

ANALIZA FUNKCJONALNA II

1. Rachunek funkcyjny w algebrach.

1.1. Ogólnie o algebrach. Algebrą nazywamy przestrzeń wektorową \mathfrak{A} wyposażoną w działanie mnożenia rozdzielnego względem dodawania:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB.$$

Jeżeli ponadto mnożenie jest działaniem łącznym, to mówimy, że algebra jest *łączna*. Warto tu zwrócić uwagę na algebry, dla których spełniony jest warunek (tożsamość Jacobiego):

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C + B \circ (A \circ C).$$

Algebry takie nazywane są *algebrami Liego*. Z każdej algebry łącznej \mathfrak{A} możemy dostać algebrę Liego z działaniem

$$[A, B] = AB - BA.$$

W dalszym ciągu będziemy się zajmować wyłącznie algebrami łącznymi nad ciałem liczb zespolonych.

Jednością w algebrze \mathfrak{A} nazywamy element $1_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ taki, że dla każdego $A \in \mathfrak{A}$ zachodzi

$$A1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{A}}A = A.$$

Jeżeli jedność istnieje, to tylko jedna. Istotnie, jeżeli $1_{\mathfrak{A}}$ i $1'_{\mathfrak{A}}$ są jednościami, to

$$1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{A}}1'_{\mathfrak{A}} = 1'_{\mathfrak{A}}.$$

PRZYKŁADY 1.

- (1) Przestrzeń $C(I)$ funkcji ciągłych na odcinku $]0, 1]$ ze zwykłym mnożeniem funkcji jest algebrą przemianą z jednością.
- (2) Podprzestrzeń $C_0(I) \subset C(I)$ funkcji mających granicę zero w zerze jest algebrą bez jedności.
- (3) Niech V będzie przestrzenią wektorową. Przestrzeń $L(V)$ odwzorowań liniowych V ze składaniem odwzorowań jako mnożeniem jest algebrą łączną z jednością. Jednością jest odwzorowanie tożsamościowe.
- (4) Jeżeli \mathfrak{A} jest algebrą bez jedności, to możemy ją rozszerzyć do algebry z jednością $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ kładąc

$$(A, \lambda)(B, \mu) = (AB + \lambda B + \mu A, \lambda\mu).$$

Jedynką jest element $(0, 1)$

Niech \mathfrak{A} będzie algebrą z jednością. $A \in \mathfrak{A}$. *Lewym odwrotnym* do A nazywamy $B \in \mathfrak{A}$ taki, że $BA = 1_{\mathfrak{A}}$. Podobnie definiujemy *prawy odwrotny*.

PRZYKŁADY 2.

- (1) W algebrze $C(I)$ funkcji ciągłych na odcinku $]0, 1]$ elementy z $C_0(I)$ nie mają ani lewego ani prawego odwrotnego.
- (2) Niech ℓ będzie przestrzenią wektorową ciągów liczbowych i niech $\mathfrak{A} = L(\ell)$. Rozpatrmy odwzorowanie $L, R, L' \in L(\ell)$ zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} L((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (a_2, a_3, a_4, \dots) \\ R((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (0, a_1, a_2, a_3, \dots) \\ L'((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (a_1 + a_2, a_3, a_4, \dots) \end{aligned} \quad (1)$$

Widać, że $LR = Id$, $RL \neq Id$ oraz $L'R = Id$. Wynika stąd, że istnienie lewego (prawego) odwrotnego nie gwarantuje istnienia prawego (lewego) odwrotnego i że lewy (prawy) odwrotny nie są wyznaczone jednoznacznie.

Jeżeli jednak istnieją lewy i prawy odwrotny do A , to muszą być równe. Istotnie, jeżeli $BA = AC = 1_{\mathfrak{A}}$, to

$$B = B1_{\mathfrak{A}} = B(AC) = (BA)C = 1_{\mathfrak{A}}C = C.$$

Wynika stąd też, że jeżeli istnieją lewy i prawy odwrotny do A , to są one wyznaczone jednoznacznie. Element algebry, dla którego istnieją lewy i prawy odwrotny, nazywamy *odwracalnym* i lewy (prawy) odwrotny oznaczamy A^{-1} . Jeżeli A, B są elementami odwracalnymi, to

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}. \quad (2)$$

I jeszcze jedno ważne pojęcie: podalgebrę $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywamy *lewostronnym (prawostronnym) ideałem*, jeżeli dla dowolnych $A \in \mathfrak{A}$ i $B \in \mathfrak{B}$ mamy $BA \in \mathfrak{B}$ ($AB \in \mathfrak{B}$). Ideał dwustronny nazywać będziemy po prostu ideałem. Ideał \mathfrak{B} nazywamy *właściwym*, jeżeli nie jest całą algebrą \mathfrak{A} .

STWIERDZENIE 1. *Jeżeli $A \in \mathfrak{A}$ jest elementem odwracalnym, to nie należy do żadnego lewostronnego (prawostronnego) ideału właściwego.*

DOWÓD: Jeżeli A należy do lewostronnego ideału właściwego \mathfrak{B} , to $1_{\mathfrak{A}} = AA^{-1} \in \mathfrak{B}$. Stąd dla dowolnego $B \in \mathfrak{A}$ mamy $A = 1_{\mathfrak{A}}A \in \mathfrak{B}$, czyli $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Sprzeczność, bo \mathfrak{B} jest ideałem właściwym. ■

1.2. Spektrum elementu algebry. Niech \mathfrak{A} będzie algebrą z jednością i niech $A \in \mathfrak{A}$. Zbiorem rezolwentowym elementu A nazywamy zbiór

$$\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : z1_{\mathfrak{A}} - A \text{ jest odwracalny w } \mathfrak{A}\}. \quad (3)$$

Widmem (spektrum) $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A)$ elementu A nazywamy dopełnienie zbioru $\text{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$ w \mathbb{C}

$$\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) = \mathbb{C} \setminus \text{rs}_{\mathfrak{A}}(A).$$

Element widma λ nazywamy *wartością własną* jeżeli $\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A$ ma nietrywialne jądro. Zbiór wartości własnych nazywamy *widmem punktowym (czysto punktowym)* i oznaczamy $\text{sp}_p(A)$.

PRZYKŁAD 3. Niech R, L będą jak w przykładzie 2. Łatwo zauważyć, że operator

$$z1_{\mathfrak{A}} - R: (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (za_1, za_2 - a_1, za_3 - a_2, \dots)$$

jest odwracalny dla $z \neq 0$ i nie jest odwracalny (nie jest surjekcją) dla $z = 0$. Stąd $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(R) = \{0\}$. Podobnie, $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(LR) = \text{sp}_{\mathfrak{A}}(Id) = \{1\}$, zaś

$$z1_{\mathfrak{A}} - RL: (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (za_1, za_2 - a_2, za_3 - a_3, \dots)$$

nie jest odwracalny tylko dla $z = 0, 1$ i stąd $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(RL) = \{0, 1\}$.

TWIERDZENIE 1.

- (1) Dla każdej pary $A, B \in \mathfrak{A}$ mamy równość $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(AB) \cup \{0\} = \text{sp}_{\mathfrak{A}}(BA) \cup \{0\}$.
- (2) Jeżeli $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ i $A \in \mathfrak{B}$, to $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) \subset \text{sp}_{\mathfrak{B}}(A)$.
- (3) Jeżeli $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem algebr z jednością, to $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) \supset \text{sp}_{\varphi(\mathfrak{A})}(\varphi(A))$.

DOWÓD:

- (1) Niech $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(AB)$ i niech $z \neq 0$. Oznacza to, że istnieje element odwrotny do $z1_{\mathfrak{A}} - AB$. Oznaczmy go przez C . Sprawdźmy, że $z^{-1}(1_{\mathfrak{A}} + BCA)$ jest elementem odwrotnym do $z1_{\mathfrak{A}} - BA$:

$$\begin{aligned} z^{-1}(1_{\mathfrak{A}} + BCA)(z1_{\mathfrak{A}} - BA) &= 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}(BA + BCABA) \\ &= 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}B(1_{\mathfrak{A}} + CAB)A = 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}BC(z1_{\mathfrak{A}} - AB + AB)A \\ &= 1_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

i podobnie z drugiej strony. Zatem $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(BA)$.

- (2) Oczywiście.
- (3) Ponieważ φ jest homomorfizmem algebr z jednością, to $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$ i w konsekwencji, $AB = 1_{\mathfrak{A}}$ implikuje $\varphi(A)\varphi(B) = 1_{\mathfrak{B}}$. Zatem obraz elementu odwracalnego jest odwracalny i $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$ implikuje $z \in \text{rs}_{\varphi(\mathfrak{A})}$, $\text{rs}_{\mathfrak{A}}(A) \subset \text{rs}_{\varphi(\mathfrak{A})}$.

■

Uwaga: przykłady 3 pokazują, że dołączenie zera do spektrum w pierwszym punkcie twierdzenia jest istotne.

Element $A \in \mathfrak{A}$ nazywamy:

- (1) *idempotentnym*, jeżeli $A^2 = A$,
- (2) *nilpotentnym rzędu k* , jeżeli $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$,
- (3) *quasi-nilpotentnym*, jeżeli $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) = \{0\}$.

STWIERDZENIE 2.

- (1) *Element nilpotentny jest quasi-nilpotentny.*
- (2) *Jeżeli P jest elementem idempotentnym, różnym od zera i jedności, to $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(P) = \{0, 1\}$.*

DOWÓD:

- (1) Niech $z \neq 0$. W szeregu $\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}A^j$ tylko skończona liczba wyrazów jest różna od zera, więc suma szeregu ma sens. Pokazujemy, że jest to element odwrotny do $(z1_{\mathfrak{A}} - A)$:

$$(z1_{\mathfrak{A}} - A) \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}A^j = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}A^j(z1_{\mathfrak{A}} - A) = \sum_{j=0}^{\infty} (z^{-j}A^j - z^{-j-1}A^{j+1}) = 1_{\mathfrak{A}}.$$

Zatem $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$. Oczywiście zero należy do spektrum, bo nilpotentny element nie jest odwracalny (gdyby A był odwracalny, to również A^k byłby odwracalny).

- (2) Dla $z \neq 0, 1$ sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że $(z-1)^{-1}P + z^{-1}(1-P)$ jest odwrotnym do $(z1_{\mathfrak{A}} - P)$. Wystarczy zauważyć, że $P(1_{\mathfrak{A}} - P) = 0$, że $z1_{\mathfrak{A}} - P = (1-z)P + z(1_{\mathfrak{A}} - P)$ i że $(1_{\mathfrak{A}} - P)$ jest też idempotentny. Mamy zatem $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(P)$. Różny od jedynki element idempotentny nie jest odwracalny, bo należy do prawostronnego ideału właściwego

$$\mathfrak{B} = \{A \in \mathfrak{A} : A(1_{\mathfrak{A}} - P) = 0\}.$$

Stąd $0 \in \text{sp}_{\mathfrak{A}}(P)$. Jeżeli P jest różny od zera, to $(1_{\mathfrak{A}} - P)$ jest różnym od jedynki elementem idempotentnym, czyli nie jest odwracalny. Stąd $1 \in \text{sp}_{\mathfrak{A}}(P)$.

■

Niech A, B będą komutującymi elementami algebry, tzn. $AB = BA$. Oczywiście jest, że wówczas również komutują B i $(z1_{\mathfrak{A}} - A)$. Pokażemy, że dla $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$ komutują także B i elementy postaci $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$. Istotnie, wystarczy równość $(z1_{\mathfrak{A}} - A)B = B(z1_{\mathfrak{A}} - A)$ wymnożyć stronami przez $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$.

Niech $\mathfrak{A}(A)$ będzie algebrą rozpiętą przez A i $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$, gdzie $z \in \text{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$. Jest oczywiście, że jest to algebra przemienna z jednością. Jest to najmniejsza algebra wśród algebr \mathfrak{C} takich, że $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) = \text{sp}_{\mathfrak{C}}(A)$.

1.3. Twierdzenie spektralne dla algebr. Niech K będzie podzbiorem \mathbb{C} . Oznaczmy przez $\text{Rat}(K)$ zbiór funkcji wymiernych z biegunami poza K . Zbiór ten jest algebrą z jednością. Niech teraz \mathfrak{A} będzie algebrą z jednością, $A \in \mathfrak{A}$ i $f \in \text{Rat}(\text{sp}(A))$. Funkcja f jest ilorazem wielomianów $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, przy czym $q(z) \neq 0$ dla $z \in \text{sp}(A)$. Stąd $q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$, gdzie $z_i \notin \text{sp}(A)$. Zdefiniujmy

$$f(A) = p(A)(A - z_1)^{m_1} \cdots (A - z_n)^{m_n}. \quad (4)$$

Oczywiście jest, że $f(A) \in \mathfrak{A}(A)$ i że nie zależy od porządku czynników w (4).

TWIERDZENIE 2 (SPEKTRALNE). *Odwzorowanie*

$$\text{Rat}(\text{sp}(A)) \ni f \mapsto f(A) \in \mathfrak{A}(A) \subset \mathfrak{A} \quad (5)$$

jest homomorfizmem algebr z jednością. Ponadto,

- (A) jeżeli $\pi: \text{Rat}(\text{sp}(A)) \rightarrow \mathfrak{A}$ jest homomorfizmem algebr z jednością takim, że funkcję $\text{id}_{\mathbb{C}}: z \mapsto z$ przeprowadza w A , to $\pi(f) = f(A)$,
- (B) $\text{sp}(f(A)) = f(\text{sp}(A))$,
- (C) jeżeli $f \in \text{Rat}(\text{sp}(A))$ i $g \in \text{Rat}(\text{sp}(f(A)))$, to $g \circ f(A) = g(f(A))$.

DOWÓD: Bezpośrednio z definicji wynika, że $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$. Prostym rachunkiem pokazujemy też, że $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$. Mamy więc homomorfizm. Udowodnimy teraz (A). Wystarczy pokazać, że jeżeli $\lambda \in \text{rs}(A)$, to

$$\pi((\lambda - \text{id})^{-1}) = (\lambda - A)^{-1}. \quad (6)$$

Wiemy, że $\pi(\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}}) = \lambda 1_{\mathfrak{A}} - A$. Ponadto, $(\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}})^{-1} \in \text{Rat}(\text{sp}(A))$ i $(\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}})^{-1}(\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}}) = 1$. Stąd, ponieważ π jest homomorfizmem,

$$\pi((\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}})^{-1})(\lambda - A) = \pi((\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}})^{-1})\pi(\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}}) = \pi((\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}})^{-1})(\lambda - \text{id}_{\mathbb{C}}) = 1_{\mathfrak{A}},$$

co dowodzi prawdziwość wzoru (6). Wykazaliśmy więc punkt (A).

Aby udowodnić punkt (B) wykażemy najpierw zawieranie

$$\text{sp}(f(A)) \subset f(\pi(A)). \quad (7)$$

Niech $\mu \notin f(\text{sp}(A))$, wówczas funkcja $z \mapsto f(z) - \mu$ jest różna od zera na $\text{sp}(A)$, czyli $g: z \mapsto (f(z) - \mu)^{-1}$ należy do $\text{Rat}(\text{sp}(A))$. Stąd jest dobrze określony element algebry $\pi(g)$. Łatwo sprawdzamy, że $\pi(g)(f(A) - \mu) = 1_{\mathfrak{A}}$, czyli $\mu \in \text{rs}(A)$. Oznacza to zawieranie (7).

Teraz wykażemy zawieranie

$$\text{sp}(f(A)) \supset f(\pi(A)). \quad (8)$$

Niech bowiem $\mu \notin \text{sp}(f(A))$, czyli istnieje $(f(A) - \mu)^{-1}$. Jeżeli μ nie należy do obrazu f , to również $\mu \notin f(\text{sp}(A))$. Niech więc $\mu = f(\lambda)$. Oznacza to, że $f(\lambda) - \mu = 0$ i funkcja wymierna $h: z \mapsto (f(z) - \mu)(z - \lambda)^{-1}$ należy do $\text{Rat}(\text{sp}(A))$. Stąd $h(A)$ jest dobrze zdefiniowanym elementem algebry \mathfrak{A} . Sprawdzamy, że $h(A)(f(A) - \mu)^{-1}$ jest elementem odwrotnym do $(\lambda - A)$:

$$(\lambda - A)h(A)(f(A) - \mu)^{-1} = h_1(A)(f(A) - \mu)^{-1},$$

gdzie $h_1(z) = (\lambda - z)h(z) = f(z) - \mu$ i $h_1(A) = (f(A) - \mu)$. Zatem $\lambda \notin \text{sp}(A)$ i $\mu \notin f(\text{sp}(A))$, czyli mamy zawieranie (8).

Pozostaje do udowodnienia punkt (C). Ponieważ $(g_1 \cdot g_2) \circ f = (g_1 \circ f) \cdot (g_2 \circ f)$ oraz dla odwracalnego g mamy $g^{-1} \circ f = (g \circ f)^{-1}$, to wystarczy rozpatrzeć przypadek $g(z) = z - \lambda$, a dla tej funkcji równość do udowodnienia jest oczywista. ■

2. Rachunek funkcyjny w algebrach Banacha.

2.1. Algebry Banacha.

DEFINICJA 1. *Algebrą Banacha* nazywamy łączną algebrę, która jest, jako przestrzeń wektorowa, przestrzenią Banacha i dla której działanie mnożenia jest ciągłe.

Ciągłość mnożenia w algebrze Banacha $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ jest równoważna stwierdzeniu, że istnieje dodatnia liczba rzeczywista c taka, że dla $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\|AB\| \leq c\|A\|\|B\|. \quad (9)$$

PRZYKŁAD 4. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $B(X)$ przestrzenią operatorów (odwzorowań liniowych i ciągłych) w X . Przypomnijmy, że normę w $B(X)$ definiujemy wzorem

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| \quad \text{i stąd} \quad \|A(x)\| \leq \|A\|\|x\|. \quad (10)$$

Mnożenie definiujemy jako składanie operatorów. Z poprzedniego rozdziału wiemy, że z tym mnożeniem $B(X)$ jest algebrą (podalgebrą wszystkich odwzorowań liniowych X w siebie). Wiemy też, że

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|AB(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\|\|B(x)\| = \|A\|\|B\|, \quad (11)$$

czyli mamy nierówność (9) ze współczynnikiem $c = 1$. $B(X)$ jest więc algebrą Banacha z jednością (odzworowanie identycznościowe) i $\|\text{id}\| = 1$.

Pokażemy, że każda algebra Banacha jest domkniętą podalgebrą algebry operatorów pewnej przestrzeni Banacha.

TWIERDZENIE 3. Niech \mathfrak{A} będzie algebrą Banacha. Istnieje przestrzeń Banacha X taka, że \mathfrak{A} jest algebrą izomorficzną pewnej domkniętej podalgebry $B(X)$.

DOWÓD: Przyjmijmy $X = \mathfrak{A}$ jeżeli \mathfrak{A} jest z jednością i $X = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ gdy jest bez jedności. X jest algebrą Banacha z jednością e . Definiujemy odwzorowanie $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow B(X)$

$$\varphi(A)x = T_A x,$$

gdzie T_A jest operatorem mnożenia z lewej strony przez A . Liniowość i ciągłość T_A jest oczywista. Jeżeli $\varphi(A) = 0$, to w szczególności $A = T_A e = 0$, czyli φ jest injekcją. Jest też homomorfizmem algebr (algebr z jednością), co wynika z łączności mnożenia. Ponadto, jeżeli wprowadzimy w \mathfrak{A} nową normę $\|A\|_1 = \|\varphi(A)\|$, to

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \|T_A x\| \geq \frac{1}{\|e\|} \|T_A e\| = \frac{\|A\|}{\|e\|},$$

więc $\|A\| \leq \|e\|\|A\|_1$, czyli φ^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym. Aby wykazać równoważność norm wystarczy teraz pokazać domkniętość obrazu φ w $B(X)$ (wówczas obraz φ jest przestrzenią Banacha) a następnie skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym. Niech ciąg $\varphi(A_n)$ będzie zbieżny w $B(X)$ do T . Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy $\varphi(A_n)(xy) = T_{A_n}(xy) = T_{A_n}(x)y$ i w granicy $T(xy) = T(x)y$. Biorąc $x = e$ dostajemy $T(y) = T(e)y$. Wystarczy teraz pokazać, że $T(e) \in \mathfrak{A}$. Jest tak, bo $T(e) = \lim T_{A_n}(e)$, a $T_{A_n}(e) = A_n$, więc ciąg (A_n) jest zbieżny w X , więc też w \mathfrak{A} . ■

Możemy więc w definicji algebry Banacha przyjąć, że $c = 1$ i że norma jedności jest równa jeden i od tej pory tak będziemy zakładać.

2.2. Własności spektrum dla algebr Banacha. Zajmować się będziemy wyłącznie algebrami z jednością. Pokażmy najpierw, że zbiór elementów odwracalnych w algebrze Banacha jest otwarty.

STWIERDZENIE 3. Zbiór elementóów odwracalnych w algebrze Banacha jest otwarty.

DOWÓD: Zauważmy najpierw, że jeżeli $S \in \mathfrak{A}$ i $\|S\| < 1$, to istnieje $(1_{\mathfrak{A}} - S)^{-1}$. Istotnie, rozpatrzmy szereg

$$1_{\mathfrak{A}} + S + S^2 \cdots + S^n + \cdots \quad (12)$$

Jest on zbieżny w \mathfrak{A} , bo

$$\left\| \sum_m^n S^i \right\| \leq \sum_m^n \|S\|^i \leq \sum_m^\infty \|S\|^i = \frac{\|S\|^m}{1 - \|S\|} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Korzystaliśmy tu z nierówności $\|S^i\| \leq \|S\|^i$. Ponieważ mnożenie w algebrze Banacha jest operacją ciągłą ze względu na oba argumenty, to

$$\begin{aligned} (1_{\mathfrak{A}} - S)(1_{\mathfrak{A}} + S + \cdots + S^n + \cdots) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1_{\mathfrak{A}} - S)(1_{\mathfrak{A}} + S + \cdots + S^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1_{\mathfrak{A}} - S^{n+1}) \\ &= 1_{\mathfrak{A}} - \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n+1} = \text{id}, \end{aligned}$$

bo dla $\|S\| < 1$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} S^{n+1} = 0$. Niech teraz A będzie elementem odwracalnym w \mathfrak{A} i niech B będzie takie, że $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Stąd $\|A^{-1}B\| \leq \|B\| \|A^{-1}\| < 1$, więc istnieje $(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)^{-1}$. Z kolei $A + B = A(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)$, a stąd widać, że odwzorowanie $(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$ jest odwzorowaniem odwrotnym do $A + B$:

$$(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

Mamy więc, że $A + B$ jest odwracalny, zbiór elementów odwracalnych zawiera kulę o środku w A i promieniu $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$. ■

W dalszym ciągu korzystać będziemy z dwóch podstawowych twierdzeń w teorii przestrzeni Banacha (i nie tylko): twierdzenie Hahna-Banacha i Banacha-Steinhaus. Podam je bez dowodu. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{R} lub \mathbb{C} . Funkcję $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$\begin{aligned} p(x) &\geq 0, \quad x \in X, \\ p(x_1 + x_2) &\leq p(x_1) + p(x_2), \quad x_1, x_2 \in X \\ p(\lambda x) &= |\lambda|p(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in X, \end{aligned}$$

nazywamy półnormą.

TWIERDZENIE 4 HAHNA-BANACHA. Niech Y będzie podprzestrzenią X i niech f będzie funkcjonałem liniowym na Y spełniającym

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in Y,$$

to istnieje funkcjonal liniowy \bar{f} na X taki, że $\bar{f} = f$ na Y i

$$|\bar{f}(x)| \leq p(x).$$

WNIOSEK 1. Jeżeli $X \ni x_0$ jest różny od zera, to istnieje funkcjonal liniowy i ciągły taki, że $f(x_0) \neq 0$.

DOWÓD: Niech Y będzie jednowymiarową podprzestrzenią rozpiętą przez x_0 . Definiujemy ciągłą i liniową funkcję $f: Y \rightarrow \mathbb{K}$ ładąc $f(x_0) = \frac{1}{2}\|x_0\|$. Z twierdzenia Hahna-Banacha, biorąc $p(x) = \|x\|$ dla $x \in X$, dostajemy istnienie liniowej funkcji $\bar{f}: X \rightarrow \mathbb{K}$ takiej, że $\bar{f}(x_0) = f(x_0) \neq 0$ i $|\bar{f}(x)| \leq \|x\|$ (tzn. \bar{f} jest ciągła). ■

TWIERDZENIE 5 BANACHA-STEINHAUSA. *Jeżeli \mathcal{F} jest rodziną odwzorowań liniowych i ciągłych przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y o tej własności, że dla każdego $x \in X$ zbiór $\{F(x), F \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony w Y , to \mathcal{F} jest ograniczony w $L(X, Y)$.*

Jesteśmy teraz gotowi do twierdzenia o podstawowych własnościach widma elementu algebry Banacha.

TWIERDZENIE 6. *Niech $A \in \mathfrak{A}$. Wówczas*

- (A) *jeżeli $\lambda \in \text{rs}(A)$ i $\|(\lambda - A)^{-1}\| = c$, to $\{z: |z - \lambda| < c^{-1}\} \subset \text{rs}(A)$,*
- (B) *$\|(z - A)^{-1}\| \geq (\text{dist}(z, \text{sp}(A)))^{-1}$,*
- (C) *zbiór $\{z: |z| > \|A\|\}$ jest zawarty w $\text{rs}(A)$,*
- (D) *$\text{sp}(A)$ jest zwartym podzbiorem \mathbb{C} ,*
- (E) *funkcja $z \mapsto (z - A)^{-1}$ zwana rezolwentą jest analityczna na $\text{rs}(A)$, tzn. da się lokalnie rozwijać w szereg,*
- (F) *rezolwenty nie można przedłużyć analitycznie poza $\text{rs}(A)$,*
- (G) *$\|(z - A)^{-1}\| \rightarrow 0$ gdy $|z| \rightarrow \infty$,*
- (H) *widmo $\text{sp}(A)$ jest zbiorem niepustym.*

DOWÓD:

- (A) Z dowodu Stwierdzenia 3 wynika, że jeżeli $\lambda - A$ jest odwracalny, to $\lambda - A + B$, gdzie $\|B\| \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|^{-1}$, jest też odwracalny. W szczególności, możemy wziąć $B = z1_{\mathfrak{A}}$, gdzie $|z| \leq c^{-1}$.
- (B) Z poprzedniego punktu mamy, że $\text{dist}(z, \text{sp}(A)) \geq \|(z - A)^{-1}\|^{-1}$. Stąd żądana nierówność.
- (C) Jeżeli $|z| > \|A\|$, to $\|(z1_{\mathfrak{A}})^{-1}\| = |z| \geq \|A\|$ i jak w (1) dostajemy odwracalność $z - A$.
- (D) Z (A) wynika, że $\text{rs}(A)$ jest zbiorem otwartym, więc $\text{sp}(A)$ domkniętym. Z (B) wynika, że $\text{sp}(A) \subset \{z: |z| \leq \|A\|\}$, czyli $\text{sp}(A)$ jest zbiorem ograniczonym i domkniętym w \mathbb{C} , więc zwartym.
- (E) Z (A) wiemy, że jeżeli $\lambda \in \text{rs}(A)$ i $|z - \lambda| < c^{-1}$, to $z - A$ jest odwracalny. Z dowodu Stwierdzenia 3 $(z - A)^{-1}$ jest sumą szeregu

$$(z - A)^{-1} = ((z - \lambda) + (\lambda - A))^{-1} = (\lambda - A)(1_{\mathfrak{A}} + (z - \lambda)(\lambda - A)^{-1})^{-1} = (\lambda - A) \sum_{i=0}^{\infty} (z - \lambda)^i (\lambda - A)^{-i}.$$

- (F) Gdyby można było przedłużyć analitycznie (więc w sposób ciągły) rezolwentę poza $\text{rs}(A)$, a więc do zbioru mającego niepuste przecięcie z $\text{sp}(A)$, to dla pewnego ciągu $\text{rs}(A) \ni z_n \rightarrow z \in \text{sp}(A)$ ciąg $(z_n - A)^{-1}$ byłby zbieżny, co jest sprzeczne z (B).
- (G) Z (D) $\text{dist}(z, \text{sp}(A)) \rightarrow \infty$ gdy $|z| \rightarrow \infty$, więc z (B) dostajemy $\|(z - A)^{-1}\| \rightarrow 0$.
- (H) Niech $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ (funkcjonały liniowe i ciągłe). Funkcja $\text{rs}(A) \ni z \mapsto \varphi((z - A)^{-1}) \in \mathbb{C}$ jest analityczna (holomorfczna) i dążąca do zera w nieskończoności. Jeżeli $\text{rs}(A) = \mathbb{C}$, to funkcja ta jest całkowita i ograniczona, więc stała, więc zerowa. Dla każdego $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ dostajemy $\varphi((z - A)^{-1}) = 0$, więc z Wniosku 1 do Twierdzenia Hahna-Banach $(z - A)^{-1} = 0$. Sprzeczność. ■

Prostym wnioskiem z tego twierdzenia jest

TWIERDZENIE 7 GELFANDA-MAZURA. *Jeżeli \mathfrak{A} jest algebrą Banacha z jednością, której wszystkie elementy różne od zera są odwracalne, to jest ona izomorficzna \mathbb{C} .*

DOWÓD: Niech $A \in \mathfrak{A}$ i niech $z \in \text{sp}(A)$ ($\text{sp}(A)$ nie jest pusty), tzn. $z - A$ nie jest odwracalny. Z założenia jest więc równy zeru $A = z1_{\mathfrak{A}}$. ■

2.3. Promień spektralny. *Promieniem spektralnym elementu $A \in \mathfrak{A}$ nazywamy liczbę*

$$\text{sr}(A) = \sup_{z \in \text{sp}(A)} |z|. \quad (13)$$

Z Twierdzenia 6 wynika, że $\text{sr}(A) \leq \|A\|$. W dalszym ciągu przydatny będzie lemat o ciągach liczbowych.

LEMAT 1. *Jeżeli ciąg liczbowy (c_n) spełnia relacje $c_n + c_m \geq c_{n+m}$, to ciąg $(\frac{c_n}{n})$ jest zbieżny i $\lim \frac{c_n}{n} = \inf \frac{c_n}{n}$.*

DOWÓD: Ustalmy m i niech $n = mq + r$, gdzie $r < m$. Mamy więc $c_n \leq c_{mq} + c_r \leq qC_m + C_r$ i stąd

$$\frac{c_n}{n} \leq \frac{q}{mq+r} c_m + \frac{c_r}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_m}{m}.$$

Zatem $\limsup \frac{c_n}{n} \leq \frac{c_m}{m}$ i $\limsup \frac{c_n}{n} \leq \liminf \frac{c_m}{m}$. Wynika stąd równość granicy górnej i dolnej, więc zbieżność ciągu. Ponadto $\lim \frac{c_n}{n} = \limsup \frac{c_m}{m} \leq \inf \frac{c_m}{m}$ i stąd równość. ■

TWIERDZENIE 8 FORMUŁA GELFANDA-BEURLINGA.

Granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ istnieje i jest równa $\text{sr}(A)$.

DOWÓD: Połóżmy $c_n = \log \|A^n\|$. Mamy dla tego ciągu

$$c_n + c_m = \log \|A^n\| + \log \|A^m\| = \log(\|A^n\| \|A^m\|) \geq \log \|A^{m+n}\| = c_{m+n}.$$

Z lematu wynika istnienie granicy $\lim \frac{c_n}{n} = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Oznaczmy tą granicę przez r . Z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum z^{-1-n} A^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla $|z| > r$ i, jak łatwo sprawdzić, jego suma jest równa $(z - A)^{-1}$. Zatem $z \in \text{rs}(A)$ jeśli $|z| > \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, czyli

$$\text{sr}(A) \leq \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Niech teraz $|z| > \text{sr}(A)$. Rezolwenta $z \mapsto (z - A)^{-1}$ jest funkcją analityczną na swojej dziedzinie, czyli na $\text{rs}(A)$, zatem dla $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ funkcja liczbowa $\text{rs}(A) \ni z \mapsto \varphi((z - A)^{-1})$ jest holomorficzną, więc ma rozwinięcie Laurenta w pierścieniu $|z| > \text{sr}(A)$. W pierścieniu $|z| > \|A\|$ rozwinięciem Laurenta rezolwenty jest szereg $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} A^k$, więc $\varphi((z - A)^{-1})$ ma w tym pierścieniu rozwinięcie $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} \varphi(A^k)$. Z jednoznaczności rozwinięcia Laurenta jest to też rozwinięcie w pierścieniu $|z| > \text{sr}(A)$. Ze zbieżności szeregu Laurenta wynika, że ciąg $(z^{-k} \varphi(A^k))$ jest ograniczony dla każdego $\varphi \in \mathfrak{A}^*$. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa ciąg $(z^{-k} A^k)$ jest też ograniczony w normie, więc istnieje M takie, że $|z^{-k}| \|A^k\| \leq M$. Stąd $\|A^k\| \leq M |z|^k$, $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq M^{\frac{1}{k}} |z| \rightarrow |z|$ i $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |z|$. Jest tak dla każdego $z > \text{sr}(A)$, więc

$$\text{sr}(A) \geq \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \quad \blacksquare$$

2.4. Całki z funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha. Całkować będziemy funkcje $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha. Zaczynamy od funkcji schodkowych o zwartym nośniku. Mówimy, że funkcja \mathbf{f} jest schodkowa, jeżeli istnieje skończony ciąg liczb $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ taki, że na przedziałach $] -\infty, c_0[$, $[c_0, c_1[$, $[\dots, c_n, \infty[$ funkcja ta jest stała. Funkcja schodkowa ma zwarty nośnik, jeżeli na skrajnych przedziałach jest zero.

DEFINICJA 2. Funkcję \mathbf{f} nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna*, jeżeli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa \mathbf{g} o zwartym nośniku taka, że

$$\int \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leq \varepsilon$$

\int oznacza całkę górną, czyli kres dolny całek z funkcji schodkowych większych od funkcji podcałkowej. Z definicji zatem wynika, że funkcja całkowalna w powyższym sensie ma zwarty nośnik.

STWIERDZENIE 4. Funkcja \mathbf{f} jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (\mathbf{g}_n) funkcji schodkowych o zwartym nośniku taki, że $\overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n\| \rightarrow 0$.

Ciąg funkcji o którym mówi to stwierdzenie nazywamy *ciągami aproksymującymi*.

STWIERDZENIE 5. Niech funkcja \mathbf{f} będzie ograniczona o nośniku zwartym. Jeżeli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje funkcja całkowalna \mathbf{g}_ε taka, że $\overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, to \mathbf{f} też jest całkowalna.

DOWÓD: Ponieważ funkcje \mathbf{g}_ε są całkowalne, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa \mathbf{h}_ε taka, że $\overline{\int} \|\mathbf{g}_{\frac{\varepsilon}{2}} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Z subaddytywności całki górnej dostajemy

$$\overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \leq \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_{\frac{\varepsilon}{2}}\| + \overline{\int} \|\mathbf{g}_{\frac{\varepsilon}{2}} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

■

STWIERDZENIE 6. Funkcja \mathbf{f} jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją funkcja schodkowa \mathbf{g}_ε i funkcja rzeczywista h_ε takie, że $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}_\varepsilon\| \leq h_\varepsilon$ i $\int h_\varepsilon \leq \varepsilon$.

DOWÓD: Niech \mathbf{f} będzie całkowalna. Istnieje funkcja schodkowa \mathbf{g} o zwartym nośniku i taka, że $\overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Z kolei, z definicji całki górnej, istnieje rzeczywista funkcja schodkowa h taka że $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leq h$ i $\int h \leq \varepsilon$. W drugą stronę oczywiste. ■

Całkę z funkcji schodkowej o zwartym nośniku definiujemy w oczywisty sposób. Do definicji całki dla dowolnej funkcji całkowalnej potrzebne nam jest następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 9. Niech \mathbf{f} będzie całkowalna i niech (\mathbf{g}_n) będzie ciągiem funkcji schodkowych o zwartym nośniku takim (ciąg aproksymujący), że

$$\overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n\| \rightarrow 0,$$

wówczas ciąg całek $\int \mathbf{g}_n$ jest zbieżny w X i granica nie zależy od wyboru ciągu (\mathbf{g}_n) .

DOWÓD: Mamy

$$\left\| \int \mathbf{g}_n - \int \mathbf{g}_m \right\| \leq \left\| \int \mathbf{g}_n - \mathbf{g}_m \right\| \leq \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n\| + \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_m\| \rightarrow 0,$$

więc ciąg $(\int \mathbf{g}_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego, zatem zbieżnym w X . Oznaczmy granicę przez L_g . Niech teraz (\mathbf{h}_n) będzie innym ciągiem aproksymującym \mathbf{f} zgraniczącą L_h . Utwórzmy z tych ciągów nowy ciąg $(\mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{h}_3, \dots)$. Jest to też ciąg aproksymacyjny, więc odpowiedni ciąg całek jest zbieżny, powiedzmy do L . L_g, L_h są więc granicami podciągów ciągu zbieżnego, zatem są równe $L = L_f = L_g$. ■

DEFINICJA 3. Całką Riemanna $\int \mathbf{f}$ z funkcji całkowalnej \mathbf{f} nazywamy granicę całek ciągu aproksymującego.

Całkę Riemann na przedziale zwartym I definiujemy standardowo: $\int_I \mathbf{f} = \int \chi_I \mathbf{f}$, gdzie χ_I jest funkcją charakterystyczną przedziału I .

Własności całki:

- (1) Liniowość, tzn. suma funkcji całkowalnych jest całkowalna i całka z sumy jest sumą całek. Podobnie z mnożeniem przez liczbą.

Istotnie, niech \mathbf{f}, \mathbf{g} będą całkowalne i niech $(\mathbf{f}_n), (\mathbf{g}_n)$ będą ciągami aproksymującymi. Mamy

$$\overline{\int} \|(\mathbf{f} + \mathbf{g}) - (\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n)\| \leq \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| + \overline{\int} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_n\| \rightarrow 0,$$

czyli na mocy Stwierdzenia 4 $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ jest funkcją całkowalną, a $(\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n)$ jej ciągiem aproksymującym. Z kolei

$$\int (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \lim \int (\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n) = \lim \left(\int \mathbf{f}_n + \int \mathbf{g}_n \right) = \int \mathbf{f} + \int \mathbf{g}.$$

(2) Addytywność względem przedziałów:

$$\int_{[a,c]} \mathbf{f} = \int_{[a,b]} \mathbf{f} + \int_{[b,c]} \mathbf{f}.$$

(3) Jeżeli funkcja \mathbf{f} jest całkowalna, to funkcja rzeczywista $\|\mathbf{f}\|$ też jest całkowalna i

$$\left\| \int \mathbf{f} \right\| \leq \int \|\mathbf{f}\|. \quad (14)$$

DOWÓD: Niech (\mathbf{f}_n) będzie ciągiem aproksymującym \mathbf{f} . Z nierówności $|\|\mathbf{f}\| - \|\mathbf{f}_n\|| \leq \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\|$ dostajemy, że

$$\overline{\int} |\|\mathbf{f}\| - \|\mathbf{f}_n\|| \leq \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| \rightarrow 0,$$

czyli funkcja $\|\mathbf{f}\|$ jest całkowalna i $\int \|\mathbf{f}\| = \lim \int \|\mathbf{f}_n\|$. Ale oczywiście $\|\int \mathbf{f}_n\| \leq \int \|\mathbf{f}_n\|$ i stąd teza. ■

(4) Z poprzedniego wyniku natychmiast szacowanie

$$\int_I \|\mathbf{f}\| \leq |I| \sup_{t \in I} \|\mathbf{f}(t)\|. \quad (15)$$

(5) Jeżeli $F: X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym, to $F \circ \mathbf{f}$ jest funkcją całkowalną i

$$F \left(\int \mathbf{f} \right) = \int F \circ \mathbf{f}. \quad (16)$$

DOWÓD: Jeżeli \mathbf{f} jest funkcją schodkową, tzn. istnieje ciąg $c_0 < c_1 < \dots < c_n$ taki, że $\mathbf{f}(t) = q_i$ dla $t \in [c_{i-1}, c_i[$, to $F \circ \mathbf{f}$ też jest funkcją schodkową i

$$\int F \circ \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i-1}) F(q_i) = F \left(\sum_{i=1}^n (c_i - c_{i-1}) q_i \right) = F \left(\int \mathbf{f} \right).$$

Jeżeli teraz (\mathbf{f}_n) jest ciągiem aproksymującym funkcji całkowalnej \mathbf{f} , to

$$\overline{\int} \|F \circ \mathbf{f} - F \circ \mathbf{f}_n\| \leq \overline{\int} \|F\| \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| = \|F\| \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| \rightarrow 0,$$

czyli $F \circ \mathbf{f}$ jest funkcją całkowalną, a ciąg $(F \circ \mathbf{f}_n)$ jej ciągiem aproksymującym. Stąd i z ciągłości F

$$\int F \circ \mathbf{f} = \lim \int F \circ \mathbf{f}_n = \lim F \left(\int \mathbf{f}_n \right) = F \left(\lim \int \mathbf{f}_n \right) = F \left(\int \mathbf{f} \right).$$

■

2.5. Twierdzenie spektralne dla algebr Banacha. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Powiemy, że $f \in \mathcal{A}(K)$, jeżeli f jest holomorficzną na pewnym otoczeniu K . Niech $f \in \mathcal{A}(\text{sp}(A))$ i niech γ będzie konturem w dziedzinie holomorficzności f , otaczającym $\text{sp}(A)$. Rozpatrzmy całkę

$$\oint_{\gamma} (z - A)^{-1} f(z) dz. \quad (17)$$

Zauważmy najpierw, że całka ta nie zależy od wyboru konturu. Istotnie, funkcja $z \rightarrow (z - A)^{-1} f(z)$ jest analityczna, więc dla $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ funkcja $z \rightarrow \varphi((z - A)^{-1} f(z))$ jest holomorficzną, czyli całka $\oint_{\gamma} \varphi((z - A)^{-1} f(z)) dz$ nie zależy od konturu. Z wniosku do twierdzenia Hahna-Banacha dostajemy niezależność całki (17) od konturu. Możemy więc zdefiniować element algebry $f(A)$ wzorem

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - A)^{-1} f(z) dz. \quad (18)$$

Ponadto, jeżeli mamy dwie funkcje $f, g \in \mathcal{A}(\text{sp}(A))$, które są równe na przecięciu dziedzin, to całki też są równe, czyli $f(A) = g(A)$. Sensowne jest więc rozpatrywanie przestrzeni $\text{Hol}(K)$ będącej przestrzenią ilorazową przestrzeni $\mathcal{A}(K)$ względem relacji równoważności

$$f \sim g \text{ jeżeli } f = g \text{ na pewnym otwartym otoczeniu } K.$$

Wzór (18) definiuje więc liniowe odwzorowanie $\text{Hol}(\text{sp}(A)) \rightarrow \mathfrak{A}$. Przestrzeń $\text{Hol}(K)$ jest oczywiście algebrą przemienną. W następnym twierdzeniu pokażemy, między innymi, że odwzorowanie (18) jest homomorfizmem algebr.

TWIERDZENIE 10. Niech $A \in \mathfrak{A}$ i $f \in \text{Hol}(\text{sp}(A))$. Wówczas

- (A) jeżeli $f \equiv 1$ to $f(A) = 1_{\mathfrak{A}}$,
- (B) jeżeli $f(z) = z$, to $f(A) = A$,
- (C) jeżeli $g \in \text{Hol}(\text{sp}(A))$, to $(fg)(A) = f(A)g(A)$,
- (D) jeżeli $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$, gdzie $\lambda \in \text{rs}(A)$, to $f(A) = (\lambda - A)^{-1}$,
- (E) jeżeli $AB = BA$, to $f(A)B = Bf(A)$,
- (F) jeżeli f jest zadaną szeregiem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ funkcją analityczną w kole o promieniu większym od $\text{sr}(A)$, to

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n,$$

- (G) $\text{sp}(f(A)) = f(\text{sp}(A))$,
- (H) jeżeli $g \in \text{Hol}(\text{sp}(f(A)))$, to $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,
- (I) mamy oszacowanie $\|f(A)\| \leq C_{\gamma, A} \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$.

Dowód:

- (A) Dla $|z| > \|A\|$ mamy $(z - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} A^k$ i stąd

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - A)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \oint_{\gamma} z^{-k-1} dz = \frac{1}{2\pi i} 1_{\mathfrak{A}} \oint_{\gamma} z^{-1} dz = 1_{\mathfrak{A}}.$$

- (B) Jak w poprzednim punkcie,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - A)^{-1} z dz = \frac{1}{2\pi i} A \oint_{\gamma} z^{-1} dz = A.$$

- (C) Niech kontur γ_f dla całki z funkcją g będzie na zewnątrz konturu γ_g dla całki z funkcją f . Mamy

$$\begin{aligned}
& \oint_{\gamma_f} f(z)(z-A)^{-1}dz \oint_{\gamma_g} g(w)(w-A)^{-1}dw \\
&= \oint_{\gamma_f} \oint_{\gamma_g} f(z)g(w)(z-A)^{-1}(w-A)^{-1}dzdw \\
&= \oint_{\gamma_f} \oint_{\gamma_g} f(z)g(w)(w-z)^{-1}((z-A)^{-1} - (w-A)^{-1})dzdw \\
&= \oint_{\gamma_f} f(z)(z-A)^{-1}dz \oint_{\gamma_g} (w-z)^{-1}g(w)dw \\
&+ \oint_{\gamma_g} g(z)(z-A)^{-1}dw \oint_{\gamma_f} f(z)(z-w)^{-1}dz, \tag{19}
\end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z tożsamości (2)

$$(z-A)^{-1}(w-A)^{-1} = (w-z)^{-1}((z-A)^{-1} - (w-A)^{-1}).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_g} g(w)(w-z)^{-1}dw &= 2\pi i f(z), \\
\oint_{\gamma_f} f(z)(z-w)^{-1}dz &= 0,
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

- (D) Kładąc $f(z) = \lambda - z$ i $g(z) = (\lambda - z)^{-1}$ mamy z (A) i (B) $f(A) = \lambda - A$, a z poprzedniego punktu i z (A) $f(A)g(A) = 1_{\mathfrak{A}}$.
(E) Wystarczy skorzystać z faktu, że $AB = BA$ implikuje $(z-A)^{-1}B = B(z-A)^{-1}$ dla $z \in \text{rs}(A)$. Był on dowodzony w przypadku dowolnej algebry.
(F) Dla $f_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ mamy $f_n(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$. Ponieważ $f_n \rightarrow f$ niemal jednostajnie, to całka definiująca $f_n(A)$ zbiega do całki definiującej $f(A)$, czyli $f_n(A) \rightarrow f(A)$. Wystarczy teraz pokazać, że szereg $\sum_{i=0}^n a_i A^i$ jest zbieżny. Mamy z założenia o funkcji f , że $(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} > \text{sr}(A)$, zatem

$$\limsup \|a_n A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \text{sr}(A) \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego dostajemy zbieżność szeregu.

- (G) Pokażemy najpierw, że

$$\text{sp}(f(A)) \subset f(\text{sp}(A)). \tag{20}$$

Niech bowiem $\mu \notin f(\text{sp}(A))$, czyli funkcja $g: z \mapsto f(z) - \mu$ jest różna od zera na $\text{sp}(A)$ i stąd funkcja $g^{-1}: z \mapsto \frac{1}{g(z)}$ jest holomorficzną w otoczeniu $\text{sp}(A)$. Z (C) dostajemy

$$g^{-1}(A)g(A) = (g^{-1}g)(A) = 1_{\mathfrak{A}},$$

czyli $g^{-1}(A) = (f(A) - \mu)^{-1}$ i $\mu \notin \text{sp}(f(A))$.

Teraz wykażemy zawieranie

$$\text{sp}(f(A)) \supset f(\text{sp}(A)). \tag{21}$$

Niech $\mu \notin \text{sp}(f(A))$. Jeżeli $\mu \notin \text{im } f$, to również $\mu \notin f(\text{sp}(A))$. Niech więc $\mu = f(\lambda)$, czyli że funkcję $g: z \mapsto (f(z) - \mu)(z - \lambda)^{-1}$ można przedłużyć analitycznie do $z = \lambda$,

$g \in \text{Hol}(\text{sp}(A))$. Sprawdzamy, że $(f(A) - \mu)^{-1}g(A)$ jest elementem odwrotnym do $(A - \lambda)$. Oczywiście $(A - \lambda) = h(A)$, gdzie $h(z) = z - \lambda$. Stąd

$$(f(A) - \mu)^{-1}g(A)(A - \lambda) = (f(A) - \mu)^{-1}(gh)(A) = (f(A) - \mu)^{-1}(f(A) - \mu) = 1_{\mathfrak{A}},$$

zatem $\lambda \notin \text{sp}(A)$ i $\mu \notin f(\text{sp}(A))$.

(H) Mamy

$$g(f(A)) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{\gamma_g} g(w)(w - f(A))^{-1}dw \quad (22)$$

a ponieważ $w \notin \text{sp}(f(A)) = f(\text{sp}(A))$, to funkcja $(w - f(z))^{-1}$ jest holomorphyzna w otoczeniu $\text{sp}(A)$ i mamy, podobnie jak w punkcie (4),

$$(w - f(A))^{-1} = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{\gamma_w} (w - f(z))^{-1}(z - A)^{-1}dz, \quad (23)$$

przy czym kontur γ_w możemy wybrać tak, by $f(\gamma_w)$ leżał wewnątrz konturu γ_g i był wspólny dla wszystkich $w \in \gamma_g$. Niech γ będzie takim konturem. Mamy wówczas

$$\begin{aligned} g(f(A)) &= \frac{1}{(2\pi\iota)^2} \oint_{\gamma_g} g(w) \left(\oint_{\gamma} (w - f(z))^{-1}(z - A)^{-1}dz \right) dw \\ &= \frac{1}{(2\pi\iota)^2} \oint_{\gamma} \left(\oint_{\gamma_g} g(w)(w - f(z))^{-1}dw \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{\gamma} g(f(z))(z - A)^{-1}dz = (gf)(A). \end{aligned}$$

(I) Z nierówności (15) dostajemy, podobnie jak w zwykłej analizie zespolonej

$$\|f(A)\| \leq \frac{1}{2\pi} |\gamma| \sup_{z \in \gamma} \|f(z)(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{2\pi} |\gamma| \sup_{z \in \gamma} \|(z - A)^{-1}\| \sup_{z \in \gamma} |f(z)| = C_{\gamma, A} \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$$

■

2.6. Idempotenty spektralne. Niech D będzie podzbiorem $\text{sp}(A)$, otwartym i domkniętym w topologii na $\text{sp}(A)$, indukowanej z \mathbb{C} . Mówimy, że D jest izolowany w $\text{sp}(A)$. W $\text{Hol}(\text{sp}(A))$ wybieramy element 1_D , równy 1 w otoczeniu D i 0 na otoczeniu dopełnienia D w $\text{sp}(A)$. Oczywiście $1_D^2 = 1_D$, więc element $1_D(A)$ jest idempotentny. Nazywamy go *spektralnym idempotentem* elementu A .

Zdefiniujmy zbiór $\mathfrak{A}_D = 1_D(A)\mathfrak{A}1_D(A)$. Łatwo sprawdzamy, że jest to podalgebra algebry \mathfrak{A} . Wiemy, że dla $f, g \in \text{Hol}(\text{sp}(A))$ mamy $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, więc w szczególności $f(A)1_D(A) = 1_D(A)f(A)$ i w konsekwencji

$$1_D(A)f(A)1_D(A) = f(A)1_D(A). \quad (24)$$

STWIERDZENIE 7.

$$\text{sp}_{\mathfrak{A}_D}(A1_D(A)) = D. \quad (25)$$

DOWÓD: Oczywiście, że $1_D(A)$ jest jednością w \mathfrak{A}_D jest i że

$$1_D(A) = \frac{1}{(2\pi\iota)^2} \oint_{\gamma} (z - A)^{-1}, \quad (26)$$

gdzie γ jest konturem obejmującym D , poza którym jest pozostała część widma $\text{sp}(A)$. Jeżeli $z \in \text{rs}(A)$, to $(z - A)^{-1}1_D(A)$ jest elementem odwrotnym do $(z - A)1_D(A)$. For $\lambda \in \text{sp}(A) \setminus D$, funkcja

$$g: z \mapsto \begin{cases} (\lambda - z)^{-1}, & \text{w otoczeniu } D \\ 0, & \text{w otoczeniu } \text{sp}(A) \setminus D \end{cases} \quad (27)$$

jest elementem odwrotnym do $(\lambda - A)1_D(A)$ w \mathfrak{A}_D . Wystarczy zauważyć, że

$$(\lambda - z)1_D(z)g(z) = 1_D(z).$$

Zatem $\text{sp}_{\mathfrak{A}}(A) \setminus D \subset \text{rs}_{\mathfrak{A}_D}(A1_D)$. Teraz trzeba pokazać, że $(\lambda - A)1_D(A)$ nie jest odwracalny dla $\lambda \in D$. Oznaczmy przez D' dopełnienie D w $\text{sp}(A)$. Jest to, podobnie jak D , zbiór izolowany w $\text{sp}(A)$. Zamieniając rolami D i D' dostajemy, że $(\lambda - A)1_{D'}(A)$ jest odwracalny w $\mathfrak{A}_{D'}$. Gdyby $(\lambda - A)1_D(A)$ był odwracalny w \mathfrak{A}_D , to

$$\begin{aligned} & ((\lambda - A)1_D(A))^{-1} + ((\lambda - A)1_{D'}(A))^{-1}(\lambda - A) \\ &= (((\lambda - A)1_D(A))^{-1} + ((\lambda - A)1_{D'}(A))^{-1})((\lambda - A)1_D(A) + (\lambda - A)1_{D'}(A)) \\ &= 1_D(A) + 1_{D'}(A) = 1_{\mathfrak{A}}, \end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z tego, że $1_D(A)1_{D'}(A) = 0$. Zatem $(\lambda - A)$ byłby odwracalny, co jest sprzeczne z $\lambda \in \text{sp}(A)$ i stąd $\lambda \in \text{sp}_{\mathfrak{A}_D}(A1_D(A))$.

Co to wszystko oznacza, gdy $\mathfrak{A} = B(X)$? Idempotenty są rzutami. Rzut 1_D nazywany jest *rzutem spektralnym*. Operator $1_D(A)B1_D(A)$ jest rzutem B na podprzestrzeń $1_D(A)X$. Związki $1_D(A)1_{D'}(A) = 0$ i $1_D(A) + 1_{D'}(A) = 1_{\mathfrak{A}} = \text{id}_X$ oznaczają, że podprzestrzenie $1_D(A)X$ i $1_{D'}(A)X$ są dopełniającymi się podprzestrzeniami w X i że $\text{im } 1_D(A) = \ker 1_{D'}(A)$. Równość $1_D(A)f(A)1_D(A) = f(A)1_D(A)$ oznacza, że podprzestrzeń $1_D(A)X$ jest niezmienniczą podprzestrzenią dla $f(A)$. ■

2.7. Izolowane wartości własne. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie izolowanym punktem w $\text{sp}(A)$. Oznaczmy $P := 1_{\lambda}(A)$ i $N := (A - \lambda)1_{\lambda}(A) = (A - \lambda)P$. Oczywiście $N = f(A)$, gdzie $f(z) = (z - \lambda)1_{\lambda}(z)$ i $PN = NP = N$. Mówimy, że λ jest *półprostą wartością własną* jeżeli $N = 0$.

STWIERDZENIE 8. N jest elementem quasinilpotentnym ($\text{sp}(N) = \{0\}$) i

$$(z - A)^{-1}P = (z - \lambda)^{-1}P + \sum_{j=1}^{\infty} (z - \lambda)^{-1-j}N^j. \quad (28)$$

Jeżeli N jest nilpotentny stopnia n , to istnieją $\delta > 0$ i C takie, że

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq C|z - \lambda|^{-n} \quad \text{dla } z \in K(\lambda, \delta).$$

DOWÓD: Mamy $N = f(A)$, gdzie $f(z) = (z - \lambda)1_{\lambda}(z)$, więc $\text{sp}(N) = f(\text{sp}(A))$, ale $1_{\lambda}(z) = 0$ dla $z \in \text{sp}(A) \setminus \{\lambda\}$, czyli $f(\text{sp}(A)) = \{0\}$.

Funkcja operatorowa $z \mapsto (z - A)^{-1}$ jest analityczna w otoczeniu λ (Tw. 6), więc dla $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ funkcja $z \mapsto \varphi((z - A)^{-1})$ jest holomorphyzna z rozwinięciem Laurenta w otoczeniu λ :

$$\varphi((z - A)^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{\varphi}(z - \lambda)^n,$$

gdzie

$$c_n^{\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \varphi((\zeta - A)^{-1})(\zeta - \lambda)^{-n-1} d\zeta.$$

Standardowe argumenty dają

$$c_n^{\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \varphi \left(\oint_{\gamma} (\zeta - A)^{-1} (\zeta - \lambda)^{-n-1} d\zeta \right)$$

i

$$\varphi((z - A)^{-1}) = \varphi \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - \lambda)^n \right),$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\zeta - A)^{-1} (\zeta - \lambda)^{-n-1} d\zeta. \quad (29)$$

Stąd

$$(z - A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \lambda)^n. \quad (30)$$

Dla $-n-1 \geq 0$ funkcja $(\zeta - \lambda)^{-n-1}$ jest holomorficzną, więc $c_n = (A - \lambda)^{-n-1} P = N^{-n-1}$ dla $n < -1$ i $c_n = P$ dla $n = -1$. Rozwinięcie (29) mamy w otoczeniu λ , ale to samo rozwinięcie daje $(z - A)^{-1} P$ na całej płaszczyźnie zespolonej. Z faktu, że $(z - A)^{-1} \rightarrow 0$ przy $|z| \rightarrow \infty$ (Tw. 6) dostajemy, że $c_n = 0$ dla $n \geq 0$. ■

Warto tu zwrócić uwagę na to, że jeżeli $\mathfrak{A} \subset B(X)$, to stopień nilpotentności jest nie większy niż wymiar $P(X)$. Istotnie, jeżeli stopień nilpotentności N jest n , to istnieje $x \in X$ taki, że $N^n(x) = 0$ i $N^{n-1}(x) \neq 0$. Połóżmy $x_1 = Px$, $x_i = N^{i-1}x$, $i = 2, \dots, n$. Łatwo sprawdzamy, że jest to układ liniowo niezależny.

2.8. Przypadek skończenie-wymiarowy. W przypadku algebry wymiaru skończonego wszystkie punkty widma są izolowane $\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Niech d będzie funkcją w otoczeniu widma, równą λ_i w otoczeniu λ_i . Inaczej mówiąc, $d = \sum_i \lambda_i 1_{\lambda_i}$. Stąd $d(A) = \sum_i \lambda_i P_i$, gdzie $P_i = 1_{\lambda_i}(A)$. Jak w poprzednim paragrafie, $N_i = (A - \lambda_i)P_i$ i definiujemy $N = \sum_i N_i$. Oczywiście $N_i = NP_i$ i są to elementy nilpotentne stopnia m_i . Dla dowolnej funkcji $f \in \text{Hol}(\text{sp}(A))$ mamy

$$\begin{aligned} F(A)P_j &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} (z - A)^{-1} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} \left((z - \lambda_j)^{-1} P_j + \sum_{k=1}^{m_j-1} N_j^k (z - \lambda_j)^{-k-1} \right) f(z) dz \\ &= f(\lambda_j) P_j + \sum_{k=1}^{m_j-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_j) N_j^k \end{aligned}$$

a stąd

$$f(A) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{m_j} (\lambda_j)^k \frac{N_j^k}{k!}.$$

2.9. Przykłady. Przypomnijmy, że element widma λ nazywamy *wartością własną* jeżeli $\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A$ ma nietrywialne jądro. Zbiór wartości własnych nazywamy widmem punktowym (czysto punktowym) i oznaczamy $\text{sp}_p(A)$.

PRZYKŁAD 5. Niech ℓ^p będzie przestrzenią Banacha ciągów liczbowych, sumowalnych w p -tej potędze, $p \in [1, \infty]$, $\mathfrak{A} = B(\ell^p)$. Niech (a_i) będzie ograniczonym ciągiem liczbowym. Operator $A: \ell^p \rightarrow \ell^p$ definiujemy wzorem

$$(Ax)_i = a_i x_i.$$

Oczywiście $\|A\| = \sup |a_i|$, $\text{sp}_p(A) = \{a_i\}$ i $\text{sp}(A) = \overline{\text{sp}_p(A)}$.

PRZYKŁAD 6.

PRZYKŁAD 7. W przestrzeni ℓ^p rozpatrzmy operator przesunięcia w lewo (patrz Przykład 2):

$$(Lx)_i = x_{i+1}.$$

Oczywistym jest, że $\|L\| = 1$. Szukamy wartości własnych:

$$L(x) = \lambda x, \quad x_{i+1} = \lambda x_i, \quad \text{i stąd } x_n = x_1 \lambda^{n-1}.$$

Ciąg taki należy do ℓ^p , $p < \infty$ jeżeli $|\lambda| < 1$ i do ℓ^∞ jeżeli $|\lambda| \leq 1$, czyli

$$\text{sp}_p(L) = \begin{cases} \{z: \|z\| \leq 1\} & \text{dla } p = \infty \\ \{z: \|z\| < 1\} & \text{dla } p < \infty \end{cases}$$

Ponieważ $\text{sr}(L) \leq \|L\| = 1$ i $\text{sp}(L)$ jest zbiorem domkniętym, dostajemy

$$\text{sp}(L) = \{z: \|z\| \leq 1\}$$

dla każdego p .

PRZYKŁAD 8. Dla operatora przesunięcia w prawo $R: \ell^p \rightarrow \ell^p$

$$(R(x))_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{dla } i \geq 2 \\ 0 & \text{dla } i = 1 \end{cases}$$

mamy $\|R\| = 1$ i z warunku $R(x) = \lambda x$ dostajemy $x = 0$, czyli $\text{sp}_p(R) = \emptyset$. Z kolei, jeżeli $y = (z - R)x$, to $y_1 = zx_1$ i $y_i = zx_i - x_{i-1}$ dla $x > 1$ a stąd, dla $|z| < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} z^{i-1} y_i = 0$. Zatem $(z - R)$ nie jest surjekcją i mamy

$$\text{sp}(R) = \{z: \|z\| \leq 1\}$$

PRZYKŁAD 9. Niech (a_i) będzie ciągiem zbieżnym do zera. Definiujemy operator

$$N: \ell^p \rightarrow \ell^p, \\ (Nx)_i = \begin{cases} a_{i-1} x_{i-1}, & \text{dla } i > 1 \\ 0, & \text{dla } i = 1. \end{cases}$$

Jak w poprzednim przykładzie $\text{sp}_p(N) = \emptyset$. Obliczymy promień spektralny korzystając z Twierdzenia 8. Mamy

$$(N^2 x)_i = \begin{cases} a_{i-1} a_{i-2} x_{i-1}, & \text{dla } i > 2 \\ 0, & \text{dla } i = 1, 2 \end{cases}$$

i $\|N^2\| = \sup |a_i a_{i+1}|$ i tak dalej dla wyższych potęg N . Uporządkujmy ciąg $(|a_i|)$ w ciąg malejący (b_i) . Dostajemy oczywiste nierówności

$$\|N\| = b_1, \quad \|N^2\| \leq b_1 b_2, \quad \dots, \quad \|N^k\| \leq b_1 b_2 \cdots b_k$$

i stąd $\lim \|N^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim b_k = 0$. Wniosek: $\text{sr}(N) = 0$ i $\text{sp}(N) = \{0\}$.

3. Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprzężonych w przestrzeni Hilberta.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i $\mathfrak{A} = B(H)$. Struktura przestrzeni Hilberta pozwala wprowadzić operację sprzężenia w $B(H)$. Łatwo sprawdzamy, że $\|A^\dagger\| = \|A\|$. Przydatne będzie następujące stwierdzenie.

STWIERDZENIE 9. *A jest operatorem samosprzężonym wtedy i tylko wtedy, gdy $(x|Ax) \in \mathbb{R}$ dla każdego $x \in H$.*

DOWÓD: Jeżeli A jest s.s. (samosprzężony), to $(x|Ay) = (Ax|y)$ i stąd

$$(x|Ax) = (Ax|x) = \overline{(x|Ax)}.$$

Aby dowieść wynikanie w drugą stronę przypomnijmy wzory polaryzacyjne. Oznaczmy $h(x, y) = (x|Ay)$. Mamy

$$h(x + y, x + y) = h(x, x) + h(y, y) + h(x, y) + h(y, x),$$

$$h(\iota x + y, \iota x + y) = h(x, x) + h(y, y) - \iota h(x, y) + \iota h(y, x) \quad \text{i stąd}$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2} (h(x + y, x + y) - h(x, x) - h(y, y)) + \frac{\iota}{2} (h(\iota x + y, \iota x + y) - h(x, x) - h(y, y)),$$

$$h(y, x) = \frac{1}{2} (h(x + y, x + y) - h(x, x) - h(y, y)) - \frac{\iota}{2} (h(\iota x + y, \iota x + y) - h(x, x) - h(y, y)),$$

czyli $(x|Ay) = h(x, y) = \overline{h(y, x)} = \overline{(y|Ax)} = (Ax|y)$. ■

DEFINICJA 4. Operator A nazywamy *dodatnim* , jeżeli $(x|Ax) \geq 0$ dla każdego $x \in H$. Piszemy $A \geq 0$.

Ze Stwierdzenia 9 wynika, że operator dodatni jest s.s.

3.1. Własności spektralne operatora samosprzężonego.

TWIERDZENIE 11. *Jeżeli A jest operatorem samosprzężonym, to $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}$.*

DOWÓD: Niech $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ i niech $\lambda \neq 0$. Pokażemy, że istnieje $(A - (\lambda + \mu))^{-1}$, czyli że $\lambda + \mu \in \text{rs}(A)$. Ponieważ A jest s.s., mamy szacowanie dla $x \in H$:

$$\begin{aligned} \|(A - (\lambda + \mu))x\|^2 &= ((A - (\lambda + \mu))x | (A - (\lambda + \mu))x) \\ &= ((A - \lambda)x | (A - \lambda)x) + ((A - \lambda)x | -\mu x) + (-\mu x | (A - \lambda)x) + \mu^2 \|x\|^2 \\ &= \|(A - \lambda)x\|^2 - \mu(Ax|x) + \mu\lambda(x|x) - \mu\lambda(x|x) + \mu(x|Ax) + \mu^2 \|x\|^2 \\ &= \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2 \geq \mu \|x\|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Z tej nierówności wynika, że operator $A - (\lambda + \mu)$ jest iniekcją i odwrotny jest ciągly na swojej dziedzinie. Wystarczy teraz pokazać, że obraz $A - (\lambda + \mu)$ jest gęsty. Wynika to z ogólnego faktu, że domknięcie obrazu jest anihilatorem jądra operatora sprzężonego. W naszym przypadku

$$(A - (\lambda + \mu))^\dagger = A - (\lambda - \mu),$$

więc z nierówności (31) jądro $A - (\lambda - \mu)$ jest trywialne. ■

Przydatny będzie następujący lemat.

LEMAT 2. *Jeżeli A jest s.s., to*

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |(v|Av)| = \sup_{\|v\|=1} |(v|Av)| \quad (32)$$

DOWÓD: Z definicji normy operatora,

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1, \|w\|=1} |(v|Aw)|,$$

więc wystarczy pokazać, że

$$|(v|Aw)| \leq \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) \sup \|x\| \leq 1 |(x|Ax)|. \quad (33)$$

Nierówność ta jest zachowana, jeżeli v zastąpimy przez λv , gdzie $|\lambda|=1$, więc możemy przyjąć, że $(v|Aw)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Dostajemy

$$\begin{aligned} |(v|Aw)| &= (v|Aw) = \frac{1}{2} ((v|Aw) + (w|Av)) \\ &= \frac{1}{4} ((v+w|A(v+w)) - (v-w|A(v-w))) \\ &\leq \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2) \sup_{\|x\| \leq 1} |(x|Ax)| \\ &= \frac{1}{2} (\|v\|^2 + \|w\|^2) \sup_{\|x\| \leq 1} |(x|Ax)| \end{aligned} \quad (34)$$

■

TWIERDZENIE 12. Dla każdego operatora A , operator $A^\dagger A$ jest dodatni i

$$\|A^\dagger A\| = \|A\|^2. \quad (35)$$

DOWÓD: Z równości $(v|A^\dagger Av) = (Av|Av) = \|Av\|^2$ mamy dodatniość, więc i samosprężoność $A^\dagger A$. Z Lematu

$$\|A^\dagger A\| = \sup_{\|v\|=1} (v|A^\dagger Av) = \sup_{\|v\|=1} (Av|Av) = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|^2 = \left(\sup_{\|v\|=1} \|Av\| \right)^2 = \|A\|^2. \quad \blacksquare$$

Stąd już łatwo wynika ważne twierdzenie.

TWIERDZENIE 13. Dla operatora samosprężonego norma jest równa promieniowi spektralnemu, $\|A\| = \text{sr}(A)$.

DOWÓD: Z poprzedniego twierdzenia $\|A\|^2 = \|A^2\|$ i stąd $\|A^{2^m}\| = \|A\|^{2^m}$, czyli $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \|A\|$. \blacksquare

3.2. Twierdzenie spektralne dla operatora samosprężonego. Dla każdego operatora w przestrzeni Hilberta ma zastosowanie Holomorfczne Twierdzenie Spektralne 10. W uzupełnieniu można pokazać związki

$$\text{sp}(A^\dagger) = \overline{\text{sp}(A)}, \quad f(A)^\dagger = \bar{f}(A^\dagger), \quad \text{gdzie} \quad \bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad (36)$$

dla funkcji $f \in \text{Hol}(\text{sp}(A))$.

DOWÓD: Równość $\text{sp}(A^\dagger) = \overline{\text{sp}(A)}$ jest oczywista. Oczywiście też jest, że jeżeli f jest funkcją holomorfczną w otoczeniu $\text{sp}(A)$, to funkcja \bar{f} jest holomorfczna w otoczeniu $\text{sp}(A)$. Mamy

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - A)^{-1} f(z) dz,$$

gdzie γ jest łukiem otaczającym $\text{sp}(A)$. Stąd łuk $\bar{\gamma}$ otacza $\text{sp}(A^\dagger) = \overline{\text{sp}(A)}$. Parametryzując γ odcinkiem $[0, 1]$, mamy

$$\begin{aligned} (f(A))^\dagger &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\gamma} (z - A)^{-1} f(z) dz \right)^\dagger = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{[0,1]} (\gamma(t) - A)^{-1} f(\gamma(t)) \dot{\gamma} dt \right)^\dagger \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{[0,1]} (\overline{\gamma(t)} - A^\dagger)^{-1} \overline{f(\gamma(t))} \dot{\bar{\gamma}} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{[0,1]} (\bar{\gamma}(t) - A^\dagger)^{-1} \bar{f}(\bar{\gamma}(t)) \dot{\bar{\gamma}} dt = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{\gamma}} (z - A^\dagger)^{-1} \bar{f}(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{\gamma}} (z - A^\dagger)^{-1} \bar{f}(z) dz = \bar{f}(A^\dagger). \end{aligned}$$

Uwzględniliśmy tu fakt, że parametryzacja $t \mapsto \overline{\gamma(t)} = \bar{\gamma}(t)$ zadaje orientację przeciwną do kanonicznej łuku $\bar{\gamma}$. \blacksquare

Dla operatora samosprężonego nierówność (I) w Twierdzeniu 10 możemy zastąpić równością

$$\|f(A)\| = \sup_{z \in \text{sp}(A)} |f(z)|. \quad (37)$$

DOWÓD: Dla samosprężonego B mamy (Twierdzenie 13) $\|B\| = \text{sr}(B) = \sup_{z \in \text{sp}(B)} |z|$, więc z twierdzenia spektralnego, Twierdzenia 12 i Stwierdzenia 11

$$\begin{aligned} \|f(A)\|^2 &= \|f(A)^\dagger f(A)\| = \|\bar{f}(A) f(A)\| = \|(\bar{f}f)(A)\| \\ &= \sup_{z \in \text{sp}((\bar{f}f)(A))} |z| = \sup_{z \in \text{sp}(A)} |(\bar{f}f)(z)| \\ &= \sup_{z \in \text{sp}(A)} |f(z)|^2 = \left(\sup_{z \in \text{sp}(A)} |f(z)| \right)^2. \end{aligned}$$

Równość (37) oznacza, że odwzorowanie $\text{Hol}(\text{sp}(A)) \ni f \mapsto f(A) \in B(\mathbb{H})$ jest izometrią, jeżeli wyposażyć $\text{Hol}(\text{sp}(A))$ w normę $\|f\| = \sup_{z \in \text{sp}(A)} |f(z)|$. Można więc je przedłużyć przez ciągłość. Na osi rzeczywistej $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$, więc z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa dla funkcji o wartościach zespolonych mamy, że domknięciem $\text{Hol}(\text{sp}(A))$ względem normy jednostajnej jest całe $\mathcal{C}(\text{sp}(A))$, więc $f(A)$ ma sens dla każdej funkcji ciągłej na $\text{sp}(A)$. W szczególności, jeżeli $f \geq 0$, to $f = g^2$ i

$$f(A) = g(A)g(A) = g(A)g(A)^\dagger \geq 0.$$

Podsumowując, twierdzenie spektralne dla operatora samosprężonego można sformułować tak:

TWIERDZENIE 14. *Niech A będzie operatorem samosprężonym. Istnieje jedyne liniowe odwzorowanie*

$$\mathcal{C}(\text{sp}(A)) \rightarrow B(\mathbb{H}): f \mapsto f(A),$$

które na funkcjach holomorficznym jest równe zdefiniowanemu poprzednio i posiada następujące własności:

- (A) jeżeli $f \equiv 1$ to $f(A) = \text{id}_{\mathbb{H}}$,
- (B) jeżeli $f(x) = x$, to $f(A) = A$,
- (C) $(fg)(A) = f(A)g(A)$,
- (D) $(f(A))^\dagger = \bar{f}(A)$,
- (E) $\|f(A)\| = \sup_{x \in \text{sp}(A)} |f(x)|$,
- (F) jeżeli $AB = BA$, to $f(A)B = Bf(A)$,
- (G) $\text{sp}(f(A)) = f(\text{sp}(A))$,
- (H) jeżeli $g \in \mathcal{C}(\text{sp}(f(A)))$, to $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,
- (I) jeżeli $f \geq 0$, to $f(A) \geq 0$.

WNIOSEK 2. *Jeżeli D i D' są rozłącznymi, izolowanymi podzbiorami $\text{sp}(A)$, gdzie A jest samosprężony, to podprzestrzenie $1_D \mathbb{H}$ i $1_{D'} \mathbb{H}$ są do siebie ortogonalne.*

DOWÓD: $1_D 1_{D'} = 0$, więc $1_D(A)1_{D'}(A) = 0$ i z $1_D(A)^\dagger = 1_D(A)$ mamy

$$0 = (1_D(A)1_{D'}(A)\mathbb{H} \mid \mathbb{H}) = (1_{D'}(A)\mathbb{H} \mid 1_D(A)\mathbb{H}).$$

3.3. Uogólnienia twierdzeń spektralnych.

Twierdzenie spektralne ma szereg wersji i uogólnień. W przypadku operatorów samosprężonych można rozszerzyć klasę funkcji do zbioru funkcji borelowsko ograniczonych na $\text{sp}(A)$. Traci się przy tym równości (E) i (G) i trzeba się zadowolić nierównością $\|f(A)\| \leq \sup_{x \in \text{sp}(A)} |f(x)|$ i zawieraniem $\text{sp}(f(A)) \subset f(\text{sp}(A))$. Z drugiej strony, Twierdzenie 14 można uogólnić na przypadek operatorów normalnych, czyli spełniających warunek $AA^\dagger = A^\dagger A$. Trzeba jedynie równość (D) zastąpić równością $(f(A))^\dagger = \bar{f}(A^\dagger)$.

3.4. Własności spektralne samosprężonego operatora zwartego.

Dla przypomnienia:

TWIERDZENIE 15 ALTERNATYWA FREDHOLMA. *Niech $A: X \rightarrow X$ będzie zwartym odwzorowaniem przestrzeni Hilberta X w siebie. Możliwe są dwie, wykluczające się sytuacje*

- (1) dla każdego $g \in X$ istnieje rozwiązanie równania $(Id - A)f = g$,
- (2) równanie jednorodne $(Id - A)f = 0$ ma nietrywialne rozwiązanie.

Z twierdzenia tego wynika natychmiast ważne

TWIERDZENIE 16. *Jeżeli $A \in B(H)$ jest zwarty, to każde $0 \neq \lambda \in \text{sp}(A)$ jest wartością własną.*

DOWÓD: Istotnie, jeżeli A jest zwarty i $\lambda \neq 0$, to z alternatywy Fredholma wynika, że $\lambda \in \text{rs}(A)$ lub λ jest wartością własną. ■

WNIOSEK 3. *Jeżeli A jest s.s. i zwarty, to $\|A\|$ lub $-\|A\|$ jest wartością własną.*

DOWÓD: A jest s.s., więc $\text{sr}(A) = \|A\|$, czyli $\|A\|$ lub $-\|A\|$ należy do $\text{sp}(A)$. Z poprzedniego Twierdzenia wynika teza. ■

TWIERDZENIE 17 (RIESZ-SCHAUDER). *Widmo samosprężonego, zwartego A nie może mieć punktu skupienia różnego od zera.*

DOWÓD: Niech A będzie zwartym, samosprężonym operatorem i $\lambda \neq 0$ punktem skupienia $\text{sp}(A)$. Oznacza to, że istnieje ciąg $\text{sp}(A) \ni \lambda_j \rightarrow \lambda$ taki, że $\lambda_j \neq \lambda_i \neq \lambda$ dla $i \neq j$. Możemy przyjąć, że $\lambda_j \neq 0$, więc λ_j są wartościami własnymi. Niech x_j będą odpowiednimi, unormowanymi wektorami własnymi $Ax_j = \lambda_j x_j$. Ponieważ A jest samosprężony, to dla $i \neq j$

$$\lambda_j(x_j|x_i) = (\lambda_j x_j|x_i) = (Ax_j|x_i) = (x_j|Ax_i) = \lambda_i(x_j|x_i)$$

i stąd $(x_j|x_i) = 0$. Zatem

$$\|Ax_j - Ax_i\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \rightarrow 2\lambda^2 \neq 0.$$

Oznacza to, że z ciągu (Ax_j) nie można wybrać podciągu zbieżnego, co przeczy zwartości A . ■

Przypomnijmy, że w każdej przestrzeni Hilberta istnieje baza ortonormalna.

TWIERDZENIE 18 (HILBERT-SCHMIDT). *Jeżeli A jest operatorem samosprężonym, zwartym, to w H istnieje ortonormalna baza wektorów własnych.*

DOWÓD: Niech $\lambda \neq 0$ będzie wartością własną A . Odpowiednia przestrzeń wektorów własnych jest wymiaru skończonego i posiada skończoną bazę ortonormalną. Przestrzenie własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, więc podprzestrzeń domknięta, rozpięta na wektorach własnych niezerowych wartości własnych ma ortonormalną bazę wektorów własnych. Oznaczmy tę przestrzeń V . Jest to podprzestrzeń niezmiennicza operatora A , więc V^\perp też jest podprzestrzenią niezmienniczą. $A|_{V^\perp}$ jest operatorem samosprężonym, zwartym, bez niezerowych wartości własnych. Zatem $\text{sp}(A|_{V^\perp}) = \{0\}$, czyli $\|A|_{V^\perp}\| = 0$. Dowolna baza ortonormalna w V^\perp jest bazą wektorów własnych. Razem z bazą w V daje bazę ortonormalną wektorów własnych w $V \oplus V^\perp = H$. ■

4. Zagadnienie Sturma-Liouville'a.

Zajmijmy się zagadnieniem własnym dla zagadnienia brzegowego na odcinku $[a, b]$

$$(-pu')' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0 \tag{38}$$

z odpowiednio regularnymi, rzeczywistymi współczynnikami p, q . Chcąc stosować metody wypracowane powyżej musimy spojrzeć na (38) jak na operator działający w przestrzeni Hilberta. Jedyнным naturalnym kandydatem jest przestrzeń $L^2([a, b])$, ale (38) nie jest w tej przestrzeni odwzorowaniem ciągłym. Zamiast tym odwzorowaniem zajmijmy się jego odwrotnym. Pokażemy, że jest ono ciągłe, a nawet zwarte. Ograniczmy się do przypadku $p(t) > 0$, $q(t) \geq 0$ i rozpatrzmy zagadnienia początkowe

$$\begin{aligned} (-pu')' + qu &= 0, & u(a) &= 0 \\ (-pv')' + qv &= 0, & v(b) &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Wiemy, że przestrzenie rozwiązań dla tych zagadnień są jednowymiarowe i ich przecięcie jest zerowe. Istotnie, jeżeli u jest rozwiązaniem dla obu zagadnień, to

$$0 = \int_{[a,b]} ((-p\bar{u}')' + q\bar{u})u = \int_{[a,b]} (p|u'|^2 + q|u|^2) - u\bar{u}' \Big|_a^b = \int_{[a,b]} (p|u'|^2 + q|u|^2)$$

i stąd $u' = 0$, czyli $u = 0$. Niech u_0 i v_0 będą niezerowymi, dla wygody rzeczywistymi, rozwiązaniami zagadnień (39). Ponieważ są liniowo niezależne, ich wyznacznik Wronskiego $W(t) = u_0'(t)v_0(t) - u_0(t)v_0'(t)$ jest różny od zera i z twierdzenia Liouville'a

$$W(t) = W(a) \exp\left(-\int_a^t \frac{p'}{p} dt\right) = W(a) \frac{p(a)}{p(t)},$$

czyli $t \mapsto W(t)p(t) = W(a)p(a)$ jest funkcją stałą.

Zdefiniujemy funkcję $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$G(t, s) = \frac{1}{pW} \begin{cases} u_0(t)v_0(s), & \text{dla } t \leq s \\ v_0(t)u_0(s), & \text{dla } t \geq s \end{cases}. \quad (40)$$

G jest funkcją ciągłą na $[a, b] \times [a, b]$, symetryczną, i przy ustalonym t

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(-p \frac{\partial G}{\partial s} \right) + qG = a(t)\delta_t,$$

gdzie $a(t)$ jest skokiem $s \mapsto -p \frac{\partial}{\partial s} G(t, s)$ w punkcie $s = t$:

$$a(t) = -p(t) \frac{1}{pW} (u_0(t)v_0'(t) - u_0'(t)v_0(t)) = 1.$$

Wynika stąd, że funkcja u na $[a, b]$, zadana wzorem

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds$$

spełnia równanie (dla ciągłego f) $(-pu')' + qu = 0$ i ponadto

$$u(a) = \frac{1}{pW} \int_a^b u_0(a)v_0(s)f(s)ds = 0, \quad u(b) = \frac{1}{pW} \int_a^b v_0(b)u_0(s)f(s)ds = 0,$$

zatem odwzorowanie

$$A: f \mapsto \int_a^b G(\cdot, s) f(s) ds$$

jest odwrotnym do operatora różniczkowego $L(u) = (-pu')' + qu = \lambda u$ określonego na funkcjach spełniających warunek $u(a) = u(b) = 0$. A jest operatorem całkowym, z jądrem ciągłym, zatem da się rozszerzyć do operatora ciągłego w $L^2([a, b])$. Jest to operator zwarty i samosprężony (jądro jest symetryczne). Oznaczać go będziemy też przez A , podobnie relację A^{-1} oznaczać będziemy L . Oczywiście jest, że jeżeli λ jest takie, że dla niego istnieje rozwiązanie problemu (38), to $\frac{1}{\lambda}$ jest wartością własną A . Wartości własne są jednokrotne, bo przestrzeń rozwiązań zagadnienia

$$(-pu')' + qu = \lambda u, \quad u(a) = 0$$

jest wymiaru jeden. Z równości

$$\lambda \|u\| = (u|\lambda u) = (u|L(u)) = \int_{[a,b]} (p(u')^2 + qu^2) > 0$$

wynika, że wartości własne są dodatnie.

Z Twierdzenia 18 wynika istnienie w $L^2([a, b])$ ortonormalnej bazy wektorów własnych operatora A (L). Niech φ_n będzie taką bazą. Funkcje $\varphi_n \otimes \varphi_m$ tworzą bazę ortonormalną w $L^2([a, b] \times [a, b])$ i stąd

$$G(t, s) = \sum \alpha_{mn} \varphi_m(t) \varphi_n(s).$$

Mamy więc

$$\frac{1}{\lambda_n} \varphi_n = A(\varphi_n) = \int_a^b \sum \alpha_{kl} \varphi_k \varphi_l(s) \varphi_n(s) ds = \sum \sum \alpha_{kl} \varphi_k (\varphi_l | \varphi_n) = \sum_k \alpha_{kn} \varphi_k$$

i stąd $\alpha_{kn} = \frac{1}{\lambda_n} \delta_{kn}$. Ostatecznie,

$$\infty > \|G\|_2^2 = \sum \frac{1}{\lambda_n^2}. \quad (41)$$

Podsumowując,

TWIERDZENIE 19.

- (1) W $L^2([a, b])$ istnieje baza ortonormalna wektorów własnych operatora L ,
- (2) wartości własne są dodatnie,
- (3) wartości własne mają krotność 1 (wymiar przestrzeni wektorów własnych jest 1),
- (4) $\sum \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$, gdzie λ_n są wartościami własnymi L .

TWIERDZENIE 20 (ZASADA MINIMAKS COURANTA). Niech (μ_n) będą wartościami własnymi zwartego, samosprzężonego operatora A w przestrzeni Hilberta H . Załóżmy, że

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq \mu_n \geq \dots$$

Wartość własna występuje w tym ciągu tyle razy, ile wynosi jej krotność (wymiar przestrzeni wektorów własnych). Wówczas

$$\mu_n = \inf_{\substack{V \\ \dim V = n-1}} \sup_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax). \quad (42)$$

DOWÓD: Niech (e_i) będzie bazą ortonormalną wektorów własnych taką, że e_i jest wektorem własnym dla wartości własnej μ_i . Niech $V \subset H$, $\dim V = n-1$, wówczas V^\perp ma nietrywialne przecięcie z przestrzenią rozpiętą na $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Istnieje więc

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in V^\perp, \quad \|x\| = 1.$$

Mamy więc

$$(x|Ax) = \mu_1 |\alpha_1|^2 + \dots + \mu_n |\alpha_n|^2 \geq \mu_n, \quad \text{bo } |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \|x\|^2 = 1$$

a stąd

$$\sup_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax) \geq \mu_n \quad \text{i} \quad \inf_{\substack{V \\ \dim V = n-1}} \sup_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax) \geq \mu_n.$$

Weźmy teraz $V = \langle \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} \rangle$, to $V^\perp = \langle \{e_n, e_{n+1}, \dots\} \rangle$ i dla $x \in V^\perp$

$$(x|Ax) = \sum_n^\infty \mu_i |x|e_i|^2 \leq \mu_n.$$

W szczególności, $(e_n|Ae_n) = \mu_n$, czyli dla tego V

$$\sup_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax) = \mu_n. \quad \blacksquare$$

Jeżeli A jest odwrotny do operatora (nieograniczonego) L , rozważanego powyżej, to zasadę minimaks można sformułować tak (wartości własne są jednokrotne):

TWIERDZENIE 21 (ZASADA MINIMAKS COURANTA). Niech (λ_n) będą wartościami własnymi operatora L w $L^2([a, b])$. Załóżmy, że

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots.$$

Wówczas

$$\mu_n = \sup_{\substack{V \\ \dim V = n-1}} \inf_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Lx). \quad (43)$$

WNIOSEK 4. λ_n jest monotonicznie rosnącą funkcją p i q .

DOWÓD: Wystarczy zauważyć, że dla regularnych $x = u$,

$$(u|Lu) = \int_{[a,b]} (p|u'|^2 + q|u|^2).$$

■

4.1. Asymptotyka wartości własnych. W zagadnieniu Sturm-Liouville'a

$$(-pu')' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

dokonyjmy zamiany zmiennych

$$\tau(t) = \int_a^t \frac{1}{\sqrt{p(s)}} ds, \quad x = \sqrt[4]{p} u.$$

Dostajemy zagadnienie

$$-\ddot{x} + a(\tau)x = \lambda x, \quad x(a) = 0, \quad x(l) = 0, \quad \text{gdzie } l = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{p(s)}} ds. \quad (44)$$

Kropka oznacza różniczkowanie po zmiennej τ . Załóżmy, że funkcja a jest ograniczona: $-\sigma \leq a(\tau) \leq \sigma$. Z monotoniczności wartości własnych (Wniosek 4) mamy

$$\lambda_n^{(-\sigma)} \leq \lambda_n \leq \lambda_n^{(\sigma)}, \quad (45)$$

gdzie $\lambda_n^{(\sigma)}, \lambda_n^{(-\sigma)}$ są wartościami własnymi dla $-\ddot{x} + \sigma x$, $-\ddot{x} - \sigma x$. Wiadomo, że

$$\lambda_n^{(\sigma)} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \sigma, \quad \lambda_n^{(-\sigma)} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \sigma,$$

więc (45) oznacza

$$\frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \sigma \leq \lambda_n \leq \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \sigma, \quad (46)$$

co się zapisuje tak:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{p(s)}}\right)^2} + O(1) \quad (47)$$

Zapis $f(n) = O(h(n))$ oznacza, że $|f(n)| \leq ch(n)$ dla pewnej stałej c .

4.2. Asymptotyka wektorów własnych. Zapiszmy równanie (44) tak: $\ddot{x} + \lambda x = a(\tau)x$. Z ogólnych własności równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach mamy

$$x_n(\tau) = a_n \sin(\sqrt{\lambda_n} \tau) + b_n \cos(\sqrt{\lambda_n} \tau) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\tau s(t) x_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n}(\tau - t)) dt. \quad (48)$$

Z warunku unormowania $\|x_n\| = 1$ mamy szacowanie

$$\left| \int_0^\tau s(t)x_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n}(\tau-t))dt \right| \leq \sqrt{\int_0^l s^2} \sqrt{\int_0^l x_n^2} = \sqrt{\int_0^l s^2}. \quad (49)$$

Stąd i z warunku brzegowego $x_n(0) = 0$ mamy $b_n = 0$ oraz

$$x_n(\tau) = a_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}m_n(\tau), \quad |m_n(\tau)| \leq \sqrt{\int_0^l s^2} < \infty. \quad (50)$$

Warunek unormowania oznacza

$$\begin{aligned} 1 &= a_n^2 \int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_n}t)dt + \frac{2a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_n}t)m_n(t)dt + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^l m_n^2(t)dt \\ &= a_n^2 \frac{l}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_n}l)}{4\sqrt{\lambda_n}} a_n^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} p_n a_n + \frac{1}{\lambda_n} q_n, \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie (p_n) , (q_n) są ciągami ograniczonymi. Ponieważ $\lambda_n \rightarrow \infty$ przy $n \rightarrow \infty$, to z (51) wynika ograniczoność ciągu (a_n) . Wobec tego

$$1 = a_n^2 \frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \quad \text{i} \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

i stąd

$$x_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right). \quad (52)$$

Pozostało do oszacowania $\sin(\sqrt{\lambda_n}\tau)$. Mamy z (47)

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + O(1) = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

i w konsekwencji,

$$\sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}\tau\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

5. Operatory śladowe.

Podstawowym przykładem zwartego operatora był operator całkowy. Widzieliśmy, że dla takiego operatora, oprócz normy operatorowej możemy rozpatrywać mocniejszą od niej normę L^2 jądra operatora. Norma ta jest równa (Twierdzenie 19) sumie kwadratów wartości własnych. Zajmiemy się teraz dokładniej tymi relacjami.

5.1. Rozkład biegunowy. Niech $A \in B(\mathbf{H})$, wówczas $A^\dagger A$ jest dodatnim operatorem samosprężonym, więc z Twierdzenia Spektralnego 14 istnieje dodatni pierwiastek kwadratowy z $A^\dagger A$. Oznaczmy go $|A|$ i nazwijmy *modułem* A . Oczywiście $|\lambda A| = |\lambda||A|$, ale **nie jest prawdą**, że w ogólności $|A^\dagger| = |A|$, $|AB| = |A||B|$ i $|A+B| \leq |A| + |B|$.

Przypomnijmy, że operator $U \in B(\mathbf{H})$ jest *izometrią*, jeżeli $\|U(x)\| = \|x\|$ dla każdego $x \in \mathbf{H}$. U nazywamy *częściową izometrią*, jeżeli $\|U(x)\| = \|x\|$ dla każdego $x \in (\ker U)^\perp$. Operator U definiuje injekcję $(\ker U)^\perp \rightarrow \text{im } U$. Z tego, że U jest częściową izometrią wynika, że odwzorowanie odwrotne $\text{im } U \rightarrow (\ker U)^\perp$ jest ciągłe, zatem z twierdzenia o wykresie domkniętym $\text{im } U$ jest podprzestrzenią domkniętą. Mamy więc

$$\mathbf{H} = \ker U \oplus (\ker U)^\perp = (\text{im } U)^\perp \oplus \text{im } U.$$

Operator U obcięty do $(\ker U)^\perp$ jest unitarnym odwzorowaniem z $(\ker U)^\perp$ do $\text{im } U$.

Z formuły polaryzacyjnej wynika, że dla $x, y \in (\ker U)^\perp$ mamy równość

$$(U^\dagger Ux|y) = (Ux|Uy) = (x|y), \quad \text{czyli} \quad U^\dagger Ux = x \quad \text{dla} \quad x \in (\ker U)^\perp,$$

zatem $U^\dagger = U^{-1}$ na $\text{im } U$. Wynika stąd, że U^\dagger jest też częściową izometrią. Podsumowując,

STWIERDZENIE 10. Jeżeli U jest częściową izometrią, to

- (1) U^\dagger też jest częściową izometrią i $U^\dagger = U^{-1}$ na $\text{im } U$,
- (2) $U^\dagger U$ i UU^\dagger są operatorami rzutu ortogonalnego, odpowiednio na podprzestrzenie $(\ker U)^\perp$ i $\text{im } U$.

Druga własność w pełni charakteryzuje częściowe izometrie:

STWIERDZENIE 11. Jeżeli $U^\dagger U$ i UU^\dagger są operatorami rzutowymi, to U jest częściową izometrią.

DOWÓD: $\ker U^\dagger = (\text{im } U)^\perp$, więc

$$\begin{aligned} U: (\ker U)^\perp &\rightarrow \overline{\text{im } U} \\ U^\dagger: \overline{\text{im } U} &\rightarrow (\ker U)^\perp \end{aligned} \quad (53)$$

są iniekcjami.

$$U^\dagger U: (\ker U)^\perp \rightarrow (\ker U)^\perp$$

jest iniekcją i rzutem, więc $\text{im } U^\dagger U = (\ker U)^\perp$ i w konsekwencji, $\text{im } U^\dagger = (\ker U)^\perp$ oraz $\text{im } U = (\ker U^\dagger)^\perp$ (obrazy U i U^\dagger są domknięte). $U^\dagger U$ jest więc rzutem na $(\ker U)^\perp$ a UU^\dagger rzutem na $\text{im } U$. Dla $x \in (\ker U)^\perp$ mamy zatem

$$\|x\|^2 = (U^\dagger Ux|x) = (Ux|Ux) = \|Ux\|^2.$$

■

Jesteśmy gotowi do sformułowania i dowodu ważnego twierdzenia.

TWIERDZENIE 22 (O ROZKŁADZIE BIEGUNOWYM). Niech $A \in B(\mathbf{H})$. Istnieje częściowa izometria U taka, że $A = U|A|$, gdzie $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$. U jest jednoznacznie określone warunkiem $\ker U = \ker A$. Ponadto $\text{im } U = \overline{\text{im } A}$.

DOWÓD: Określmy odwzorowanie $U: \text{im } |A| \rightarrow \text{im } A$ warunkiem

$$U(|A|x) = Ax. \quad (54)$$

Sprawdzamy, że wzór ten określa odwzorowanie:

$$\| |A|x \|^2 = (x | |A|^2 x) = (x | A^\dagger A x) = \|Ax\|^2,$$

więc $\ker |A| = \ker A$ i $(|A|x = |A|y) \equiv (Ax = Ay)$. Wzór (54) określa odwzorowanie izometryczne. Przedłużamy je do izometrii $U: \overline{\text{im } |A|} \rightarrow \overline{\text{im } A}$. Kładąc $Ux = 0$ dla $x \in \ker A = \ker |A| = (\text{im } |A|)^\perp$ dostajemy częściową izometrię. Jednoznaczność i równość $\text{im } U = \overline{\text{im } A}$ są oczywiste. ■

5.2. Forma kanoniczna operatora zwartego.

TWIERDZENIE 23. Niech $A \in B(\mathbf{H})$ będzie zwartym operatorem. Istnieją układy ortonormalne wektorów (e_n) i (f_n) , oraz ciąg liczb dodatnich (λ_n) takie, że

$$Ax = \sum_n \lambda_n (e_n|x) f_n.$$

DOWÓD: A jest zwarty, więc również A^\dagger oraz $A^\dagger A$ są zwarte. $A^\dagger A$ jest ponadto samosprężony, więc z Twierdzenia 18 istnieje układ ortonormalny (e_n) wektorów własnych $A^\dagger A$, odpowiadających niezerowym wartościom własnym. Tworzą one bazę ortonormalną w $(\ker A)^\perp$.

Niech μ_n będą odpowiednimi wartościami własnymi. Oczywiście, μ_n są dodatnie, więc niech $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$. Kładziemy $\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n} A e_n$. (f_n) jest układem ortonormalnym:

$$\begin{aligned} (f_n | f_m) &= \left(\frac{1}{\lambda_n} A e_n \mid \frac{1}{\lambda_m} A e_m \right) = \left(\frac{1}{\lambda_n} A^\dagger A e_n \mid \frac{1}{\lambda_m} e_m \right) \\ &= \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_m} (e_n | e_m) = \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (55)$$

Ponadto, jeżeli $x = x_1 + x_2$, gdzie $x_2 \in \ker A$, $x_1 \in (\ker A)^\perp$, to

$$Ax = Ax_1 = A \left(\sum (e_n | x) e_n \right) = \sum \lambda_n (e_n | x) f_n.$$

■

Liczby λ_n nazywane są *liczbami charakterystycznymi (singularnymi)* operatora zwarteo A . Są to wartości własne $|A|$.

5.3. Przestrzeń operatorów śladowych. W dalszym ciągu zakładac będziemy, że H jest *ośrodkową* przestrzenią Hilberta.

TWIERDZENIE 24. Niech A będzie samosprzężonym, dodatnim operatorem w H i niech (e_n) będzie bazą ortonormalną w H . Wielkość $\sum_n (e_n | A e_n)$ nie zależy od wyboru bazy.

DOWÓD: Niech $(e_n), (f_n)$ będą dwiema bazami ortonormalnymi w H . Mamy (szeregi są o wyrazach dodatnich)

$$\begin{aligned} \sum_n (e_n | A e_n) &= \sum_n (A^{\frac{1}{2}} e_n | A^{\frac{1}{2}} e_n) = \sum_n \|A^{\frac{1}{2}} e_n\|^2 \\ &= \sum_n \left(\sum_m |(f_m | A^{\frac{1}{2}} e_n)|^2 \right) = \sum_m \left(\sum_n |(A^{\frac{1}{2}} f_m | e_n)|^2 \right) \\ &= \sum_m \|A^{\frac{1}{2}} f_m\|^2 = \sum_n (f_n | A f_n) \end{aligned} \quad (56)$$

■

Liczbę $\sum_n (e_n | A e_n)$ nazywamy *śladem* operatora A i oznaczamy $\text{tr } A$.

STWIERDZENIE 12. Własności śladu:

- (a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$,
- (b) $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$ dla $\lambda > 0$,
- (c) $0 \leq A \leq B$ to $\text{tr } A \leq \text{tr } B$,
- (d) $\text{tr}(U A U^{-1}) = \text{tr } A$ dla unitarnego U .

DOWÓD: Punkty (a), (b) i (c) są oczywiste. Dowodzimy (d). Jeżeli (e_n) jest bazą ortonormalną, to również $(U e_n)$ jest bazą ortonormalną. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= \sum_n (e_n | A e_n) = \sum_n (U^{-1} U e_n | A U^{-1} U e_n) \\ &= \sum_n (U e_n | U A U^{-1} U e_n) = \text{tr}(U A U^{-1}). \end{aligned} \quad (57)$$

■

DEFINICJA 5. Operator $A \in B(H)$ nazywamy *śladowym*, jeżeli $\text{tr } |A| < \infty$. Zbiór operatorów śladowych oznaczamy $B^1(H)$.

Zajmiemy się własnościami zbioru $B^1(H)$. Przydatny nam będzie następujący prosty lemat.

LEMAT 3. *Każdy operator $A \in B(\mathbf{H})$ jest kombinacją liniową czterech operatorów unitarnych.*

DOWÓD: Wiemy, że każdy operator jest kombinacją liniową dwóch operatorów samosprzężonych:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) - \frac{i}{2}(A - A^\dagger),$$

więc wystarczy pokazać, że każdy operator samosprzężony jest kombinacją dwóch operatorów unitarnych. Przyjmijmy, że A jest s.s. i $\|A\| \leq 1$, czyli że $\sqrt{\text{id} - A^2}$ jest dobrze określony. Mamy

$$A = \frac{1}{2}(A + \iota\sqrt{\text{id} - A^2}) + \frac{1}{2}(A - \iota\sqrt{\text{id} - A^2})$$

i sprawdzamy, że $(A \pm \iota\sqrt{\text{id} - A^2})$ są operatorami unitarnymi:

$$(A + \iota\sqrt{\text{id} - A^2})(A + \iota\sqrt{\text{id} - A^2})^\dagger = (A + \iota\sqrt{\text{id} - A^2})(A - \iota\sqrt{\text{id} - A^2}) = A^2 + (\sqrt{\text{id} - A^2})^2 = \text{id}$$

■

TWIERDZENIE 25.

- (a) $B^1(\mathbf{H})$ jest przestrzenią wektorową,
- (b) jeżeli $A \in B^1(\mathbf{H})$, to dla $B \in B(\mathbf{H})$ mamy $AB, BA \in B^1(\mathbf{H})$,
- (c) jeżeli $A \in B^1(\mathbf{H})$, to $A^\dagger \in B^1(\mathbf{H})$.

Inaczej mówiąc, $B^1(\mathbf{H})$ jest \dagger -ideałem.

DOWÓD: (a) Z równości $|\lambda A| = |\lambda||A|$ i z punktu (b) Stwierdzenia 12 mamy jednorodność $B^1(\mathbf{H})$. Niech teraz $A, B \in B^1(\mathbf{H})$. Z rozkładów biegunowych

$$\begin{aligned} A + B &= U|A + B|, \\ A &= V|A|, \\ B &= W|B| \end{aligned} \tag{58}$$

dostajemy

$$\sum_n (e_n | |A + B| e_n) = \sum_n (e_n | U^\dagger(A + B)e_n) \leq \sum_n |(e_n | U^\dagger A e_n)| + \sum_n |(e_n | U^\dagger B e_n)|.$$

Ale

$$\begin{aligned} \sum_n |(e_n | U^\dagger A e_n)| &= \sum_n |(e_n | U^\dagger V|A|e_n)| = \sum_n |(|A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger U e_n | |A|^{\frac{1}{2}}e_n)| \\ &\leq \sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger U e_n \right\| \left\| |A|^{\frac{1}{2}}e_n \right\| \\ &\leq \left(\sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger U e_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}}e_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{59}$$

więc wystarczy teraz pokazać, że

$$\sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger U e_n \right\|^2 \leq \sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}}e_n \right\|^2 \tag{60}$$

Wybermy bazę (e_n) tak, by jej elementy należały do $\ker U$ lub do $(\ker U)^\perp$. Z punktu (d) Stwierdzenia 12 mamy

$$\sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger U e_n \right\|^2 = \sum_n (V^\dagger U e_n | |A|V^\dagger U e_n) \leq \text{tr}(V|A|V^\dagger).$$

Podobnie,

$$\operatorname{tr}(V|A|V^\dagger) \leq \operatorname{tr}(|A|) = \sum_n (e_n |A| e_n) = \sum_n \| |A|^{\frac{1}{2}} e_n \|^2.$$

(b) Z Lematu wynika, że wystarczy rozpatrzyć unitarne B . Dla unitarnego B mamy $|UA|^2 = A^\dagger U^\dagger UA = |A|^2$ i

$$|AU|^2 = U^\dagger A^\dagger AU = U|A|U^\dagger U|A|U^\dagger = (U|A|U^{-1})^2$$

i stąd $\operatorname{tr}|AU| = \operatorname{tr}(U|A|U^{-1}) = \operatorname{tr}|A| = \operatorname{tr}|UA|$.

(c) Niech $A = U|A|$ i $A^\dagger = V|A|^\dagger$ będą rozkładami biegunowymi, wówczas $|A|^\dagger = U|A|V|A|^\dagger$ i stąd $|A|^\dagger = U|A|V$. Jeżeli $A \in B^1(\mathbf{H})$ to również $|A| \in B^1(\mathbf{H})$ i z punktu (b) wynika $U|A|V \in B^1(\mathbf{H})$. W konsekwencji, $|A|^\dagger \in B^1(\mathbf{H})$ i $A^\dagger = V|A|^\dagger \in B^1(\mathbf{H})$. ■

Dowodząc punkt (a) powyższego twierdzenia pokazaliśmy, że $\operatorname{tr}(A+B) \leq \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. Mamy też równość $\|Ax\| = \| |A|x \|$ i stąd równość $\|A\| = \| |A| \|$, a ponieważ $|A|$ jest s.s, więc

$$\|A\| = \| |A| \| = \sup_{\|x\|=1} (x | |A|x) = \sup_{\|x\|=1} \| |A|^{\frac{1}{2}} x \|^2.$$

Mamy też $x = \sum (e_n |x|) e_n$ i stąd nierówność

$$\| |A|^{\frac{1}{2}} x \|^2 \leq \sum_n |(e_n |x|)| \| |A|^{\frac{1}{2}} e_n \|^2 \leq \sum_n \| |A|^{\frac{1}{2}} e_n \|^2 = \operatorname{tr}|A|$$

i ostatecznie

$$\|A\| = \| |A| \| \leq \operatorname{tr}(|A|), \quad (61)$$

zatem funkcja

$$\| \cdot \|_1 : B^1(\mathbf{H}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|_1 = \operatorname{tr}(|A|)$$

jest normą, mocniejszą od normy operatorowej w $B(\mathbf{H})$.

TWIERDZENIE 26. $B^1(\mathbf{H})$ z normą $\| \cdot \|_1$ jest algebrą Banacha. Ponadto, dla $A \in B^1(\mathbf{H})$, $B \in B(\mathbf{H})$

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|, \quad \|BA\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|. \quad (62)$$

DOWÓD: Pokażemy najpierw zupełność przestrzeni $B^1(\mathbf{H})$ w normie $\| \cdot \|_1$. Niech (A_n) będzie ciągiem Cauchy'ego względem normy $\| \cdot \|_1$. Jest to też ciąg Cauchy'ego w normie $\| \cdot \|$, więc istnieje jego granica A (przestrzeń $B(\mathbf{H})$ z normą $\| \cdot \|$ jest zupełna). Niech P będzie rzutem na podprzestrzeń wymiaru skończonego. Oczywiście jest, że dla $B \in B(\mathbf{H})$

$$\operatorname{tr}(|B|) = \sup_P \operatorname{tr}(P|B|P) \quad (63)$$

i że

$$\| |A - A_n| \| = \lim_{m \rightarrow \infty} \| |A_m - A_n| \|, \quad \text{a stąd} \quad \|P|A - A_n|P\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|P|A_m - A_n|P\|.$$

Ponieważ w przestrzeni wymiaru skończonego wszystkie normy są równoważne, dostajemy, uwzględniając (63),

$$\operatorname{tr}(P|A - A_n|P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(P|A_m - A_n|P) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(|A_m - A_n|).$$

(A_n) jest ciągiem Cauchy'ego względem $\| \cdot \|_1$, więc granica $\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(|A_m - A_n|)$ istnieje, a ponieważ P było dowolnym rzutem, dostajemy, że $A - A_n \in B^1(\mathbf{H})$ i

$$\|A - A_n\|_1 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - A_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Niech teraz $A \in B^1(\mathbf{H})$, $B \in B(\mathbf{H})$ i niech będą rozkładami biegunowymi. Z Twierdzenia 31 (będzie udowodnione później) wynika, że

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(|BA|) &= \operatorname{tr}(VBU^\dagger |A|^{\frac{1}{2}} |A|^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{tr}(|A|^{\frac{1}{2}} VBU^\dagger |A|^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_k (e_k | |A|^{\frac{1}{2}} VBU^\dagger |A|^{\frac{1}{2}} e_k) = \sum_k (|A|^{\frac{1}{2}} e_k | VBU^\dagger |A|^{\frac{1}{2}} e_k) \\ &\leq \sum_k \| |A|^{\frac{1}{2}} e_k \| \| VBU^\dagger |A|^{\frac{1}{2}} e_k \| \leq \|B\| \sum_k \| |A|^{\frac{1}{2}} e_k \|^2 = \|B\| \operatorname{tr}(|A|) \end{aligned}$$

Podobnie, pierwszą nierówność dostajemy, korzystając z punktu (d) Stwierdzenia 12, Twierdzenia 31 i rozkładów biegunowych $A = U|A|$, $AB = V|AB|$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(|AB|) &= \operatorname{tr}(V^\dagger U|A|B) = \operatorname{tr}(V^\dagger U|A|BV^\dagger U U^\dagger V) = \operatorname{tr}(|A|BV^\dagger U) = \operatorname{tr}(|A|^{\frac{1}{2}} BV^\dagger U|A|^{\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_k (e_k | |A|^{\frac{1}{2}} BV^\dagger U|A|^{\frac{1}{2}} e_k) \leq \|B\| \operatorname{tr}(|A|) \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 27. *Każdy operator śladowy jest zwarty. Operator zwarty A jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n < \infty$, gdzie λ_n są liczbami singularnymi operatora A .*

Dowód: Niech (e_k) będzie bazą ortonormalną w \mathbf{H} , a V_n podprzestrzenią rozpiętą na pierwszych n -wektorach bazy. Zdefiniujmy operator A_n wzorem

$$A_n x = \sum_{k=1}^n (e_k | x) A e_k. \quad (64)$$

Jest to operator skończenie-wymiarowy. Pokażemy, że A jest granicą (A_n) w normie operatorowej. Mamy $x = \sum_k (e_k | x) e_k$ i stąd $Ax = \sum_k (e_k | x) A e_k$, więc z (64) dostajemy

$$(A - A_n)x = \sum_{k=n+1}^{\infty} (e_k | x) A e_k \quad \text{i} \quad \|A - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A - A_n)x\| = \sup_{x \in V_n^\perp, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

A jest operatorem śladowym, więc $|A|^2$ też i $\operatorname{tr} |A|^2 = \sum_k \|A e_k\|^2$. Biorąc $e_{n+1} = x$ dostajemy

$$\|Ax\|^2 = \|A e_{n+1}\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 = \operatorname{tr} |A|^2 - \sum_{k=1}^n \|A e_k\|^2$$

i stąd

$$\|A - A_n\|^2 = \sup_{x \in V_n^\perp, \|x\|=1} \|Ax\|^2 \leq \operatorname{tr} |A|^2 - \sum_{k=1}^n \|A e_k\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

A jest zwarty, bo jest granicą operatorów skończenie-wymiarowych.

Niech teraz A będzie operatorem zwartym i $Ax = \sum_k \lambda_n (e_k | x) f_k$ jego formą kanoniczną (Twierdzenie 23). e_k jest tu wektorem własnym $|A|$, a λ_k jego wartością własną. Zatem

$$\operatorname{tr} |A| = \sum_k (e_k | |A| e_k) = \sum_k \lambda_k.$$

■

Podsumowując, operatory śladowe tworzą, podobnie jak operatory zwarte, ideał w algebrze operatorów. Operatory zwarte tworzą ideał domknięty w $B(\mathbf{H})$, podczas gdy przestrzeń operatorów śladowych nie jest domknięta. Jest zupełna ze względu na normę śladową.

5.4. Operatory Hilberta-Schmidta. Operator $A \in B(\mathbf{H})$ nazywany jest *operatorem Hilberta-Schmidta* jeżeli $A^\dagger A$ jest operatorem śladowym, tzn. $\operatorname{tr}(A^\dagger A) < \infty$. Zbiór operatorów Hilberta-Schmidta oznaczajmy $B^2(\mathbf{H})$. Podobnie jak w przypadku operatorów śladowych dowodzi się następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 28.

- (a) $B^2(\mathbf{H})$ jest \dagger -ideałem w $B(\mathbf{H})$,
(b) jeżeli $A, B \in B^2(\mathbf{H})$, to dla każdej bazy ortonormalnej (e_n) szereg

$$\sum_k (e_k | A^\dagger B e_k)$$

- jest zbieżny bezwzględnie i jego suma nie zależy od wyboru bazy,
(c) forma półtoraliniowa

$$(A|B)_2 = \sum_k (e_k | A^\dagger B e_k),$$

- definiuje na $B^2(\mathbf{H})$ strukturę przestrzeni Hilberta,
(d) mamy nierówności $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$ i równość $\|A\|_2 = \|A^\dagger\|_2$,
(e) każdy operator Hilberta-Schmidta jest zwarty i operator zwarty A jest Hilberta-Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n^2 < \infty$, gdzie λ_n są liczbami singularnymi A ,
(f) operatory skończenie-wymiarowe tworzą zbiór gęsty w $B^2(\mathbf{H})$,
(g) jeżeli $A, B \in B^2(\mathbf{H})$, to $AB \in B^1(\mathbf{H})$.

DOWÓD:

■

Poniższe twierdzenie pokazuje, że operatory Hilberta-Schmidta są naturalnym uogólnieniem operatorów całkowych.

TWIERDZENIE 29. Niech (M, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $\mathbf{H} = L^2(M, \mu)$. Operator $A \in B(\mathbf{H})$ jest Hilberta-Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ takie, że

$$(Af)(x) = \int K(x, y)f(y)d\mu(y).$$

Ponadto,

$$\|A\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2 d\mu(x)d\mu(y).$$

DOWÓD: Jest analogiczny do dowodu w przypadku $\mathbf{H} = L^2([0, 1])$. Niech $K \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ i niech A_K będzie odpowiednim operatorem całkowym. Oszacujmy $A_K f$ w normie $L^2(M, \mu)$:

$$\begin{aligned} & \int |Af(x)|^2 d\mu(x) \leq \int \left(\int |K_A(x, y)f(y)| d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \\ & \leq \int \left(\int |K_A|^2(x, y) d\mu(y) \int |f|^2(y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int |f|^2(y) d\mu(y) \int \int |K_A|^2(x, y) d\mu(y), \end{aligned}$$

czyli

$$\|Af\|_{L^2} \leq \|K_A(x, y)\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.$$

Oznacza to, że $K_A \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ definiuje ciągły operator $A: L^2(M, \mu) \rightarrow L^2(M, \mu)$ z szacowaniem normy $\|A\| \leq \|K_A(x, y)\|_{L^2}$.

Zwartość udowodnimy pokazując, że A_K jest granicą operatorów skończenie-wymiarowych. $L^2(M, \mu)$ można wybrać przeliczalną bazę ortonormalną (φ_n) . Funkcje $\varphi_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\varphi_m(y)$ tworzą bazę ortonormalną w $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$. Mamy więc

$$K_A = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \varphi_{nm}, \quad A_K f = \sum_{n,m} \alpha_{nm} (\varphi_n | f) \varphi_m.$$

Oznaczmy przez P_N rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez N pierwszych wektorów bazy. Mamy

$$P_N A P_N f = \sum_{n,m=1}^N \alpha_{nm} (\varphi_n | f) \varphi_m.$$

Stąd $P_N A P_N \rightarrow A$ w normie operatorowej, bo jądra zbiegają w $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$. Obliczamy ślad

$$\text{tr}(A_K^\dagger A_k) = \sum \|A_K \varphi_n\|^2 = \sum_{n,m} |\alpha_{nm}|^2 = \|K\|_{L^2},$$

więc odwzorowanie $K \rightarrow A_K$ jest izometrią przestrzeni $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ w $B^2(\mathbf{H})$. Teza wynika z faktu, że każdy operator skończenie-wymiarowy można przedstawić jako całkowy, a operatory skończenie-wymiarowe tworzą zbiór gęsty w $B^2(\mathbf{H})$. ■

5.5. Ślad operatora śladowego.

TWIERDZENIE 30. Niech $A \in B^1(\mathbf{H})$ i niech (e_n) będzie bazą ortonormalną w \mathbf{H} . Szereg $\sum (e_n | A e_n)$ jest zbieżny bezwzględnie i jego suma nie zależy od wyboru bazy.

DOWÓD: Z rozkładu biegunowego A mamy $A = U |A|^{\frac{1}{2}} |A|^{\frac{1}{2}}$ i stąd

$$|(e_k | A e_k)| = |(|A|^{\frac{1}{2}} U^\dagger e_k | |A|^{\frac{1}{2}} e_k)| \leq \| |A|^{\frac{1}{2}} U^\dagger e_k \| \| |A|^{\frac{1}{2}} e_k \|.$$

Zatem

$$\sum_k |(e_k | A e_k)| \leq \sum_k \| |A|^{\frac{1}{2}} U^\dagger e_k \| \| |A|^{\frac{1}{2}} e_k \| \leq \left(\sum_k \| |A|^{\frac{1}{2}} U^\dagger e_k \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \| |A|^{\frac{1}{2}} e_k \|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

a ponieważ $|A|^{\frac{1}{2}} U^\dagger$ i $|A|^{\frac{1}{2}}$ należą do $B^2(\mathbf{H})$, to szereg jest zbieżny. Niezależność od wyboru bazy dowodzi się tak samo jak w przypadku dodatniego A . ■

Sumę szeregu $\sum (e_n | A e_n)$ nazywamy *śladem* operatora A i oznaczamy $\text{tr } A$.

Uwaga! Zbieżność bezwzględna szeregu $\sum (e_n | A e_n)$ dla pewnej bazy nie wystarcza, by A był śladowy. Musimy mieć zagwarantowaną zbieżność dla wszystkich baz.

TWIERDZENIE 31. Własności śladu:

- (a) tr jest funkcjonałem liniowym,,
- (b) $\text{tr } A^\dagger = \overline{\text{tr } A}$,
- (c) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ dla $A \in B^1(\mathbf{H})$ i $B \in B(\mathbf{H})$.

DOWÓD: Dwa pierwsze punkty są oczywiste. Dowodząc punkt (c) wystarczy się ograniczyć do unitarnych B , bo każdy operator jest kombinacją liniową czterech unitarnych. Dla unitarnego B mamy

$$\text{tr}(AB) = \sum (e_n | A B e_n) = \sum (B^\dagger B e_n | A B e_n) = \sum (B e_n | B A B e_n) = \text{tr}(BA).$$

■