim Y / \text{im } F = \dim \ker F^*$ . Przestrzeń  $Y / \text{im } F$  nazywana jest *kojędrem*  $F$ .

STWIERDZENIE 2. *Jeżeli  $F: X \rightarrow Y$  jest Fredholma, to dualne  $F^*: Y^* \rightarrow X^*$  jest też Fredholma.*

DOWÓD: Mamy  $\text{im } F = (\ker F^*)^\circ$  i stąd  $\dim \ker F^* = \dim Y / \text{im } F < \infty$ . Odwzorowanie  $F$  indukuje izomorfizm  $\tilde{F}: X / \ker F \rightarrow \text{im } F$ , więc też izomorfizm dualny

$$\tilde{F}^*: (\text{im } F)^* \rightarrow (X / \ker F)^*.$$

Ponieważ  $\text{im } F = (\ker F^*)^\circ$ , to  $(\text{im } F)^* = Y^* / \ker F^*$ , a z równości  $\overline{\text{im } F^*} = (\ker F)^\circ$  wynika

$$(X / \ker F)^* = (\ker F)^\circ = \overline{\text{im } F^*}.$$

Mamy zatem izomorfizm  $\tilde{F}^*: Y^* / \ker F^* \rightarrow \overline{\text{im } F^*}$ , a ponieważ  $\tilde{F}^* = \tilde{F}^*$  (sprawdzić!), to  $\overline{\text{im } F^*} = \text{im } F^*$ . Oczywiście  $\dim(X^* / \text{im } F^*) = \dim \ker F < \infty$ . ■

Bardzo ważny jest fakt, że zaburzenie odwzorowania Fredholma odwzorowaniem zwartym pozostaje odwzorowaniem Fredholma.

**TWIERDZENIE 3.** *Jeżeli  $F: X \rightarrow Y$  jest Fredholma, a  $K: X \rightarrow Y$  zwarty, to  $F + K: X \rightarrow Y$  jest też Fredholma.*

DOWÓD: Niech  $(x_n)$  będzie ograniczonym ciągiem w  $X$  takim, że ciąg  $((F + K)x_n)$  jest zbieżny. Ze zwartości  $K$  istnieje podciąg  $(x_{n_k})$  taki, że  $(Kx_{n_k})$  jest ciągiem zbieżnym. Zatem  $(Fx_{n_k})$  jest też zbieżny, a ponieważ  $F$  jest Fredholma, to istnieje podciąg zbieżny  $(x_{n_{k_l}})$ . Ze Twierdzenia 1  $\dim \ker(F + K) < \infty$  i obraz  $\text{im}(F + K)$  jest domknięty. Zastępując  $F, K$  przez ich dualne i korzystając ze Stwierdzeń 2, 2  $\dim \ker(F + K)^* < \infty$ . ■

**6.3. Zagadnienie brzegowe.** Dla prostoty, niech  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Niech  $B$  będzie funkcją symetryczną, biliniową i ciągłą na przestrzeni Hilberta  $X$ . Odpowiadające jej odwzorowanie liniowe  $X \rightarrow X^*$  jest też ciągłe, a z powodu symetrii  $B$ , samosprzężone. Prostym rachunkiem sprawdzamy, że jest to pochodna funkcji  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{2}B(x, x)$ .

Weźmy teraz, dla obszaru spójnego  $\Omega$ ,  $X = H^1(\Omega)$  i  $B(f, g) = \int_{\Omega} \sum_i f_{,i} g_{,i}$ . Widać, że  $B(f, g) = (f | g) - \int_{\Omega} f g$ , gdzie iloczyn skalarny jest w  $H^1(\Omega)$ . Zatem stowarzyszone odwzorowanie liniowe  $F: X \rightarrow X^*$  jest różnicą  $F = C_1 - C_0$ , gdzie  $C_1: X \rightarrow X^*$  jest izomorfizmem Riesza, a  $C_0: X \rightarrow X^*$  jest izomorfizmem Riesza  $H^0(\Omega) \rightarrow (H^0(\Omega))^*$ , złożonym z kanonicznymi włożeniami  $H^1(\Omega) \rightarrow H^0(\Omega)$  i  $(H^0(\Omega))^* \subset (H^1(\Omega))^*$ . Wiemy (10), że włożenia te są gęste i zwarte, zatem odwzorowanie  $C_0$  jest zwarte. Z Twierdzenia 3 wiemy, że odwzorowanie  $F$  jest Fredholma. Ponieważ forma  $B$  jest symetryczna,  $F$  jest odwzorowaniem samosprzężonym. Zatem  $\text{im } F = (\ker F)^\circ$ . Z dodatniości funkcji kwadratowej  $f \mapsto B(f, f)$  i z tego, że  $F$  jest pochodną funkcji  $\frac{1}{2}B(f, f)$ , z  $B(f, f) = 0$  wynika  $F(f) = 0$ . Zatem jądro  $F$  jest zbiorem zer funkcji kwadratowej  $B(f, f)$ . Mamy więc  $\ker F = \{f \mid f_{,i} = 0\}$ , czyli  $f$  z  $\ker F$  jest funkcją stałą. Zobaczmy, jak można interpretować  $F(f)$  dla gładkich funkcji. Z twierdzenia Gaussa-Greena,

$$\int_{\omega} \sum_i f_{,i} g_{,i} = - \int_{\Omega} (\Delta f) g + \int_{\partial\Omega} f_n g,$$

gdzie  $f_n$  jest składową normalną do brzegu gradientu funkcji  $f$ . Para  $(\rho, D_n)$  należy do obrazu  $f$  jeżeli  $-\int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} D_n = 0$ . W elektrostatyce ten warunek oznacza, że całkowity ładunek jest równy zero (tw. Gaussa).

## 7. Równania całkowe.

**7.1. Operator całkowy.** Dla prostoty, zajmijmy się równaniami całkowymi dla funkcji na odcinku  $I = [a, b]$ . Operatorem całkowym Fredholma nazywamy operator  $A$  postaci

$$Af(x) = \int_a^b K_A(x, y) f(y) dy.$$

Oszacujmy  $Af$  w normie  $L^2(I)$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b [Af(x)]^2 dx &= \int_a^b \left( \int_a^b K_A(x, y) f(y) dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b K_A^2(x, y) dy \int_a^b f^2(y) dy \right) dx = \int_a^b f^2(y) dy \int_a^b \int_a^b K_A^2(x, g) dy, \end{aligned}$$

czyli

$$\|Af\|_{L^2(I)} \leq \|K_A(x, y)\|_{L^2(I \times I)} \|f\|_{L^2(I)}.$$

Oznacza to, że  $K_A \in L^2(I \times I)$  definiuje ciągle operator  $A: L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  z szacowaniem normy  $\|A\| \leq \|K_A(x, y)\|_{L^2(I \times I)}$ .

Zauważmy, że

- (1)  $K_{A^*}(x, y) = K_A(y, x)$ ,
- (2)  $K_{AB}(x, y) = \int_a^b K_A(x, z) K_B(z, y) dz$ .

Pokażemy teraz, że operator całkowy jest zwarty. Przydatny tu będzie ogólniejszy fakt.

**TWIERDZENIE 4.**  $K: X \rightarrow X$  jest operatorem zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą, w normie operatorowej, operatorów skończenie-wymiarowych, tj. takich, których obraz jest wymiaru skończonego.

**DOWÓD:** Niech  $K$  będzie operatorem zwartym. Obraz kuli jednostkowej jest zbiorem prezwartym, czyli jego domknięcie jest zbiorem zwartym. Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończony zbiór  $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}$  w  $X$  taki, że  $\bigcup_i K(x_i, \varepsilon)$  zawiera obraz kuli jednostkowej. Oznacza to, że dla każdego  $\|x\| < 1$  odległość  $K(x)$  od przestrzeni  $V_\varepsilon$  rozpiętej na  $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}$  jest mniejsza od  $\varepsilon$ . Stąd wniosek, że  $\|K - P_\varepsilon \circ K\| \leq \varepsilon$ , gdzie  $P_\varepsilon$  jest rzutem ortogonalnym na  $V_\varepsilon$ .  $K$  jest granicą normową  $P_\varepsilon \circ K$ .

W drugą stronę. Niech  $\|K - K_n\| < \frac{1}{n}$ , gdzie  $K_n$  jest operatorem skończenie-wymiarowym. Weźmy ciąg ograniczony  $x_j$ ,  $\|x_j\| \leq 1$ . Istnieje podciąg istniejący podciąg  $x_{j(1,k)}$  taki, że ciąg  $K_1(x_{j(1,k)})$  jest zbieżny. Następnie wybieramy podciąg  $x_{j(2,k)}$  ciągu  $x_{j(1,k)}$ , tak, by ciąg  $K_2(x_{j(2,k)})$  był zbieżny, itd. Podciąg  $x_{j(n,k)}$  jest więc taki, że dla  $m \leq n$  ciąg  $k \mapsto K_m(x_{j(n,k)})$  jest zbieżny. Można przy tym tak wybierać te podciągi, by dla  $k, l > n$  zachodziła nierówność  $\|K_n(x_{j(n,k)}) - K(x_{j(n,l)})\| < \frac{1}{n}$ . Ciąg  $K(x_{j(n,n)})$  jest zbieżny, bo dla  $m > n$

$$\begin{aligned} \|K(x_{j(n,n)}) - K(x_{j(m,m)})\| &\leq \|K(x_{j(n,n)}) - K_n(x_{j(n,n)})\| \\ &\quad + \|K_n(x_{j(n,n)}) - K_n(x_{j(m,m)})\| + \|K_n(x_{j(m,m)}) - K(x_{j(m,m)})\| \leq \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

■

Dla pokazania, że operator całkowy  $A$  jest zwarty, wystarczy udowodnić, że jest granicą operatorów skończenie-wymiarowych.  $L^2(I)$  można wybrać przeliczalną bazę ortonormalną  $(\varphi_n)$ . Funkcje  $\varphi_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\varphi_m(y)$  tworzą bazę ortonormalną w  $L^2(I \times I)$ . Mamy więc

$$K_A = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \varphi_{nm}, \quad Af = \sum_{n,m} \alpha_{nm} (\varphi_n | f) \varphi_m.$$

Oznaczmy przez  $P_N$  rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez  $N$  pierwszych wektorów bazy. Mamy

$$P_N A P_N f = \sum_{n,m=1}^N \alpha_{nm} (\varphi_n | f) \varphi_m.$$

Stąd  $P_N A P_N \rightarrow A$  w normie operatorowej, bo jądra zbiegają w  $L^2(I \times I)$ . Zajmiemy się teraz równaniem całkowym

$$(Id - \lambda A)f = g,$$

gdzie  $A$  jest, jak zwykle, operatorem całkowym z jądrem  $K_A$ . Istotna jest zwartość tego operatora.

**TWIERDZENIE 5 ALTERNATYWA FREDHOLMA.** Niech  $A: X \rightarrow X$  będzie zwartym odwzorowaniem przestrzeni Hilberta  $X$  w siebie. Możliwe są dwie, wykluczające się sytuacje

- (1) dla każdego  $g \in X$  istnieje rozwiązanie równania  $(Id - A)f = g$ ,
- (2) równanie jednorodne  $(Id - A)f = 0$  ma nietrywialne rozwiązanie.

**DOWÓD:** Twierdzenie to jest oczywiste w przypadku  $A$  samosprężonego, bo wtedy obraz jest anihilatorem jądra (operator  $I - A$  jest Fredholma, więc obraz jest domknięty). W przypadku ogólnym wystarczy pokazać, że  $\dim \ker(Id - A) = \dim \operatorname{coker}(Id - A)$ . Istotnie, równość ta oznacza, że  $\ker(Id - A) = \{0\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{im}(Id - A) = X$ . Dowód przeprowadzimy w trzech etapach. Oznaczmy  $T = Id - A$ .

- i)  $\dim \operatorname{coker} T = 0 \Rightarrow \dim \ker T = 0$   
 oznaczymy  $M_n = \ker T^n$ . Oczywiście  $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ . Ciąg ten stabilizuje się, bo gdyby  $M_n \subsetneq M_{n+1}$  dla każdego  $n$ , to istniałby ciąg ortonormalny  $(f_n)$  taki, że  $f_n \in M_n$ ,  $f_n \notin M_{n+1}$ . Dla takiego ciągu

$$\|Af_n - Af_m\|^2 = \|f_n - (Tf_n + f_m - Tf_m)\|^2 = \|f_n\|^2 + \|Tf_n + f_m - Tf_m\|^2 \geq \|f_n\|^2 = 1$$

dla  $n > m$ , bo wtedy  $(Tf_n + f_m - Tf_m) \in M_{n-1}$ , a  $f_n \perp M_{n-1}$ . Czyli z ciągu  $Af_n$  nie można wybrać podciągu zbieżnego, co jest sprzeczne ze zwartością  $A$ . Zatem ciąg  $M_n$  stabilizuje się. Przypuśćmy teraz, że  $\dim \ker T \neq 0$ , tzn. istnieje niezerowy  $f_1$  taki, że  $Tf_1 = 0$ . Ale  $\operatorname{im} T$  jest całą przestrzenią, więc istnieje  $f_2$  takie, że  $Tf_2 = f_1$ . Podobnie  $f_2 = Tf_3$  itd. Ciąg  $(f_n)$  ma tę własność, że  $f_n \in M_n$  i  $f_n \notin M_{n-1}$ . Istnienie takiego ciągu oznacza, że ciąg podprzestrzeni  $(M_n)$  nie stabilizuje się. Sprzeczność.

- ii)  $\dim \ker T = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{coker} T = 0$   
 Wystarczy zauważyć, że  $\dim \ker T = \dim \operatorname{coker} T^*$ ,  $\dim \operatorname{coker} T = \dim \ker T^*$  i zastosować i) do operatora  $T^*$ .
- iii)  $\dim \ker T = \dim \operatorname{coker} T$

Niech  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  będzie bazą  $\ker T$ , a  $(\psi_1, \dots, \psi_m)$  bazą przestrzeni dopełniającej  $\operatorname{im} T$ . Przypuśćmy, że  $m > n$ . Modyfikujemy operator  $A$  kładąc

$$\tilde{A} = A - \sum_{i=1}^n (\cdot | \varphi_i) \psi_i, \quad \tilde{T} = Id - \lambda \tilde{A}$$

$\tilde{A}$  jest operatorem zwartym jak suma zwartego i skończenie-wymiarowego, więc możemy stosować ii) do  $\tilde{T}$ . Jeżeli  $\tilde{T}f = 0$ , to  $Tf = 0$  i  $\sum_{i=1}^n (f | \varphi_i) \psi_i = 0$ , a stąd  $(f | \varphi_i) = 0$ . Zatem  $f = 0$ . Sprzeczność, bo z  $m > n$  wynika, że jądro  $\tilde{T}$  nie jest zerowe. ■

**7.2. Wzory Fredholma.** Spróbujmy rozwiązać równanie

$$(Id - \lambda A)f = g, \quad Af(x) = \int_a^b K_A(x, y)f(y)dy. \quad (11)$$

W pierwszym odruchu piszemy  $g = (Id - \lambda A)^{-1}f$  i

$$(Id - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{Id - \lambda A} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k, \quad (12)$$

ale gwarancję zbieżności mamy tylko w przypadku  $\|\lambda A\| < 1$ , co nam nie wystarcza.

Przedstawmy  $(Id - \lambda A)^{-1}$  w postaci  $Id + \lambda R$  i spróbujmy wyznaczyć operator  $R$ , zwany *rezolwentą* równania. Jak łatwo zauważyć,

$$R = \frac{A}{Id - \lambda A}.$$

Ponieważ  $A$  jest operatorem zwartym, to także  $R$  jest operatorem zwartym. Może całkowym? Jeżeli tak, to jego jądro  $\mathcal{R}$  nazywamy *jądrem rozwiązującym*. Ponieważ mamy tożsamość

$$(Id - \lambda A)R = A,$$

to jądro rozwiązujące spełnia (jeżeli istnieje) równanie

$$\mathcal{R}(x, y) - \lambda \int_a^b K_A(x, z)\mathcal{R}(z, y)dz = K_A(x, y). \quad (13)$$

Oznaczmy

$$K_A \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix} = \det[K(x_i, y_j)] \quad (14)$$

i zdefiniujmy

$$d(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} \int_a^b K_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} dy_1 + \cdots + \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} \int \cdots \int K_A \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} dy_1 \cdots dy_n + \cdots \quad (15)$$

oraz

$$d(x, y; \lambda) = K_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{1!} \int_a^b K_A \begin{pmatrix} x & y_1 \\ y & y_1 \end{pmatrix} dy_1 + \cdots \\ + \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} \int \cdots \int K_A \begin{pmatrix} x & y_1 & \cdots & y_n \\ y & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} dy_1 \cdots dy_n + \cdots \quad (16)$$

$d(\lambda)$  nazywane jest *wyznacznikiem Fredholma*.

TWIERDZENIE 6.

- (1) Szeregi  $d(\lambda)$  i  $d(x, y; \lambda)$  mają nieskończony promień zbieżności.
- (2)  $\mathcal{R}(x, y) = \frac{d(x, y; \lambda)}{d(\lambda)}$ .

DOWÓD: Skorzystamy z nierówności Hadamarda

$$|\det[a_{ij}]| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Wynika z niej, że jeżeli  $\sup |K_A(x, y)| = M$ , to

$$\left| K_A \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \right| \leq M^m m^{\frac{m}{2}}.$$

Jeżeli więc oznaczymy przez  $a_n$  współczynnik przy  $\lambda^n$  w rozwinięciu  $d(\lambda)$ , to

$$|a_n| \leq \frac{M^n n^{\frac{n}{2}}}{n!} (b-a)^n$$

i stąd

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq M(b-a) \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem promień zbieżności szeregu (15) jest nieskończony. Podobnie pokazujemy, że promień zbieżności szeregu (16) jest nieskończony.

Zauważmy teraz, że z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny mamy tożsamość

$$\begin{aligned}
K_A \begin{pmatrix} x & y_1 & \cdots & y_n \\ y & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} &= \\
&K_A(x, y)K_A \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y & \cdots & y_n \end{pmatrix} - K_A(x, y_1)K_A \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} + \cdots \\
&+ (-1)^k K_A(x, y_k)K_A \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \end{pmatrix} + \cdots \\
&= K_A(x, y)K_A \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y & \cdots & y_n \end{pmatrix} - K_A(x, y_1)K_A \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} - \cdots \\
&\quad - K_A(x, y_k)K_A \begin{pmatrix} y_k & y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y & y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \end{pmatrix} - \cdots
\end{aligned}$$

czyli wszystkie składniki, począwszy od drugiego, dają ten sam wkład do całki

$$\int \cdots \int K_A \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} dy_1 \cdots dy_n.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
\int \cdots \int K_A \begin{pmatrix} x & y_1 & \cdots & y_n \\ y & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} dy_1 \cdots dy_n &= K_A(x, y) \int \cdots \int K_A \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} dy_1 \cdots dy_n \\
&- n \int \cdots \int K_A(x, s)K_A \begin{pmatrix} s & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ y & y_1 & \cdots & y_{n-1} \end{pmatrix} ds dy_1 \cdots dy_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dostajemy stąd tożsamość

$$d(x, y; \lambda) = K_A(x, y)d(\lambda) + \lambda \int K_A(x, s)d(s, y; \lambda)ds,$$

czyli  $\frac{d(x, y; \lambda)}{d(\lambda)}$  jest rozwiązaniem równania rezolwenty (13). ■

PRZYKŁAD 1. Niech  $K_A = \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y)$ . Mamy w tym przypadku  $K_A \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = 0$  dla  $n > m$ , czyli szeregi (15) i (16) są sumami pierwszych  $m + 1$  wyrazów.

Na przykład, rozpatrzmy równanie

$$f(x) + 2 \int_a^b (x + y)f(y)dy = g(x),$$

czyli  $K_A(x, y) = (x + y)$  i  $\lambda = -2$ . Tutaj

$$K_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K_A(x, y) = x + y, \quad K_A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 \end{vmatrix},$$

i stąd

$$d(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^1 2y_1 dy_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \iint_0^1 (4y_1 y_2 - (y_1 + y_2)^2) dy_1 dy_2 = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12},$$

$$\begin{aligned}
d(x, y; \lambda) &= x + y - \lambda \int_0^1 (2y_1(x + y) - (x + y_1)(y_1 + y)) dy_1 \\
&= x + y - \lambda(x + y) + \lambda xy + \frac{1}{2} \lambda(x + y) + \frac{1}{3} \lambda.
\end{aligned}$$

W szczególności,

$$d(-2) = 1 + 2 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}, \quad d(x, y; -2) = 2(x + y) - 2xy - \frac{2}{3}.$$

Dostajemy stąd rezolwentę

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{3}{4}(x + y) - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}$$

i rozwiązanie

$$f(x) = g(x) - 2 \int_0^1 \left( \frac{3}{4}(x + y) - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{4} \right) g(y) dy$$