ANALIZA FUNKCJONALNA II (2015/2016)

1. Widmo operatora zwartego i operatora samosprzężonego.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i $B(\mathsf{H})$ zbiorem operatorów ograniczonych w H. *Zbiorem rezolwentowym* operatora $A \in B(\mathsf{H})$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{rs}(A) := \{z \in \mathbb{C} : z\,\mathrm{Id}_{\mathsf{H}} - A \ \text{ jest odwracalny w } B(\mathsf{H})\}\,. \tag{1}$$

Widmem (spektrum) $\mathrm{sp}(A)$ operatora A nazywamy dopełnienie zbioru $\mathrm{rs}(A)$ w $\mathbb{C}$

$$\mathrm{sp}(A) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{rs}(A).$$

Element widma λ nazywamy *wartością własną*, jeżeli $\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathsf{H}} - A$ ma nietrywialne jądro. Zbiór wartości własnych nazywamy *widmem punktowym (czysto punktowym)* i oznaczamy $\mathrm{sp}_p(A)$. Ponieważ zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty w $B(\mathsf{H})$, zbiór rezolwentowy jest otwarty a spektrum jest zbiorem domkniętym. Liczbę

$$\mathrm{sr}(A) = \sup_{z \in \mathrm{sp}(A)} |z|$$

nazywamy *promieniem spektralnym* operatora A. W Twierdzeniu 29 pokażemy, w większej ogólności, że zachodzi formuła Gelfanda-Beurlinga:

$$\mathrm{sr}(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Struktura przestrzeni Hilberta pozwala wprowadzić operację sprzężenia w $B(\mathsf{H})$. Łatwo sprawdzamy, że $\|A^\dagger\| = \|A\|$. Przydatne będzie następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1. *A jest operatorem samosprzężonym wtedy i tylko wtedy, gdy $(x|Ax) \in \mathbb{R}$ dla każdego $x \in \mathsf{H}$.*

Dowód: Jeżeli A jest s.s. (samosprzężony), to $(x|Ay) = (Ax|y)$ i stąd

$$(x|Ax) = (Ax|x) = \overline{(x|Ax)}.$$

Aby dowieść wynikanie w drugą stronę przypomnijmy wzory polaryzacyjne. Oznaczmy $h(x,y) = (x|Ay)$. Mamy

$$h(x+y, x+y) = h(x,x) + h(y,y) + h(x,y) + h(y,x),$$
$$h(\iota x+y, \iota x+y) = h(x,x) + h(y,y) - \iota h(x,y) + \iota h(y,x) \qquad \text{i stąd}$$
$$h(x,y) = \frac{1}{2}\left(h(x+y,x+y) - h(x,x) - h(y,y)\right) + \frac{\iota}{2}\left(h(\iota x+y,\iota x+y) - h(x,x) - h(y,y)\right),$$
$$h(y,x) = \frac{1}{2}\left(h(x+y,x+y) - h(x,x) - h(y,y)\right) - \frac{\iota}{2}\left(h(\iota x+y,\iota x+y) - h(x,x) - h(y,y)\right),$$

czyli $(x|Ay) = h(x,y) = \overline{h(y,x)} = \overline{(y|Ax)} = (Ax|y)$. ■

Definicja 1. Operator A nazywamy *dodatnim*, jeżeli $(x|Ax) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathsf{H}$. Piszemy $A \geqslant 0$.

Ze Stwierdzenia 1 wynika, że operator dodatni jest s.s.

1.1. Własności spektralne operatora samosprzężonego.

Twierdzenie 1. *Jeżeli A jest operatorem samosprzężonym, to* $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

DOWÓD: Niech $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ i niech $\mu \neq 0$. Pokażemy, że istnieje $(A - (\lambda + \iota\mu))^{-1}$, czyli że $\lambda + \iota\mu \in \mathrm{rs}(A)$. Ponieważ A jest s.s., mamy szacowanie dla $x \in \mathsf{H}$:

$$\begin{aligned}\|(A - (\lambda + \iota\mu))x\|^2 &= ((A - (\lambda + \iota\mu))x \mid (A - (\lambda + \iota\mu))x) \\ &= ((A - \lambda)x \mid (A - \lambda)x) + ((A - \lambda)x \mid -\iota\mu x) + (-\iota\mu x \mid (A - \lambda)x) + \mu^2\|x\| \\ &= \|(A - \lambda)x\|^2 - \iota\mu(Ax|x) + \iota\mu\lambda(x|x) - \iota\mu\lambda(x|x) + \iota\mu(x|Ax) + \mu^2\|x\|^2 \\ &= \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2\|x\|^2 \geqslant \mu\|x\|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Z tej nierówności wynika, że operator $A - (\lambda + \iota\mu)$ jest injekcją i odwrotny jest ciągły na swojej dziedzinie. Wystarczy teraz pokazać, że obraz $A - (\lambda + \iota\mu)$ jest gęsty. Wynika to z ogólnego faktu, że domknięcie obrazu jest anihilatorem jądra operatora sprzężonego. W naszym przypadku

$$(A - (\lambda + \iota\mu))^\dagger = A - (\lambda - \iota\mu),$$

więc z nierówności (3) jądro $A - (\lambda - \iota\mu)$ jest trywialne. ■

Przydatny będzie następujący lemat.

LEMAT 1. *Jeżeli A jest s.s., to*

$$\|A\| = \sup_{\|v\|\leqslant 1} |(v|Av)| = \sup_{\|v\|=1} |(v|Av)| \tag{4}$$

DOWÓD: Z definicji normy operatora,

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1, \|w\|=1} |(v|Aw)|,$$

więc wystarczy pokazać, że

$$|(v|Aw)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(x|Ax)|. \tag{5}$$

Nierówność ta jest zachowana, jeżeli v zastąpimy przez λv, gdzie $|\lambda| = 1$, więc możemy przyjąć, że $(v|Aw)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Dostajemy w tym przypadku

$$\begin{aligned}|(v|Aw)| = (v|Aw) &= \frac{1}{2}\left((v|Aw) + (w|Av)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((v + w|A(v + w)) - (v - w|A(v - w))\right) \\ &\leqslant \frac{1}{4}\left(\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2\right) \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(x|Ax)| \\ &= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(x|Ax)| \end{aligned} \tag{6}$$

■

TWIERDZENIE 2. *Dla każdego operatora A, operator $A^\dagger A$ jest dodatni i*

$$\|A^\dagger A\| = \|A\|^2. \tag{7}$$

DOWÓD: Z równości $(v|A^\dagger Av) = (Av|Av) = \|Av\|^2$ mamy dodatniość, więc i samosprzężoność $A^\dagger A$. Z Lematu

$$\|A^\dagger A\| = \sup_{\|v\|=1} (v|A^\dagger Av) = \sup_{\|v\|=1} (Av|Av) = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|^2 = \left(\sup_{\|v\|=1} \|Av\|\right)^2 = \|A\|^2.$$

■

Stąd już łatwo wynika ważne twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Dla operatora samosprzężonego norma jest równa promieniowi spektralnemu,* $\|A\| = \mathrm{sr}(A)$.

Dowód: Z poprzedniego twierdzenia $\|A\|^2 = \|A^2\|$ i stąd $\|A^{2^m}\| = \|A\|^{2^m}$. Z formuły (2) Gelfanda-Beurlinga dostajemy dostajemy $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \|A\|$. ■

1.2. Własności spektralne samosprzężonego operatora zwartego.
Dla przypomnienia:

Twierdzenie 4 Alternatywa Fredholma. *Niech* $A: X \to X$ *będzie zwartym odwzorowaniem przestrzeni Hilberta* X *w siebie. Możliwe są dwie, wykluczające się sytuacje*

(1) *dla każdego* $g \in X$ *istnieje rozwiązanie równania* $(Id - A)f = g$,
(2) *równanie jednorodne* $(Id - A)f = 0$ *ma nietrywialne rozwiązanie.*

Z twierdzenia tego wynika natychmiast ważne

Twierdzenie 5. *Jeżeli* $A \in B(\mathsf{H})$ *jest zwarty, to każde* $0 \neq \lambda \in \mathrm{sp}(A)$ *jest wartością własną.*

Dowód: Istotnie, jeżeli A jest zwarty i $\lambda \neq 0$, to z alternatywy Fredholma wynika, że $\lambda \in \mathrm{rs}(A)$ lub λ jest wartością własną. ■

Wniosek 1. *Jeżeli* A *jest s.s. i zwarty, to* $\|A\|$ *lub* $-\|A\|$ *jest wartością własną.*

Dowód: A jest s.s., więc $\mathrm{sr}(A) = \|A\|$, czyli $\|A\|$ lub $-\|A\|$ należy do $\mathrm{sp}(A)$. Z poprzedniego Twierdzenia wynika teza. ■

Twierdzenie 6 (Riesz-Schauder). *Widmo samosprzężonego, zwartego* A *nie może mieć punktu skupienia różnego od zera.*

Dowód: Niech A będzie zwartym, samosprzężonym operatorem i $\lambda \neq 0$ punktem skupienia $\mathrm{sp}(A)$. Oznacza to, że istnieje ciąg $\mathrm{sp}(A) \ni \lambda_j \to \lambda$ taki, że $\lambda_j \neq \lambda_i \neq \lambda$ dla $i \neq j$. Możemy przyjąć, że $\lambda_j \neq 0$, więc λ_j są wartościami własnymi. Niech x_j będą odpowiednimi, unormowanym wektorami własnymi $Ax_j = \lambda_j x_j$. Ponieważ A jest samosprzężony, to dla $i \neq j$

$$\lambda_j(x_j|x_i) = (\lambda_j x_j|x_i) = (Ax_j|x_i) = (x_j|Ax_i) = \lambda_i(x_j|x_i)$$

i stąd $(x_j|x_i) = 0$. Zatem

$$\|Ax_j - Ax_i\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \to 2\lambda^2 \neq 0.$$

Oznacza to, że z ciągu (Ax_j) nie można wybrać podciągu zbieżnego, co przeczy zwartości A. ■

Przypomnijmy, że w każdej przestrzeni Hilberta istnieje baza ortonormalna.

Twierdzenie 7 (Hilbert-Schmidt). *Jeżeli* A *jest operatorem samosprzężonym, zwartym, to w* H *istnieje ortonormalna baza wektorów własnych.*

Dowód: Niech $\lambda \neq 0$ będzie wartością własną A. Odpowiednia przestrzeń wektorów własnych jest wymiaru skończonego i posiada skończoną bazę ortonormalną. Przestrzenie własne odpowiadające róznym wartościom własnym są ortogonalne, więc podprzestrzeń domknięta, rozpięta na wektorach własnych niezerowych wartości własnych ma ortonormalną bazę wektorów własnych. Oznaczmy tą przestrzeń V. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza operatora A, więc $V^\perp$ też jest podprzestrzenią niezmienniczę. $A|_{V^\perp}$ jest operatorem samosprzężonym, zwartym, bez niezerowych wartości własnych. Zatem $\mathrm{sp}(A|_{V^\perp}) = \{0\}$, czyli $\|A|_{V^\perp}\| = 0$. Dowolna baza ortonormalna w $V^\perp$ jest bazą wektorów własnych. Razem z bazą w V daje bazę ortonormalną wektorów własnych w $V \oplus V^\perp = \mathsf{H}$. ■

2. Zagadnienie Sturma-Liouville'a.

W klasycznym sformułowaniu zagadnienie Sturma-Liouville'a jest zagadnieniem własnym dla zagadnienia brzegowego na odcinku $[a, b]$

$$(-pu')' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0, \quad p(t) > 0, \ q(t) \geqslant 0 \tag{8}$$

z odpowiednio regularnymi, rzeczywistymi współczynnikami funkcyjnymi p, q. Możemy też ograniczyć się do rzeczywistych funkcji u. Mówiąc o zagadnieniu własnym zakładamy że operator z lewej strony (8) działa w jednej przestrzeni, np. w przestrzeni Hilberta. Jedynym naturalnym kandydatem jest przestrzeń $L^2([a, b])$, ale (8) nie jest w tej przestrzeni odwzorowaniem ciągłym.

Żeby lepiej zrozumieć sytuację, spójrzmy na zagadnienie z innej strony. Na przestrzeni funkcji gładkich rozpatrzmy funkcjonał

$$\mathcal{L}\colon u \mapsto \frac{1}{2} \int_{[a,b]} (p(u')^2 + q(u)^2).$$

Oczywistym jest, że $\mathcal{L}$ da się rozszerzyć w sposób ciągły do przestrzeni $H^1([a, b])$ funkcji całkowalnych z kwadratem, których pochodna też jest całkowalna z kwadratem. $\mathcal{L}$ jest zatem funkcjonałem kwadratowym i ciągłym na $H^1([a, b])$, więc różniczkowalnym i jego pochodna

$$\delta\mathcal{L}\colon H^1([a, b]) \to (H^1([a, b]))^* = H^{-1}([a, b])$$

jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym. Dodając do $\mathcal{L}$ wyraz $\frac{1}{2}\int_{[a,b]}(u)^2$ dostajemy funkcjonał $\mathcal{L}'$ równoważny kwadratowi normy w $H^1([a, b])$, więc pochodna $\delta\mathcal{L}'$ jest izomorfizmem. Z kolei, pochodna $\frac{1}{2}\int_{[a,b]}(u)^2$ jest izomorfizmem $H^0([a, b]) \to (H^0([a, b]))^* = H^0([a, b])$, więc jej obcięcie do $H^1([a, b])$ zadaje odwzorowanie zwarte (włożenie $H^1([a, b]) \hookrightarrow H^0([a, b])$ jest zwarte). Wnioskujemy stąd, że $\delta\mathcal{L}$ jest samosprzężonym odwzorowaniem Fredholma. Funkcjonał $\mathcal{L}$ jest dodatni, więc jądro $\delta\mathcal{L}$ pokrywa się z poziomicą zerową $\mathcal{L}$ i zawiera się w jednowymiarowej podprzestrzeni funkcji stałych.

Zobaczmy, jak wygląda $\delta\mathcal{L}(u)$ dla regularnych u:

$$< \delta\mathcal{L}(u), v >= \int_{[a,b]} (pu'v' + quv) = (pu'v)(b) - (pu'v)(a) + \int_{[a,b]} (-(pu') + qu)v, \tag{9}$$

więc $\delta\mathcal{L}(u)$ jest reprezentowane trójką $((pu')(a), -(pu') + qu)v, (pu')(b))$ (dwie liczby i funkcja).

Ograniczmy teraz $\mathcal{L}$ do podprzestrzeni $H^1_0([a, b])$ funkcji zerujących się na brzegu: $u(a) = u(b) = 0$ (funkcje z $H^1([a, b])$ są ciągłe, więc ma to sens). Teraz

$$\delta\mathcal{L}\colon H^1_0([a, b]) \to (H^1_0([a, b]))^* = H^{-1}_0([a, b])$$

Przestrzeń dualna $H^{-1}_0([a, b])$ jest przestrzenią ilorazową przestrzeni $H^{-1}([a, b])$. Dla regularnych u, w (9) znikają człony brzegowe i $\delta\mathcal{L}(u)$ jest reprezentowane funkcją $-(pu') + qu$. Ponadto, $\delta\mathcal{L}$ pozostaje Fredholma, samosprzeżone, ale teraz jądro jest trywialne i stąd $\delta\mathcal{L}$ jest izomorfizmem. Mamy więc odwzorowanie odwrotne, będące też izomorfizmem,

$$(\delta\mathcal{L})^{-1}\colon H^{-1}_0([a, b]) \to H^1_0([a, b]).$$

Dla regularnych u, $\delta\mathcal{L}(u)$ jest reprezentowane funkcją, jest więc w obrazie naturalnego włożenia $J^*\colon H^0([a, b]) \hookrightarrow H^{-1}_0([a, b])$, dualnego do włożenia $J\colon H^1_0([a, b]) \hookrightarrow H^0([a, b])$ (które jest odwzorowaniem zwartym). W konsekwencji, odwzorowanie

$$J^* \circ (\delta\mathcal{L})^{-1} \circ J\colon H^0([a, b]) \to H^0([a, b]) \tag{10}$$

jest odwzorowaniem zwartym, a własności spektralne operatora zwartego są nam już znane.

Uwaga. Powyższe rozumowanie można zastosować do szerokiej klasy obszarów w $\mathbb{R}^n$ i operatorów różniczkowych zadanych zasadą wariacyjną, jak na przykład w elektrostatyce.

Pokażemy teraz, że (10) jest operatorem całkowym konstruując jego jądro całkowe. Zamiast więc zajmować się zagadnieniem spektralnym (8) zajmiemy się spektrum operatora odwrotnego. Pamiętajmy, że $p(t) > 0,\ q(t) \geqslant 0$ i rozpatrzmy zagadnienia początkowe

$$\begin{aligned} &(-pu')' + qu = 0, \quad u(a) = 0 \\ &(-pv')' + qv = 0, \quad v(b) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Wiemy, że przestrzenie rozwiązań dla tych zagadnień są jednowymiarowe i ich przecięcie jest zerowe. Istotnie, jeżeli u jest rozwiązaniem dla obu zagadnień, to

$$0 = \int_{[a,b]} ((-p\bar{u}')' + q\bar{u})u = \int_{[a,b]} (p|u'|^2 + q|u|^2) - u\bar{u}' \mid_a^b = \int_{[a,b]} (p|u'|^2 + q|u|^2)$$

i stąd $u' = 0$, czyli $u = 0$. Niech u_0 i v_0 będą niezerowymi, dla wygody rzeczywistymi, rozwiązaniami zagadnień (11). Ponieważ są liniowo niezależne, ich wyznacznik Wrońskiego $W(t) = u_0'(t)v_0(t) - u_0(t)v_0'(t)$ jest różny od zera i z twierdzenia Liouville'a

$$W(t) = W(a)\exp\left(-\int_a^t \frac{p'}{p}\mathrm{d}t\right) = W(a)\frac{p(a)}{p(t)},$$

czyli $t \mapsto W(t)p(t) = W(a)p(a)$ jest funkcją stałą.

Zdefiniujemy funkcję $G\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$G(t,s) = \frac{1}{pW}\begin{cases} u_0(t)v_0(s), & \text{dla } t \leqslant s \\ v_0(t)u_0(s), & \text{dla } t \geqslant s \end{cases}. \tag{12}$$

G jest funkcją ciągła na $[a,b] \times [a,b]$, symetryczną, i przy ustalonym t

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(-p\frac{\partial G}{\partial s}\right) + qG = a(t)\delta_t,$$

gdzie $a(t)$ jest skokiem $s \mapsto -p\frac{\partial}{\partial s}G(t,s)$ w punkcie $s = t$:

$$a(t) = -p(t)\frac{1}{pW}(u_0(t)v_0'(t) - u_0'(t)v_0(t)) = 1.$$

Wynika stąd, że funkcja u na $[a,b]$, zadana wzorem

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{d}s$$

spełnia równanie (dla ciągłego f) $(-pu')' + qu = f$ i ponadto

$$u(a) = \frac{1}{pW}\int_a^b u_0(a)v_0(s)f(s)\mathrm{d}s = 0, \quad u(b) = \frac{1}{pW}\int_a^b v_0(b)u_0(s)f(s)\mathrm{d}s = 0,$$

zatem odwzorowanie

$$A\colon f \mapsto \int_a^b G(\cdot,s)f(s)\mathrm{d}s$$

jest odwrotnym do operatora różniczkowego $L(u) = (-pu')' + qu$ określonego na funkcjach spełniających warunek $u(a) = u(b) = 0$. A jest operatorem całkowym, z jądrem ciągłym, zatem da się rozszerzyć do operatora ciągłego w $L^2([a,b])$. Jest to operator zwarty i samosprzężony (jądro jest symetryczne). Oznaczać go będziemy też przez A, podobnie relację A^{-1} oznaczać będziemy L. Oczywistym jest, że A jest równy operatorowi zdefiniowanemu wzorem (10). Oczywistym jest też, że jeżeli λ jest takie, że dla niego istnieje rozwiązanie problemu (8), to $\dfrac{1}{\lambda}$ jest wartością własną A. Wartości własne sa jednokrotne, bo przestrzeń rozwiązań zagadnienia

$$(-pu')' + qu = \lambda u, \quad u(a) = 0$$

jest wymiaru jeden. Z równości

$$\lambda \|u\| = (u|\lambda u) = (u|L(u)) = \int_{[a,b]} (p(u')^2 + qu^2) > 0$$

wynika, że wartości własne są dodatnie.

Z Twierdzenia 7 wynika istnienie w $L^2([a,b])$ ortonormalnej bazy wektorów własnych operatora A (L). Niech φ_n będzie taką bazą. Funkcje $\varphi_n \otimes \varphi_m$ tworzą bazę ortonormalną w $L^2([a,b] \times [a,b])$ i stąd

$$G(t,s) = \sum \alpha_{mn} \varphi_m(t) \varphi_n(s).$$

Mamy więc

$$\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n = A(\varphi_n) = \int_a^b \sum \alpha_{kl}\varphi_k\varphi_l(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s = \sum\sum \alpha_{kl}\varphi_k(\varphi_l|\varphi_n) = \sum_k \alpha_{kn}\varphi_k$$

i stąd $\alpha_{kn} = \dfrac{1}{\lambda_n}\delta_{kn}$. Ostatecznie,

$$\|G\|_{L^2} = \sum \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \tag{13}$$

Podsumowując,

Twierdzenie 8.

(1) *W $L^2([a,b])$ istnieje baza ortonormalna wektorów własnych operatora L,*
(2) *wartości własne są dodatnie,*
(3) *wartości własne mają krotność 1 (wymiar przestrzeni wektorów własnych jest 1),*
(4) $\sum \dfrac{1}{\lambda_n^2} < \infty$, *gdzie λ_n są wartościami własnymi L.*

Twierdzenie 9 (Zasada minimaks Couranta). *Niech (μ_n) będą wartościami własnymi zwartego, dodatniego (więc samosprzężonego) operatora A w przestrzeni Hilberta H. Wartości własne ukadamy w ciąg*

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \cdots > 0$$

tak, że wartość własna występuje w tym ciągu tyle razy, ile wynosi jej krotność (wymiar przestrzeni wektorów własnych). Wówczas

$$\mu_n = \inf_{\substack{V \\ \dim V = n-1}} \sup_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax). \tag{14}$$

Dowód: Niech (e_i) będzie bazą ortonormalną wektorów własnych taką, że e_i jest wektorem własnym dla wartości własnej μ_i. Niech $V \subset \mathsf{H}$, $\dim V = n-1$, wówczas $V^\perp$ ma nietrywialne przecięcie z przestrzenią rozpiętą na $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Istnieje więc

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in V^\perp, \quad \|x\| = 1.$$

Mamy więc

$$(x|Ax) = \mu_1|\alpha_1|^2 + \cdots + \mu_n|\alpha_n|^2 \geqslant \mu_n, \quad \text{bo} \quad |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \|x\| = 1$$

a stąd

$$\sup_{\substack{x\in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax) \geqslant \mu_n \quad \text{i} \quad \inf_{\substack{V \\ \dim V = n-1}} \sup_{\substack{x\in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax) \geqslant \mu_n.$$

Weźmy teraz $V = \langle\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}\rangle$, to $V^\perp = \langle\{e_n, e_{n+1}, \dots\}\rangle$ i dla $x \in V^\perp$, $\|x\| = 1$, mamy

$$x = \sum_n^\infty (x|e_i)e_i, \quad \|x\|^2 = \sum_n^\infty |(x|e_i)|^2 = 1 \;\text{ oraz }\; Ax = \sum_n^\infty \mu_i(x|e_i)e_i.$$

Stąd

$$(x|Ax) = \sum_n^\infty \mu_i|(x|e_i)|^2 \leqslant \mu_n \sum_n^\infty |(x|e_i)|^2 = \mu_n.$$

W szczególności, $(e_n|Ae_n) = \mu_n$, czyli dla tego V

$$\sup_{\substack{x\in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Ax) = \mu_n.$$

■

Jeżeli A jest odwrotny do operatora (nieograniczonego) L, rozważanego powyżej, to zasadę minimaks można sformułować tak (wartości własne są jednokrotne):

Twierdzenie 10 (Zasada minimaks Couranta). *Niech (λ_n) będą wartościami własnymi operatora L w $L^2([a,b])$. Załóżmy, że*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Wówczas

$$\lambda_n = \sup_{\substack{V \\ \dim V = n-1}} \inf_{\substack{x\in V^\perp \\ \|x\|=1}} (x|Lx). \tag{15}$$

Wniosek 2. *λ_n jest monotonicznie rosnącą funkcją p i q.*

Dowód: Wystarczy zauważyć, że dla regularnych $x = u$,

$$(u|Lu) = \int_{[a,b]} (p|u'|^2 + q|u|^2).$$

■

2.1. Asymptotyka wartosci własnych. W zagadnieniu Sturma-Liouville'a:

$$(-pu')' + qu = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

dokonajmy zamiany zmiennych

$$\tau(t) = \int_a^t \frac{1}{\sqrt{p(s)}} \mathrm{d}s, \quad x = \sqrt[4]{p}\, u.$$

Dostajemy zagadnienie

$$-\ddot{x} + \alpha(\tau)x = \lambda x, \quad x(0) = 0,\; x(l) = 0,$$

$$\text{gdzie } \; l = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{p(s)}} \mathrm{d}s, \;\; \alpha = \big(\frac{1}{4}p^{-\frac{1}{4}}p'\big)' p^{\frac{1}{4}} + q \tag{16}$$

a kropka oznacza różniczkowanie po τ. Zauważmy, że

$$\int_a^b u^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^l x^2(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

czyli unormowanie u w przestrzeni $L^2([a,b])$ implikuje unormowanie x w przestrzeni $L^2([0,l])$.

Załóżmy, że funkcja α jest ograniczona: $-\sigma \leqslant \alpha(\tau) \leqslant \sigma$. Funcja $\alpha+\sigma$ jest zatem dodatnia i do zagadnienia $-\ddot{x} + (\alpha(\tau)+\sigma)x = (\lambda+\sigma)x$ możemy stosować zasadę minimaksu. Z monotoniczności wartości własnych (Wniosek 2) mamy

$$\lambda_n^{(-\sigma)} \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_n^{(\sigma)}, \tag{17}$$

gdzie $\lambda_n^{(\sigma)}, \lambda_n^{(-\sigma)}$ są wartościami własnymi dla $-\ddot{x}+\sigma x,\ -\ddot{x}-\sigma x$. Wiadomo, że

$$\lambda_n^{(\sigma)} = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + \sigma, \quad \lambda_n^{(-\sigma)} = \frac{n^2\pi^2}{l^2} - \sigma,$$

więc (17) oznacza

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \sigma \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n^2\pi^2}{l^2} + \sigma, \tag{18}$$

co się zapisuje tak:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{p(s)}})^2} + O(1) \tag{19}$$

Zapis $f(n) = O(h(n))$ oznacza, że $|f(n)| \leqslant ch(n)$ dla pewnej stałej c.

2.2. Asymptotyka wektorow własnych. Zapiszmy równanie (16) tak: $\ddot{x}+\lambda x = \alpha(\tau)x$. Z ogólnych własności równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach mamy

$$x_n(\tau) = a_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) + b_n\cos(\sqrt{\lambda_n}\tau) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^\tau \alpha(t)x_n(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}(\tau-t))\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Z warunku unormowania $\|x_n\| = 1$ mamy szacowanie

$$\left|\int_0^\tau \alpha(t)x_n(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}(\tau-t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^l \alpha^2}\sqrt{\int_0^l x_n^2} = \sqrt{\int_0^l \alpha^2}. \tag{21}$$

Stąd i z warunku brzegowego $x_n(0) = 0$ mamy $b_n = 0$ oraz

$$x_n(\tau) = a_n\sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}m_n(\tau), \quad |m_n(\tau)| \leqslant \sqrt{\int_0^l \alpha^2} < \infty. \tag{22}$$

Jeszcze raz wykorzystujemy warunek unormowania:

$$\begin{aligned} 1 =& a_n^2\int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_n}t)\mathrm{d}t + \frac{2a_n}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l \sin(\sqrt{\lambda_n}t)m_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^l m_n^2(t)\mathrm{d}t \\ =& a_n^2\frac{l}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_n}l)}{4\sqrt{\lambda_n}}a_n^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}p_na_n + \frac{1}{\lambda_n}q_n, \end{aligned} \tag{23}$$

gdzie (p_n), (q_n) są ciągami ograniczonymi. Ponieważ $\lambda_n \to \infty$ przy $n\to\infty$, to z (23) wynika ograniczoność ciągu (a_n). Wobec tego

$$1 = a_n^2\frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \quad \text{i} \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

a stąd

$$x_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}). \tag{24}$$

Pozostało do oszacowania $\sin(\sqrt{\lambda_n}\tau)$. Mamy z (19)

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + O(1) = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

i w konsekwencji,

$$\sin(\sqrt{\lambda_n}\tau) = \sin(\frac{n\pi}{l}\tau) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Operatory śladowe.

Podstawowym przykładem zwartego operatora był operator całkowy. Widzieliśmy, że dla takiego operatora, oprócz normy operatorowej, możemy rozpatrywać mocniejszą od niej normę L^2 jądra operatora. Norma ta jest równa (Twierdzenie 8) sumie kwadratów wartości własnych. Zajmiemy się teraz dokładniej tymi relacjami.

3.1. Rozkład biegunowy. Niech $A \in B(\mathsf{H})$, wówczas $A^\dagger A$ jest dodatnim operatorem samosprzężonym, więc z Twierdzenia Spektralnego 32 istnieje dodatni pierwiastek kwadratowy z $A^\dagger A$. Oznaczmy go $|A|$ i nazwijmy *modułem* A. Oczywiście $|\lambda A| = |\lambda||A|$, ale **nie jest prawdą**, że w ogólności $|A^\dagger| = |A|$, $|AB| = |A||B|$ i $|A+B| \leqslant |A| + |B|$.

Przypomnijmy, że operator $U \in B(\mathsf{H})$ jest *izometrią*, jeżeli $\|U(x)\| = \|x\|$ dla każdego $x \in \mathsf{H}$. U nazywamy *częściową izometrią*, jeżeli $\|U(x)\| = \|x\|$ dla każdego $x \in (\ker U)^\perp$. Operator U definiuje injekcję $(\ker U)^\perp \to \overline{\operatorname{im} U}$. Z tego, że U jest częściową izometria wynika, że odwzorowanie odwrotne $\operatorname{im} U \to (\ker U)^\perp$ jest ciągłe, zatem z twierdzenia o wykresie domkniętym $\operatorname{im} U$ jest podprzestrzenią domkniętą. Mamy więc

$$\mathsf{H} = \ker U \oplus (\ker U)^\perp = (\operatorname{im} U)^\perp \oplus \operatorname{im} U.$$

Operator U obcięty do $(\ker U)^\perp$ jest unitarnym odwzorowaniem z $(\ker U)^\perp$ do $\operatorname{im} U$.

Z formuły polaryzacyjnej wynika, że dla $x, y \in (\ker U)^\perp$ mamy równość

$$(U^\dagger U x|y) = (Ux|Uy) = (x|y), \quad \text{czyli} \quad U^\dagger U x = x \quad \text{dla} \quad x \in (\ker U)^\perp,$$

zatem $U^\dagger = U^{-1}$ na $\operatorname{im} U$. Dla dowolnego operatora $A \in B(\mathsf{H})$ mamy relacje

$$(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{im} A^\dagger}, \quad (\ker A^\dagger)^\perp = \overline{\operatorname{im} A}, \tag{25}$$

więc $U^\dagger$ jest izometrią na $(\ker U^\dagger)^\perp$.

Wynika stąd, że $U^\dagger$ jest też częściową izometrią. Ponadto, $(U^\dagger U)^2 = U^\dagger U U^\dagger U = U^\dagger U$, bo $U^\dagger = U^{-1}$ na $\operatorname{im} U$, czyli $U^\dagger U$ i, podobnie, $UU^\dagger$ są rzutami ortogonalnymi. Podsumowując,

Stwierdzenie 2. *Jeżeli U jest częściową izometrią, to*

1. *$U^\dagger$ też jest częściową izometrią i $U^\dagger = U^{-1}$ na $\operatorname{im} U$,*
2. *$U^\dagger U$ i $UU^\dagger$ są operatorami rzutu ortogonalnego, odpowiednio na podprzestrzenie $(\ker U)^\perp$ i $\operatorname{im} U$.*

Druga własność w pełni charakteryzuje częsciowe izometrie:

Stwierdzenie 3. *Jeżeli $U^\dagger U$ i $UU^\dagger$ są operatorami rzutowymi, to U jest częściową izometrią.*

Dowód: Mamy z (25) równość $(\ker U^\dagger)^\perp = \overline{\operatorname{im} U}$, więc

$$\begin{aligned} U &: (\ker U)^\perp \to \overline{\operatorname{im} U} \\ U^\dagger &: \overline{\operatorname{im} U} \to (\ker U)^\perp \end{aligned} \tag{26}$$

są injekcjami. Odwzorowanie

$$U^\dagger U : (\ker U)^\perp \to (\ker U)^\perp$$

jest injekcją i rzutem, więc jego obraz jest domknięty, $\operatorname{im} U^\dagger U = (\ker U)^\perp$, i w konsekwencji, $\operatorname{im} U^\dagger = (\ker U)^\perp$ oraz $\operatorname{im} U = (\ker U^\dagger)^\perp$ (obrazy U i $U^\dagger$ są domknięte). $U^\dagger U$ jest więc rzutem na $(\ker U)^\perp$ a $UU^\dagger$ rzutem na $\operatorname{im} U$. Dla $x \in (\ker U)^\perp$ mamy zatem

$$\|x\|^2 = (U^\dagger U x|x) = (Ux|Ux) = \|Ux\|^2.$$

■

Jesteśmy gotowi do sformułowania i 'dowodu' ważnego twierdzenia.

TWIERDZENIE 11 (O ROZKŁADZIE BIEGUNOWYM). *Niech $A \in B(\mathsf{H})$. Istnieje częściowa izometria U taka, że $A = U|A|$, gdzie $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$. U jest jednoznacznie określone warunkiem* $\ker U = \ker A$ *(stąd* $\operatorname{im} U = \overline{\operatorname{im} A}$ *i* $|A| = U^\dagger A$*).*

DOWÓD: Określmy relację $U\colon \operatorname{im}|A| \to \operatorname{im} A$ warunkiem

$$U(|A|x) = Ax. \tag{27}$$

Sprawdzamy, że wzór ten określa odwzorowanie, tzn. że $x \in \ker|A| \Rightarrow x \in \ker A$:

$$\||A|x\|^2 = (x \mid |A|^2 x) = (x|A^\dagger AX) = \|Ax\|^2,$$

więc $\ker|A| = \ker A$. Wzór (27) określa odwzorowanie izometryczne z $\operatorname{im}|A|$ do $\operatorname{im} A$:

$$\big(U|A|x \mid U|A|x\big) = (Ax \mid Ax) = \|\, Ax\,\|^2 = \|\, |A|x\,\|^2 .$$

Przedłużamy je do izometrii $U\colon \overline{\operatorname{im}|A|} \to \overline{\operatorname{im} A}$. Kładąc $Ux = 0$ dla $x \in \ker A = \ker|A| = (\operatorname{im}|A|)^\perp$ dostajemy częściową izometrię. Jednoznaczność i równość $\operatorname{im} U = \overline{\operatorname{im} A}$ są oczywiste. $U^\dagger = U^{-1}$ na $\operatorname{im} U = \overline{\operatorname{im} A}$, więc rozkładu $A = U|A|$ wynika równość $|A| = U^\dagger A$. ■

$U^\dagger = U^{-1}$ na $\operatorname{im} U = \overline{\operatorname{im} A}$, więc rozkładu $A = U|A|$ wynika równość $|A| = U^\dagger A$.

3.2. Forma kanoniczna operatora zwartego.

TWIERDZENIE 12. *Niech $A \in B(\mathsf{H})$ będzie zwartym operatorem. Istnieją układy ortonormalne wektorów (e_n) i (f_n), oraz ciąg liczb dodatnich (λ_n) takie, że*

$$Ax = \sum_n \lambda_n (e_n|x) f_n.$$

DOWÓD: A jest zwarty, więc również $A^\dagger$ oraz $A^\dagger A$ są zwarte. $A^\dagger A$ jest ponadto samosprzężony, więc z Twierdzenia 7 istnieje układ ortonormalny (e_n) wektorów własnych $A^\dagger A$, odpowiadających niezerowym wartościom własnym. Tworzą one bazę ortonormalną w $(\ker A)^\perp$. Niech μ_n będą odpowiednimi wartościami własnymi. Oczywiście, μ_n są dodatnie, więc niech $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$. Kładziemy $f_n = \dfrac{1}{\lambda_n} A e_n$ i sprawdzamy, że (f_n) jest układem ortonormalnym:

$$\begin{aligned}(f_n|f_m) &= \left(\frac{1}{\lambda_n} A e_n \mid \frac{1}{\lambda_m} A e_m\right) = \left(\frac{1}{\lambda_n} A^\dagger A e_n \mid \frac{1}{\lambda_m} e_m\right) \\ &= \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_m}(e_n|e_m) = \delta_{nm}. \end{aligned} \tag{28}$$

Ponadto, jeżeli $x = x_1 + x_2$, gdzie $x_2 \in \ker A$, $x_1 \in (\ker A)^\perp$, to

$$Ax = Ax_1 = A(\sum (e_n|x) e_n) = \sum \lambda_n (e_n|x) f_n.$$

■

Liczby λ_n nazywane są *liczbami charakterystycznymi (singularnymi)* operatora zwartego A. Są to wartości własne $|A|$.

3.3. Przestrzeń operatorów śladowych. W dalszym ciągu zakładać będziemy, że H jest **ośrodkową** przestrzenią Hilberta.

TWIERDZENIE 13. *Niech A będzie samosprzężonym, dodatnim operatorem w H i niech (e_n) będzie bazą ortonormalną w H. Wielkość $\sum_n (e_n|Ae_n)$ nie zależy od wyboru bazy.*

Dowód: Niech $(e_n),(f_n)$ będą dwiema bazami ortonormalnymi w H. Mamy (szeregi są o wyrazach dodatnich)

$$\begin{aligned}\sum_n (e_n|Ae_n) &= \sum_n (A^{\frac{1}{2}}e_n|A^{\frac{1}{2}}e_n) = \sum_n \|A^{\frac{1}{2}}e_n\|^2 \\ &= \sum_n \left(\sum_m |(f_m|A^{\frac{1}{2}}e_n)|^2\right) = \sum_m \left(\sum_n |(A^{\frac{1}{2}}f_m|e_n)|^2\right) \\ &= \sum_m \|A^{\frac{1}{2}}f_m\| = \sum_n (f_n|Af_n) \end{aligned} \tag{29}$$

■

Liczbę $\sum_n (e_n|Ae_n)$ (być może nieskończoną) nazywamy *śladem* operatora A i oznaczamy $\operatorname{tr} A$. Zbiór $B_+(\mathsf{H})$ operatorów dodatnich jest stożkiem wypukłym w $B(\mathsf{H})$ (suma operatorów dodatnich jest operatorem dodatnim, iloczyn operatora dodatniego przez liczbę dodatnią jest operatorem dodatnim).

Stwierdzenie 4. *Własności śladu* $\operatorname{tr}\colon B_+(\mathsf{H}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$*:*

(a) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
(b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$ *dla* $\lambda > 0$,
(c) $0 \leqslant A \leqslant B$ *to* $\operatorname{tr} A \leqslant \operatorname{tr} B$,
(d) $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr} A$ *dla unitarnego* U.
(e) $\operatorname{tr}(A^\dagger A) = \operatorname{tr}(AA^\dagger)$.

Dowód: Punkty (a), (b) i (c) są oczywiste. Dowodzimy (d). Jeżeli (e_n) jest bazą ortonormalną, to również (Ue_n) jest bazą ortonormalną. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A &= \sum_n (e_n|Ae_n) = \sum_n (U^{-1}Ue_n|AU^{-1}Ue_n) \\ &= \sum_n (Ue_n|UAU^{-1}Ue_n) = \operatorname{tr}(UAU^{-1}). \end{aligned} \tag{30}$$

Wybierzmy teraz dwie bazy ortonormalne $(e_j),(f_j)$. Mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((A^\dagger A)) &= \sum_i (e_i \mid A^\dagger Ae_i) = \sum_i (Ae_i \mid Ae_i) \\ &= \sum_i \sum_j ((f_j \mid Ae_i)f_j \mid Ae_i) = \sum_i \sum_j \overline{(f_j \mid Ae_i)}(f_j \mid Ae_i) \\ &= \sum_j \sum_i \overline{(f_j \mid Ae_i)}(f_j \mid Ae_i) = \sum_j \sum_i \overline{(e_i \mid A^\dagger f_j)}(e_i \mid A^\dagger f_j) \\ &= \sum_j \sum_i ((e_i \mid A^\dagger f_j)e_i \mid A^\dagger f_j) = \sum_j (A^\dagger f_j \mid A^\dagger f_j) = \operatorname{tr}(AA^\dagger)\end{aligned}$$

Zamiana kolejności sumowania dozwolona, bo sumowane są wyrazy dodatnie. Udowodniliśmy zatem punkt e). ■

Definicja 2. Operator $A \in B(\mathsf{H})$ nazywamy *śladowym*, jeżeli $\operatorname{tr}|A| < \infty$. Zbiór operatorów śladowych oznaczamy $B^1(\mathsf{H})$.

Zajmiemy się własnościami zbioru $B^1(\mathsf{H})$. Przydatny nam będzie następujący prosty lemat.

Lemat 2. *Każdy operator* $A \in B(\mathsf{H})$ *jest kombinacją liniową czterech operatorów unitarnych.*

Dowód: Wiemy, że każdy operator jest kombinacją liniową dwóch operatorów samosprzężonych:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) - \frac{\iota}{2}(i(A - A^\dagger)),$$

więc wystarczy pokazać, że każdy operator samosprzężony jest kombinacją dwóch operatorów unitarnych. Przyjmijmy, że A jest s.s. i $\|A\| \leqslant 1$, czyli że $\sqrt{\mathrm{id} - A^2}$ jest dobrze określony. Mamy

$$A = \frac{1}{2}(A + \iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2}) + \frac{1}{2}(A - \iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2})$$

i sprawdzamy, że $(A \pm \iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2})$ są operatorami unitarnymi:

$$(A+\iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2})(A+\iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2})^\dagger = (A+\iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2})(A-\iota\sqrt{\mathrm{id} - A^2}) = A^2+(\sqrt{\mathrm{id} - A^2})^2 = \mathrm{id}$$

■

Twierdzenie 14.

(a) $B^1(\mathsf{H})$ *jest przestrzenią wektorową,*
(b) *jeżeli* $A \in B^1(\mathsf{H})$, *to dla* $B \in B(\mathsf{H})$ *mamy* $AB,\ BA \in B^1(\mathsf{H})$,
(c) *jeżeli* $A \in B^1(\mathsf{H})$, *to* $A^\dagger \in B^1(\mathsf{H})$.

Inaczej mówiąc, $B^1(\mathsf{H})$ *jest* $\dagger$*-ideałem w* $B(\mathsf{H})$.

Dowód: (a) Z równości $|\lambda A| = |\lambda||A|$ i z punktu (b) Stwierdzenia 4 mamy jednorodność $B^1(\mathsf{H})$. Niech teraz $A, B \in B^1(\mathsf{H})$. Z rozkładów biegunowych

$$\begin{aligned} A + B &= U|A + B|, \\ A &= V|A|, \\ B &= W|B| \end{aligned} \tag{31}$$

dostajemy

$$\sum_n (e_n \mid |A + B|e_n) = \sum_n (e_n \mid U^\dagger(A + B)e_n) \leqslant \sum_n |(e_n \mid U^\dagger Ae_n)| + \sum_n |(e_n \mid U^\dagger Be_n)|.$$

Ale z nierówności Schwarza w H i dla szeregów mamy

$$\begin{aligned} \sum_n |(e_n \mid U^\dagger Ae_n)| &= \sum_n |(e_n \mid U^\dagger V|A|e_n)| = \sum_n |(|A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger Ue_n \mid |A|^{\frac{1}{2}}e_n)| \\ &\leqslant \sum_n \left\||A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger Ue_n\right\| \left\||A|^{\frac{1}{2}}e_n\right\| \\ &\leqslant \left(\sum_n \left\||A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger Ue_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \left\||A|^{\frac{1}{2}}e_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{32}$$

więc wystarczy teraz pokazać, że

$$\sum_n \left\||A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger Ue_n\right\|^2 \leqslant \sum_n \left\||A|^{\frac{1}{2}}e_n\right\|^2, \tag{33}$$

by dostać nierówność

$$\sum_n |(e_n \mid U^\dagger Ae_n)| \leqslant \sum_n \left\||A|^{\frac{1}{2}}e_n\right\|^2 = \sum_n (|A|^{\frac{1}{2}}e_n \mid |A|^{\frac{1}{2}}e_n) = \mathrm{tr}(|A|) \tag{34}$$

Aby pokazać (33), wybierzmy bazę (e_n) tak, by jej elementy należały do $\ker U$ lub do $(\ker U)^\perp$. Z punktu (d) Stwierdzenia 4 mamy

$$\sum_n \left\| |A|^{\frac{1}{2}} V^\dagger U e_n \right\|^2 = \sum_n \left(V^\dagger U e_n \mid |A| V^\dagger U e_n\right) = \sum_n \left(U e_n \mid V|A|V^\dagger U e_n\right) \leqslant \operatorname{tr}(V|A|V^\dagger).$$

Podobnie,

$$\operatorname{tr}(V|A|V^\dagger) \leqslant \operatorname{tr}(|A|) = \sum_n (e_n||A|e_n) = \sum_n \||A|^{\frac{1}{2}} e_n\|^2.$$

(b) Z Lematu wynika, że wystarczy rozpatrzeć unitarne B. Dla unitarnego $B = U$ mamy $|UA|^2 = A^\dagger U^\dagger U A = |A|^2$ i

$$|AU|^2 = U^\dagger A^\dagger A U = U|A|U^\dagger U|A|U^\dagger = (U|A|U^{-1})^2$$

i stąd $\operatorname{tr}|AU| = \operatorname{tr}(U|A|U^{-1}) = \operatorname{tr}|A| = \operatorname{tr}|UA|$.

(c) Niech $A = U|A|$ i $A^\dagger = V|A^\dagger|$ będą rozkładami biegunowymi, wówczas $|A^\dagger|^2 = U|A|V|A^\dagger|$ i stąd $|A^\dagger| = U|A|V$, bo $|A^\dagger|$ jest wyznaczona jednoznacznie przez swoje wartości na $(\ker|A^\dagger|)^\perp = \overline{\operatorname{im}|A^\dagger|}$. Jeżeli $A \in B^1(\mathsf{H})$ to również $|A| \in B^1(\mathsf{H})$ i z punktu (b) wynika $U|A|V \in B^1(\mathsf{H})$. W konsekwencji, $|A^\dagger| \in B^1(\mathsf{H})$ i $A^\dagger = V|A^\dagger| \in B^1(\mathsf{H})$. ■

Dowodząc punkt (a) powyższego twierdzenia pokazaliśmy, że dla dodatnich A, B mamy nierówność trójkąta $\operatorname{tr}(A+B) \leqslant \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. Zatem funkcja

$$\| \|_1 \colon B^1(\mathsf{H}) \to \mathbb{R} \colon A \mapsto \|A\|_1 = \operatorname{tr}(|A|)$$

jest normą na $B^1(\mathsf{H})$. Mamy też równość

$$\|Ax\|^2 = (Ax \mid Ax) = \| \, |A|x \, \|^2$$

i stąd równość $\|A\| = \| \, |A| \, \|$, a ponieważ $|A|$ jest s.s, więc

$$\|A\| = \| \, |A| \, \| = \sup_{\|x\|=1} (x \mid |A|x) = \sup_{\|x\|=1} \left\| \, |A|^{\frac{1}{2}} x \right\|^2.$$

Mamy też $x = \sum (e_n|x) e_n$ i stąd nierówność

$$\left\| \, |A|^{\frac{1}{2}} x \right\| \leqslant \sum_n |(e_n|x)| \left\| \, |A|^{\frac{1}{2}} e_n \right\| \leqslant \big(\sum_n |(e_n|x)|^2\big)^{\frac{1}{2}} \big(\sum_n \||A|^{\frac{1}{2}} e_n\|^2\big)^{\frac{1}{2}} = (\operatorname{tr}|A|)^{\frac{1}{2}}$$

i ostatecznie

$$\|A\| = \| \, |A| \, \| \leqslant \operatorname{tr}(|A|), \tag{35}$$

zatem norma $\| \|_1$ jest mocniejszą od normy operatorowej w $B(\mathsf{H})$.

Twierdzenie 15. *$B^1(\mathsf{H})$ z normą $\| \|_1$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód: Mamy pokazać zupełność przestrzeni $B^1(\mathsf{H})$ w normie $\| \|_1$. Niech (A_n) będzie ciągiem Cauchy'ego względem normy $\| \|_1$. Jest to też ciąg Cauchy'ego w normie $\| \|$, więc istnieje jego granica A (przestrzeń $B(\mathsf{H})$ z normą $\| \|$ jest zupełna). Niech P będzie rzutem na podprzestrzeń wymiaru skończonego. Oczywistym jest, że dla $B \in B(\mathsf{H})$

$$\operatorname{tr}(|B|) = \sup_P \operatorname{tr}(P|B|P) \tag{36}$$

i że

$$\| \, |A - A_n| \, \| = \lim_{m\to\infty} \| \, |A_m - A_n| \, \|, \quad \text{a stąd} \quad \|P|A - A_n|P\| = \lim_{m\to\infty} \|P|A_m - A_n|P\|.$$

Ponieważ w przestrzeni wymiaru skończonego wszystkie normy są równoważne, dostajemy, uwzględniając (36),

$$\operatorname{tr}(P|A - A_n|P) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{tr}(P|A_m - A_n|P) \leqslant \lim_{m\to\infty} \operatorname{tr}(|A_m - A_n|). \tag{37}$$

(A_n) jest ciągiem Cauchy'ego względem $\| \|_1$, więc granica $\lim_{m\to\infty} \operatorname{tr}(|A_m - A_n|)$ istnieje, a ponieważ P było dowolnym rzutem, dostajemy, że $A - A_n \in B^1(\mathsf{H})$ i z (37)

$$\|A - A_n\|_1 \leqslant \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

■

TWIERDZENIE 16. *Każdy operator śladowy jest zwarty. Operator zwarty A jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n < \infty$, gdzie λ_n są liczbami singularnymi operatora A.*

DOWÓD: Niech (e_k) będzie bazą ortonormalną w H, a V_n podprzestrzenią rozpiętą na pierwszych n-wektorach bazy. Zdefiniujmy operator A_n wzorem

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x) A e_k. \tag{38}$$

Jest to operator skończenie-wymiarowy. Pokażemy, że A jest granicą (A_n) w normie operatorowej. Mamy $x = \sum_k (e_k|x)e_k$ i stąd $Ax = \sum_k (e_k|x)Ae_k$, więc z (38) dostajemy

$$(A - A_n)x = \sum_{k=n+1}^{\infty} (e_k|x)Ae_k \quad \text{i} \quad \|A - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A - A_n)x\| = \sup_{x \in V_n^\perp, \|x\|=1} \|Ax\|.$$

A jest operatorem śladowym, więc $|A|^2$ też i $\operatorname{tr}|A|^2 = \sum_k \|Ae_k\|^2 < \infty$. Niech $x \in V_n^\perp$ i $\|x\| = 1$. Mamy $x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k$, gdzie $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = 1$, i dostajemy

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \|Ae_k\|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 = \operatorname{tr}|A|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2.$$

Zatem

$$\|A - A_n\|^2 = \sup_{x \in V_n^\perp, \|x\|=1} \|Ax\|^2 \leqslant \operatorname{tr}|A|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

A jest zwarty, bo jest granicą operatorów skończenie-wymiarowych.

Niech teraz A będzie operatorem zwartym i $Ax = \sum_k \lambda_n (e_k|x) f_k$ jego formą kanoniczną (Twierdzenie 12). e_k jest tu wektorem własnym $|A|$, a λ_k jego wartością własną. Zatem

$$\operatorname{tr}|A| = \sum_k (e_k \mid |A| e_k) = \sum_k \lambda_k.$$

■

Podsumowując, operatory śladowe tworzą, podobnie jak operatory zwarte, ideał w algebrze operatorów. Operatory zwarte tworzą ideał domknięty w $B(\mathsf{H})$, podczas gdy przestrzeń operatorów śladowych nie jest domknięta. Jest natomiast zupełna ze względu na normę śladową.

3.4. Operatory Hilberta-Schmidta. Operator $A \in B(\mathsf{H})$ nazywany jest *operatorem Hilberta-Schmidta* jeżeli $A^\dagger A$ jest operatorem śladowym, tzn. $\operatorname{tr}(A^\dagger A) < \infty$. Zbiór operatorów Hilberta-Schmidta oznaczać będziemy $B^2(\mathsf{H})$. Podobnie jak w przypadku operatorów śladowych dowodzi się następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 17.

(a) *jeżeli $A, B \in B^2(\mathsf{H})$, to dla każdej bazy ortonormalnej (e_n) szereg*

$$\sum_k (e_k|A^\dagger B e_k) \tag{39}$$

jest zbieżny bezwzględnie i jego suma nie zależy od wyboru bazy,

(b) *$B^2(\mathsf{H})$ jest $\dagger$-ideałem w $B(\mathsf{H})$,*

(c) *mamy nierówności $\|A\| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$ i równość $\|A\|_2 = \|A^\dagger\|_2$, gdzie $\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}(A^\dagger A)$,*

(d) *forma półtoraliniowa*

$$(A|B)_2 = \sum_k (e_k|A^\dagger B e_k),$$

definiuje na $B^2(\mathsf{H})$ strukturę przestrzeni Hilberta,

(e) *każdy operator Hilberta-Schmidta jest zwarty i operator zwarty A jest Hilberta-Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n^2 < \infty$, gdzie λ_n są liczbami singularnymi A,*

(f) *operatory skończenie-wymiarowe tworzą zbiór gęsty w $B^2(\mathsf{H})$,*

(g) *jeżeli $A, B \in B^2(\mathsf{H})$, to $AB \in B^1(\mathsf{H})$.*

Dowód: (a) Z nierówności Schwarza w H i dla szeregów mamy

$$\sum_k |(e_k|A^\dagger B e_k)| = \sum_k |(Ae_k|Be_k)| \leqslant \sum_k \|Ae_k\|\,\|Be_k\|$$
$$\leqslant \big(\sum_k \|Ae_k\|^2\big)^{\frac{1}{2}} \big(\sum_k \|Ae_k\|^2\big)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{tr}(A^\dagger A))^{\frac{1}{2}} (\mathrm{tr}(B^\dagger B))^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Stąd

$$\mathrm{tr}(A+B)^\dagger(A+B) = \mathrm{tr}\, A^\dagger A + \mathrm{tr}\, A^\dagger B + \mathrm{tr}\, B^\dagger A + \mathrm{tr}\, B^\dagger B < \infty,$$

czyli $B^2(\mathsf{H})$ jest przestrzenią wektorową. Szereg (39) definiuje formę półtoraliniową na $B^2(\mathsf{H})$. Stosując formułę polaryzacyjną dostajemy

$$\sum_k (e_k|A^\dagger B e_k) = \sum_{m=0}^{3} \frac{\iota^m}{4} \,\mathrm{tr}((A + \iota^m B)^\dagger (A + \iota^m B)),$$

a prawa strona nie zależy od wyboru bazy.

(b) To, ze $B^2(\mathsf{H})$ jest przestrzenią wektorową wynika z punktu (a). Wystarczy zatem pokazać, że dla unitarnego U i $A \in B^2(\mathsf{H})$ mamy AU, UA, $A^\dagger \in B^2(\mathsf{H})$. Wynika to z własności śladu (Stwierdzenie 4), a z nich równości

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}((UA)^\dagger UA) &= \mathrm{tr}(A^\dagger U^\dagger UA) = \mathrm{tr}(A^\dagger A),\\
\mathrm{tr}((AU)^\dagger AU) &= \mathrm{tr}(U^\dagger A^\dagger AU) = \mathrm{tr}(A^\dagger A),\\
\mathrm{tr}(AA^\dagger) &= \mathrm{tr}(A^\dagger A).
\end{aligned}$$

(c) Wiemy już, że dla $A \in B(\mathsf{H})$ mamy nierówność $\|A\| \leqslant \|A\|_1$. Wykażemy teraz, że $\|A\| \leqslant \|A\|_2$. Wybierzmy bazę (e_i) i niech $\|x\| = 1$. Mamy

$$\|Ax\| = \||A|x\| \leqslant \sum_n |(e_n|x)| \||A|e_n\| \leqslant (\sum_n |(e_n|x)|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_n \||A|e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2.$$

Stąd wynika dowodzona nierówność. Aby wykazać nierówność $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$ wystarczy rozpatrzeć przypadek $\|A\|_1 < \infty$, tzn. $A \in B^1(\mathsf{H})$. $|A|$ jest więc samosprzeżony i zwarty, zatem jako bazę możemy wybrać bazę wektorów własnych $|A|$ z wartościami własnymi λ_n. Dostajemy

$$\|A\|_2^2 = \sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_n \lambda_n^2 \leqslant \left(\sum_n \lambda_n\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_1^2.$$

Równość $\|A\|_2 = \|A^\dagger\|_2$ wynika z puktu (e) Stwierdzenia 4.

(d) Mamy pokazać, że przestrzeń $B^2(\mathsf{H})$ jest zupełna. Dla ustalonej bazy (e_i) w H zdefiniujmy rodzinę operatorów

$$E_{ij} \colon \mathsf{H} \to \mathsf{H} \colon x \mapsto (e_i \mid x) e_j.$$

Oczywistym jest, że $E_{ij} \in B^2(\mathsf{H})$. Ponadto,

$$(E_{ij} \mid E_{kl})_2 = \sum_n (E_{ij} e_n \mid E_{kl} e_n) = \sum_n (\delta_{in} e_j \mid \delta_{kn} e_l) = \delta_{ik}\delta_{jl},$$

więc operatory E_{ij} tworzą układ ortonormalny w $B^2(\mathsf{H})$. Jeżeli $A \in B^2(\mathsf{H})$ i $(A \mid E_{ij})_2 = 0$ dla wszystkich $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, to $(Ae_i \mid e_j) = \sum_n (Ae_n \mid E_{ij} e_n) = 0$ i stąd $Ae_i = 0$. Zatem $A = 0$, czyli układ (E_{ij}) jest bazą w uzupełnieniu $B^2(\mathsf{H})$. Wystarczy teraz pokazać, że jeżeli szereg $\sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$ jest zbieżny zbieżny w normie $\|\cdot\|_2$, to jest też zbieżny w normie operatorowej $\|\cdot\|$. Wynika to z pierwszej nierówności punktu poprzedniego.

(e) Z dowodu poprzedniego punktu wynika, że $A \in B^2(\mathsf{H})$ jest granicą ciągu operatorów skończenie-wymiarowych względem normy $\|\cdot\|_2$. Z (c) mamy, że również w sensie normy operatorowej $\|\cdot\|$.

(f) Oczywiste (patrz punkt (e)).

(g) Niech $AB = U|AB|$ będzie rozkładem biegunowym. Mamy $|AB| = U^\dagger AB$ i, ponieważ U jest częściową izometrią,

$$\sum (e_n||AB|e_n) = \sum (e_n|(U^\dagger AB)e_n) \leqslant \sum \|A^\dagger U e_n\| \|Be_n\|$$
$$\leqslant \left(\sum \|A^\dagger U e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \|Be_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum \|A^\dagger e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \|Be_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A^\dagger\|_2 \|B\|_2.$$

■

Zauważmy jeszcze, że

$$B^2(\mathsf{H}) \ni A \mapsto (a_{ij}), \quad \text{gdzie} \quad A = \sum a_{ij} E_{ij},$$

jest izometrią w przestrzeń $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Istotnie,

$$\|A\|_2^2 = \sum_n (Ae_n|Ae_n) = \sum_n \Big(\sum_{ij} a_{ij}(e_i|e_n)e_j \mid \sum_{ij} a_{ij}(e_i|e_n)e_j\Big) = \sum_{nj} \bar{a}_{nj} a_{nj}.$$

Mamy więc izomorfizm przestrzeni Hilberta $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ i $B^2(\mathsf{H})$.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że operatory Hilberta-Schmidta są naturalnym uogólnieniem operatorów całkowych.

Twierdzenie 18. *Niech (M, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $\mathsf{H} = L^2(M, \mu)$ będzie przestrzenią ośrodkową. Operator $A \in B(\mathsf{H})$ jest Hilberta-Schmidta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ takie, że*

$$(Af)(x) = \int K(x, y) f(y) \mathrm{d}\mu(y).$$

Ponadto,

$$\|A\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2 \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y).$$

Dowód: Jest analogiczny do dowodu w przypadku $\mathsf{H} = L^2([0, 1])$. Niech $K \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ i niech A_K będzie odpowiednim operatorem całkowym. Oszacujmy $A_K f$ w normie $L^2(M, \mu)$:

$$\int \left|Af(x)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int \left(\int |K_A(x, y) f(y)| \mathrm{d}\mu(y)\right)^2 \mathrm{d}\mu(x)$$
$$\leqslant \int \left(\int |K_A|^2(x, y) \mathrm{d}\mu(y) \int |f|^2(y)) \mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int |f|^2(y) \mathrm{d}\mu(y) \int \int |K_A|^2(x, y) \mathrm{d}\mu(y),$$

czyli

$$\|Af\|_{L^2} \leqslant \|K_A(x, y)\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.$$

Oznacza to, że $K_A \in L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ definiuje ciągły operator $A \colon L^2(M, \mu) \to L^2(M, \mu)$ z szacowaniem normy $\|A\| \leqslant \|K_A(x, y)\|_{L^2}$.

Zwartość udowodnimy pokazując, że A_K jest granicą operatorów skończenie-wymiarowych. W $L^2(M, \mu)$ wybieżmy przeliczalną bazę ortonormalną (φ_n). Funkcje $\varphi_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\varphi_m(y)$ tworzą bazę ortonormalną w $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$. Mamy więc

$$K_A = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \varphi_{nm}, \quad A_K f = \sum_{n,m} \alpha_{nm} (\varphi_n \mid f) \varphi_m.$$

Oznaczmy przez P_N rzut ortogonalny na podprzestrzeń rozpiętą przez N pierwszych wektorów bazy. Mamy

$$P_N A P_N f = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm}(\varphi_n \mid f)\varphi_m.$$

Stąd $P_N A P_N \to A$ w normie operatorowej, bo jądra zbiegają w $L^2(M\times M, \mu\otimes\mu)$. Obliczamy ślad

$$\operatorname{tr}(A_K^\dagger A_K) = \sum \|A_K\varphi_n\|^2 = \sum_{n,m} |\alpha_{nm}|^2 = \|K\|_{L^2},$$

więc odwzorowanie $K \to A_K$ jest izometrią przestrzeni $L^2(M \times M, \mu \otimes \mu)$ w $B^2(\mathsf{H})$. Teza wynika z faktu, że każdy operator skończenie-wymiarowy można przedstawić jako całkowy, a operatory skończenie-wymiarowe tworzą zbiór gęsty w $B^2(\mathsf{H})$. ■

3.5. Ślad operatora śladowego.

Twierdzenie 19. *Niech $A \in B^1(\mathsf{H})$ i niech (e_n) będzie bazą ortonormalną w H. Szereg $\sum(e_n|Ae_n)$ jest zbieżny bezwzględnie i jego suma nie zależy od wyboru bazy.*

Dowód: Z rozkładu biegunowego A mamy $A = U|A|^{\frac12}|A|^{\frac12}$ i stąd

$$|(e_k|Ae_k)| = |(|A|^{\frac12}U^\dagger e_k \mid |A|^{\frac12}e_k)| \leqslant \||A|^{\frac12}U^\dagger e_k\| \, \||A|^{\frac12}e_k\|.$$

Zatem

$$\sum_k |(e_k|Ae_k)| \leqslant \sum_k \||A|^{\frac12}U^\dagger|e_k\| \, \||A|^{\frac12}e_k\| \leqslant \left(\sum_k \||A|^{\frac12}U^\dagger|e_k\|^2\right)^{\frac12} \left(\sum_k \||A|^{\frac12}e_k\|^2\right)^{\frac12},$$

a ponieważ $|A|^{\frac12}U^\dagger$ i $|A|^{\frac12}$ należą do $B^2(\mathsf{H})$, to szereg jest zbieżny. Niezależność od wyboru bazy dowodzi się tak samo jak w przypadku dodatniego A. ■

Sumę szeregu $\sum(e_n|Ae_n)$ nazywamy *śladem* operatora A i oznaczamy $\operatorname{tr} A$.

Uwaga! Zbieżność bezwzględna szeregu $\sum(e_n|Ae_n)$ dla pewnej bazy nie wystarcza, by A był śladowy. Musimy mieć zagwarantowaną zbieżność dla <u>wszystkich</u> baz.

Twierdzenie 20. *Własności śladu:*

(a) tr *jest funkcjonałem liniowym,,*
(b) $\operatorname{tr} A^\dagger = \overline{\operatorname{tr} A}$,
(c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ *dla* $A \in B^1(\mathsf{H})$ *i* $B \in B(\mathsf{H})$.

Dowód: Dwa pierwsze punkty są oczywiste. Dowodząc punkt (c) wystarczy się ograniczyć do unitarnych B, bo każdy operator jest kombinacją liniową czterech unitarnych. Dla unitarnego B mamy

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum(e_n|ABe_n) = \sum(B^\dagger Be_n|ABe_n) = \sum(Be_n|BABe_n) = \operatorname{tr}(BA).$$

■

Twierdzenie 21. *Dla $A \in B^1(\mathsf{H})$, $B \in B(\mathsf{H})$ zachodzi nierówność*

$$\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1\|B\|, \quad \|BA\|_1 \leqslant \|A\|_1\|B\|. \tag{40}$$

Dowód:

Niech $A \in B^1(\mathsf{H})$, $B \in B(\mathsf{H})$ i niech $A = U|A|$, $BA = V|BA|$ będą rozkładami biegunowymi. Z Twierdzenia 11 o rozkładzie biegunowym i Twierdzenia 20 punkt c wynika, że

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(|BA|) &= \operatorname{tr}(V^\dagger BA) = \operatorname{tr}(V^\dagger BU|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{tr}(|A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger BU|A|^{\frac{1}{2}}) \\
&= \sum_k (e_k||A|^{\frac{1}{2}}V^\dagger BU|A|^{\frac{1}{2}}e_k) = \sum_k (|A|^{\frac{1}{2}}e_k|VBU^\dagger|A|^{\frac{1}{2}}e_k) \\
&\leqslant \sum_k \||A|^{\frac{1}{2}}e_k\| \, \|VBU^\dagger|A|^{\frac{1}{2}}e_k\| \leqslant \|V^\dagger BU\| \sum_k \||A|^{\frac{1}{2}}e_k\|^2 = \|V^\dagger BU\| \operatorname{tr}(|A|).
\end{aligned}$$

$V^\dagger$, U są częściowymi izometriami, więc $\|V^\dagger BU\| \leqslant \|B\|$. Podobnie, pierwszą nierówność dostajemy, korzystając z punktu (d) Stwierdzenia 4, Twierdzenia 20 i rozkładów biegunowych $A = U|A|$, $AB = V|AB|$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(|AB|) &= \operatorname{tr}(V^\dagger U|A|B) = \operatorname{tr}(V^\dagger U|A|BV^\dagger UU^\dagger V) = \operatorname{tr}(|A|BV^\dagger U) = \operatorname{tr}(|A|^{\frac{1}{2}}BV^\dagger U|A|^{\frac{1}{2}}) \\
&= \sum_k (e_k||A|^{\frac{1}{2}}BV^\dagger U|A|^{\frac{1}{2}}e_k) \leqslant \|B\| \operatorname{tr}(|A|)
\end{aligned}$$

■

4. Rachunek funkcyjny w algebrach.

4.1. Ogólnie o algebrach. *Algebrą* nazywamy przestrzeń wektorową $\mathfrak{A}$ wyposażoną w działanie mnożenia rozdzielnego względem dodawania:

$$(A+B)C = AC + BC, \qquad C(A+B) = CA + CB.$$

Jeżeli ponadto mnożenie jest działaniem łącznym, to mówimy, że algebra jest *łączna.* Warto tu zwrócić uwagę na algebry, dla których spełniony jest warunek (tożsamość Jacobiego):

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C + B \circ (A \circ C).$$

Algebry takie nazywane są *algebrami Liego* jeżeli jest też spełniony warunek $A \circ B = -B \circ A$. Z każdej algebry łącznej $\mathfrak{A}$ możemy dostać algebrę Liego z działaniem

$$[A, B] = AB - BA.$$

W dalszym ciągu będziemy się zajmować wyłącznie algebrami łącznymi nad ciałem liczb zespolonych.

Jednością w algebrze $\mathfrak{A}$ nazywamy element $1_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ taki, że dla każdego $A \in \mathfrak{A}$ zachodzi

$$A1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{A}}A = A.$$

Jeżeli jedność istnieje, to tylko jedna. Istotnie, jeżeli $1_{\mathfrak{A}}$ i $1'_{\mathfrak{A}}$ są jednościami, to

$$1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{A}}1'_{\mathfrak{A}} = 1'_{\mathfrak{A}}.$$

Przykłady 1.

(1) Przestrzeń $C(I)$ funkcji ciągłych na odcinku $]0, 1]$ ze zwykłym mnożeniem funkcji jest algebrą przemienną z jednością.
(2) Podprzestrzeń $C_0(I) \subset C(I)$ funkcji mających granicę zero w zerze jest algebrą bez jedności.
(3) Niech V będzie przestrzenią wektorową. Przestrzeń $L(V)$ odwzorowań liniowych V ze składaniem odwzorowań jako mnożeniem jest algebrą łączną z jednoscia. Jednością jest odwzorowanie tożsamościowe.
(4) Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest algebrą bez jedności, to możemy ją rozszerzyć do algebry z jednością $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ kładąc

$$(A, \lambda)(B, \mu) = (AB + \lambda B + \mu A, \lambda\mu).$$

Jedynką jest element $(0, 1)$

Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą z jednością. $A \in \mathfrak{A}$. *Lewym odwrotnym* do A nazywamy $B \in \mathfrak{A}$ taki, że $BA = 1_{\mathfrak{A}}$. Podobnie definiujemy prawy odwrotny.

Przykłady 2.

(1) W algebrze $C(I)$ funkcji ciągłych na odcinku $]0, 1]$ elementy z $C_0(I)$ nie mają ani lewego ani prawego odwrotnego.
(2) Niech ℓ będzie przestrzenią wektorową ciągów liczbowych i niech $\mathfrak{A} = L(\ell)$. Rozpatrzmy odwzorowanie $L, R, L' \in L(\ell)$ zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} L((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (a_2, a_3, a_4, \dots) \\ R((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (0, a_1, a_2, a_3, \dots) \\ L'((a_1, a_2, a_3, \dots)) &= (a_1 + a_2, a_3, a_4, \dots) \end{aligned} \tag{41}$$

Widać, że $LR = Id$, $RL \neq Id$ oraz $L'R = Id$. Wynika stąd, że istnienie lewego (prawego) odwrotnego nie gwarantuje istnienia prawego (lewego) odwrotnego i że lewy (prawy) odwrotny nie są wyznaczone jednoznacznie.

Jeżeli jednak istnieją lewy i prawy odwrotny do A, to muszą być równe. Istotnie, jeżeli $BA = AC = 1_{\mathfrak{A}}$, to

$$B = B1_{\mathfrak{A}} = B(AC) = (BA)C = 1_{\mathfrak{A}}C = C.$$

Wynika stąd też, ze jeżeli istnieją lewy i prawy odwrotny do A, to są one wyznaczone jednoznacznie. Element algebry, dla którego istnieją lewy i prawy odrotny, nazywamy *odwracalnym* i lewy (prawy) odwrotny oznaczamy A^{-1}. Jeżeli A, B są elementami odwracalnymi, to

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}. \tag{42}$$

I jeszcze jedno ważne pojęcie: podalgebrę $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ nazywamy *lewostronnym (prawostronnym) ideałem*, jeżeli dla dowolnych $A \in \mathfrak{A}$ i $B \in \mathfrak{B}$ mamy $BA \in \mathfrak{B}$ ($AB \in \mathfrak{B}$). Ideał dwustronny nazywać będziemy po prostu ideałem. Ideał $\mathfrak{B}$ nazywamy *właściwym*, jeżeli nie jest całą algebrą $\mathfrak{A}$.

Stwierdzenie 5. *Jeżeli $A \in \mathfrak{A}$ jest elementem odwracalnym, to* **nie** *należy do żadnego lewostronnego (prawostronnego) ideału właściwego.*

Dowód: Jeżeli A należy do lewostronnego ideału właściwego $\mathfrak{B}$, to $1_{\mathfrak{A}} = AA^{-1} \in \mathfrak{B}$. Stąd dla dowolnego $B \in \mathfrak{A}$ mamy $A = 1_{\mathfrak{A}}A \in \mathfrak{B}$, czyli $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Sprzeczność, bo $\mathfrak{B}$ jest ideałem właściwym. ■

4.2. Spektrum elementu algebry. Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą z jednością i niech $A \in \mathfrak{A}$. *Zbiorem rezolwentowym* elementu A nazywamy zbiór

$$\mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : z1_{\mathfrak{A}} - A \ \text{ jest odwracalny w } \mathfrak{A}\}. \tag{43}$$

Widmem (spektrum) $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A)$ elementu A nazywamy dopełnienie zbioru $\mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$ w $\mathbb{C}$

$$\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A).$$

Przykład 3. Niech R, L będą jak w przykładzie 2. Łatwo zauważyć, że operator

$$z1_{\mathfrak{A}} - R: (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (za_1, za_2 - a_1, za_3 - a_2, \cdots)$$

jest odwracalny dla $z \neq 0$ i nie jest odwracalny (nie jest surjekcją) dla $z = 0$. Stąd $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(R) = \{0\}$. Podobnie, $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(LR) = \mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(Id) = \{1\}$, zaś

$$z1_{\mathfrak{A}} - RL: (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (za_1, za_2 - a_2, za_3 - a_3, \cdots)$$

nie jest odwracalny tylko dla $z = 0, 1$ i stąd $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(RL) = \{0, 1\}$.

Twierdzenie 22.

(1) *Dla każdej pary $A, B \in \mathfrak{A}$ mamy równość* $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(AB) \cup \{0\} = \mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(BA) \cup \{0\}$.
(2) *Jeżeli $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ i $A \in \mathfrak{B}$, to* $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A) \subset \mathrm{sp}_{\mathfrak{B}}(A)$.
(3) *Jeżeli $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ jest homomorfizmem algebr z jednościa, to* $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A) \supset \mathrm{sp}_{\varphi(\mathfrak{A})}(\varphi(A))$.

Dowód:

(1) Niech $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(AB)$ i niech $z \neq 0$. Oznacza to, że istnieje element odwrotny do $z1_{\mathfrak{A}} - AB$. Oznaczmy go przez C. Sprawdzimy, że $z^{-1}(1_{\mathfrak{A}} + BCA)$ jest elementem odwrotnym do $z1_{\mathfrak{A}} - BA$:

$$\begin{aligned} z^{-1}(1_{\mathfrak{A}} + BCA)(z1_{\mathfrak{A}} - BA) &= 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}(BA + BCABA) \\ &= 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}B(1_{\mathfrak{A}} + CAB)A = 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}B(C(z1_{\mathfrak{A}} - AB) + CAB)A \\ &= 1_{\mathfrak{A}} + BCA - z^{-1}BC(z1_{\mathfrak{A}} - AB + AB)A = 1_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

i podobnie z drugiej strony. Zatem $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(BA)$.
(2) Oczywiste.
(3) Ponieważ φ jest homomorfizmem algebr z jednością, to $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{B}}$ i w konsekwencji, $AB = 1_{\mathfrak{A}}$ implikuje $\varphi(A)\varphi(B) = 1_{\mathfrak{B}}$. Zatem obraz elementu odwracalnego jest odwracalny i $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$ implikuje $z \in \mathrm{rs}_{\varphi(\mathfrak{A})}(\varphi(A))$, $\mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A) \subset \mathrm{rs}_{\varphi(\mathfrak{A})}(\varphi(A))$. ■

Uwaga: Przykład 3 pokazuje, że dołączenie zera do spektrum w pierwszym punkcie twierdzenia jest istotne.

Element $A \in \mathfrak{A}$ nazywamy:

(1) *idempotentnym*, jeżeli $A^2 = A$,
(2) *nilpotentnym* rzędu k, jeżeli $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$,
(3) *quasi-nilpotentnym*, jeżeli $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A) = \{0\}$.

Stwierdzenie 6.

(1) *Element nilpotentny jest quasi-nilpotentny.*
(2) *Jeżeli P jest elementem idempotentnym, różnym od zera i jedności, to* $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(P) = \{0, 1\}$.

Dowód:

(1) Niech $z \neq 0$. W szeregu $\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} A^j$ tylko skończona liczba wyrazów jest różna od zera, więc suma szeregu ma sens. Pokazujemy, że jest to element odwrotny do $(z1_{\mathfrak{A}} - A)$:

$$(z1_{\mathfrak{A}} - A)\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}A^j = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}A^j(z1_{\mathfrak{A}} - A) = \sum_{j=0}^{\infty}(z^{-j}A^j - z^{-j-1}A^{j+1}) = 1_{\mathfrak{A}}.$$

Zatem $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$. Oczywiście zero należy do spektrum, bo nilpotentny element nie jest odwracalny (gdyby A był odwracalny, to również A^k byłby odwracalny).

(2) Dla $z \neq 0, 1$ sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że $(z-1)^{-1}P + z^{-1}(1_{\mathfrak{A}} - P)$ jest odwrotnym do $(z1_{\mathfrak{A}} - P)$. Wystarczy zauważyć, że $z1_{\mathfrak{A}} - P = (z-1)P + z(1_{\mathfrak{A}} - P)$, że $P(1_{\mathfrak{A}} - P) = 0$ i że $(1_{\mathfrak{A}} - P)$ jest też idempotentny. Mamy zatem $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(P)$. Różny od jedynki element idempotentny A nie jest odwracalny, gdyby bowiem istniał $C \in \mathfrak{A}$ taki, że $CA = 1_{\mathfrak{A}}$, to

$$1_{\mathfrak{A}} = CA = CAA = 1_{\mathfrak{A}}A = A.$$

Stąd P i $1_{\mathfrak{A}} - P$ nie są odwracalne, czyli $1, 0 \in \mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(P)$.

■

Niech A, B będą komutującymi elementami algebry, tzn. $AB = BA$. Oczywistym jest, że wówczas komutują również B i $(z1_{\mathfrak{A}} - A)$. Pokażemy, że dla $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$ komutują także B i elementy postaci $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$. Istotnie, wystarczy równość $(z1_{\mathfrak{A}} - A)B = B(z1_{\mathfrak{A}} - A)$ wymnożyć stronami przez $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$.

Niech $\mathfrak{A}(A)$ będzie algebrą rozpiętą przez A i $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$, gdzie $z \in \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}}(A)$. Jest oczywistym, że jest to algebra przemienna z jednością:

$$1_{\mathfrak{A}} = z(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} - A(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$$

Jest to najmniejsza algebra wśród algebr $\mathfrak{C}$ takich, że $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A) = \mathrm{sp}_{\mathfrak{C}}(A)$.

4.3. Twierdzenie spektralne dla algebr. Niech K będzie podzbiorem $\mathbb{C}$. Oznaczmy przez $\mathrm{Rat}(K)$ zbiór funkcji wymiernych z biegunami poza K. Zbiór ten jest algebrą z jednością. Niech teraz $\mathfrak{A}$ będzie algebrą z jednością, $A \in \mathfrak{A}$ i $f \in \mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A))$. Funkcja f jest ilorazem wielomianów $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, przy czym $q(z) \neq 0$ dla $z \in \mathrm{sp}(A)$. Stąd $q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$, gdzie $z_i \notin \mathrm{sp}(A)$. Zdefiniujmy

$$f(A) = p(A)(A - z_1 1_{\mathfrak{A}})^{-m_1} \cdots (A - z_n 1_{\mathfrak{A}})^{-m_n}. \tag{44}$$

Oczywistym jest, że $f(A) \in \mathfrak{A}(A)$ i że nie zależy od porządku czynników w (44).

TWIERDZENIE 23 (SPEKTRALNE). *Odwzorowanie*

$$\mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A)) \ni f \mapsto f(A) \in \mathfrak{A}(A) \subset \mathfrak{A} \tag{45}$$

jest homomorfizmem algebr z jednością. Ponadto,

(A) *jeżeli* $\pi\colon \mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A)) \to \mathfrak{A}$ *jest homomorfizmem algebr z jednością takim, że funkcję* $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon z \mapsto z$ *przeprowadza w* A*, to* $\pi(f) = f(A)$*,*
(B) $\mathrm{sp}(f(A)) = f(\mathrm{sp}(A))$*,*
(C) *jeżeli* $f \in \mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A))$ *i* $g \in \mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(f(A)))$*, to* $g \circ f(A) = g(f(A))$*.*

DOWÓD: Bezpośrednio z definicji wynika, że $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$. Prostym rachunkiem pokazujemy też, że $(f+g)(A) = f(A)+g(A)$. Mamy więc homomorfizm. Udowodnimy teraz (A). Wystarczy pokazać, że jeżeli $\lambda \in \mathrm{rs}(A)$, to

$$\pi((\lambda - \mathrm{id})^{-1}) = (\lambda - A)^{-1}. \tag{46}$$

Wiemy,że $\pi(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \lambda 1_{\mathfrak{A}} - A$. Ponadto, $(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})^{-1} \in \mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A))$ i $(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})^{-1}(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = 1$. Stąd, ponieważ π jest homomorfizmem,

$$\pi((\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})^{-1})(\lambda - A) = \pi((\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})^{-1})\pi(\lambda - \mathrm{id}_C) = \pi((\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})^{-1})(\lambda - \mathrm{id}_C)) = 1_{\mathfrak{A}},$$

co dowodzi prawdziwość wzoru (46). Wykazaliśmy więc punkt (A).

Aby udowodnić punkt (B)wykażemy najpierw zawieranie

$$\mathrm{sp}(f(A)) \subset f(\mathrm{sp}(A)). \tag{47}$$

Niech $\mu \notin f(\mathrm{sp}(A))$, wówczas funkcja $z \mapsto f(z) - \mu$ jest różna od zera na $\mathrm{sp}(A)$, czyli $g\colon z \mapsto (f(z) - \mu)^{-1}$ należy do $\mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A))$. Stąd jest dobrze określony element algebry $\pi(g)$. Łatwo sprawdzamy, że $\pi(g)(f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{A}}$, czyli $\mu \in \mathrm{rs}(f(A))$. Oznacza to zawieranie (47).

Teraz wykażemy zawieranie

$$\mathrm{sp}(f(A)) \supset f(\mathrm{sp}(A)). \tag{48}$$

Niech bowiem $\mu \notin \mathrm{sp}(f(A))$, czyli istnieje $(f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1}$. Jeżeli μ nie należy do obrazu f, to również $\mu \notin f(\mathrm{sp}(A))$. Niech więc $\mu = f(\lambda)$. Oznacza to, że $f(\lambda) - \mu = 0$ i funkcja wymierna $h\colon z \mapsto (f(z) - \mu)(z - \lambda)^{-1}$ należy do $\mathrm{Rat}(\mathrm{sp}(A))$. Istotnie, h nie ma bieguna w $\mathrm{sp}(A)$, bo f nie ma, a w λ funkcja h ma osobliwość usuwalną. Zatem $h(A)$ jest dobrze zdefiniowanym elementem algebry $\mathfrak{A}$. Sprawdzamy, że $h(A)(f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1}$ jest elementem odwrotnym do $(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)$:

$$(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)h(A)(f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1} = h_1(A)(f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1},$$

gdzie $h_1(z) = (\lambda - z)h(z) = f(z) - \mu$ i $h_1(A) = (f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})$. Zatem $\lambda \notin \mathrm{sp}(A)$ i $\mu \notin f(\mathrm{sp}(A))$, czyli mamy zawieranie (48).

Pozostaje do udowodnienia punkt (C). Ponieważ $(g_1 \cdot g_2) \circ f = (g_1 \circ f) \cdot (g_2 \circ f)$ oraz dla odwracalnego g mamy $g^{-1} \circ f = (g \circ f)^{-1}$, to wystarczy rozpatrzyć przypadek $g(z) = z - \lambda$, a dla tej funkcji równość do udowodnienia jest oczywista.

■

5. Rachunek funkcyjny w algebrach Banacha.

5.1. Algebry Banacha.

Definicja 3. *Algebrą Banacha* nazywamy łączną algebrę, która jest, jako przestrzeń wektorowa, przestrzenią Banacha i dla której działanie mnożenia jest ciągłe.

Ciągłość mnożenia w algebrze Banacha $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ jest równoważna stwierdzeniu, że istnieje dodatnia liczba rzeczywista c taka, że dla $A, B \in \mathfrak{A}$

$$\|AB\| \leqslant c\|A\|\|B\|. \tag{49}$$

Przykład 4. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $B(X)$ przestrzenią operatorów (odwzorowań liniowych i ciągłych) w X. Przypomnijmy, że normę w $B(X)$ definiujemy wzorem

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| \quad \text{i stąd} \quad \|A(x)\| \leqslant \|A\|\|x\|. \tag{50}$$

Mnożenie definiujemy jako składanie operatorów. Z poprzedniego rozdziału wiemy, że z tym mnożeniem $B(X)$ jest algebrą (podalgebrą wszystkich odwzorowań liniowych X w siebie). Wiemy też, że

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|AB(x)\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|A\|\|B(x)\| = \|A\|\,\|B\|, \tag{51}$$

czyli mamy nierówność (49) ze współczynnikiem $c = 1$. $B(X)$ jest więc algebrą Banacha z jednością (odzorowanie identycznościowe) i $\|\operatorname{id}\| = 1$.

Pokażemy, że każda algebra Banacha jest domkniętą podalgebrą algebry operatorów pewnej przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 24. *Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą Banacha. Istnieje przestrzeń Banacha X taka, że $\mathfrak{A}$ jest algebrą izomorficzną pewnej domkniętej podalgebrze $B(X)$.*

Dowód: Przyjmijmy $X = \mathfrak{A}$ jeżeli $\mathfrak{A}$ jest z jednością i $X = \mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ gdy jest bez jedności. X jest algebrą Banacha z jednością e. Definiujemy odwzorowanie $\varphi : \mathfrak{A} \to B(X)$

$$\varphi(A)x = T_A x,$$

gdzie T_A jest operatorem mnożenia z lewej strony przez A. Liniowość i ciągłość T_A jest oczywista. Jeżeli $\varphi(A) = 0$, to w szczególności $A = T_A e = 0$, czyli φ jest injekcją. Jest też homomorfizmem algebr (algebr z jednością), co wynika z łączności mnożenia. Ponadto, jeżeli wprowadzimy w $\mathfrak{A}$ nową normę $\|A\|_1 = \|\varphi(A)\|$, to

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \|T_A x\| \geqslant \frac{1}{\|e\|}\|T_A e\| = \frac{\|A\|}{\|e\|},$$

więc $\|A\| \leqslant \|e\|\|A\|_1$, czyli φ^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym. Aby wykazać równoważność norm wystarczy teraz pokazać domkniętość obrazu φ w $B(X)$ (wówczas obraz φ jest przestrzenią Banacha) a następnie skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym. Niech ciąg $\varphi(A_n)$ będzie zbieżny w $B(X)$ do T. Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy $\varphi(A_n)(xy) = T_{A_n}(xy) = T_{A_n}(x)y$ i w granicy $T(xy) = T(x)y$. Biorąc $x = e$ dostajemy $T(y) = T(e)y$. Wystarczy teraz pokazać, że $T(e) \in \mathfrak{A}$. Jest tak, bo $T(e) = \lim T_{A_n}(e)$, a $T_{A_n}(e) = A_n$, więc ciąg (A_n) jest zbieżny w X, więc też w $\mathfrak{A}$. ■

Możemy więc w definicji algebry Banacha przyjąć, że $c = 1$ i że norma jedności jest równa jeden i od tej pory tak będziemy zakładać.

5.2. Własności spektrum dla algebr Banacha. Zajmować się będziemy wyłącznie algebrami z jednością. Pokażmy najpierw, że zbiór elementów odwracalnych w algebrze Banacha jest otwarty.

Stwierdzenie 7. *Zbiór elementów odwracalnych w algebrze Banacha jest otwarty.*

Dowód: Zauważmy najpierw, że jeżeli $S \in \mathfrak{A}$ i $\|S\| < 1$, to istnieje $(1_{\mathfrak{A}} - S)^{-1}$. Istotnie, rozpatrzmy szereg

$$1_{\mathfrak{A}} + S + S^2 \cdots + S^n + \cdots . \tag{52}$$

Jest on zbieżny w $\mathfrak{A}$, bo

$$\left\| \sum_m^n S^i \right\| \leqslant \sum_m^n \| S \|^i \leqslant \sum_m^\infty \| S \|^i = \frac{\| S \|^m}{1 - \| S \|} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Korzystaliśmy tu z nierówności $\left\| S^i \right\| \leqslant \| S \|^i$. Ponieważ mnożenie w algebrze Banacha jest operacją ciągłą ze względu na oba argumenty, to

$$\begin{aligned}(1_{\mathfrak{A}} - S)(1_{\mathfrak{A}} + S + \cdots + S^n + \cdots) &= \lim_{n\to\infty} (1_{\mathfrak{A}} - S)(1_{\mathfrak{A}} + S + \cdots + S^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1_{\mathfrak{A}} - S^{n+1}) \\ &= 1_{\mathfrak{A}} - \lim_{n\to\infty} S^{n+1} = 1_{\mathfrak{A}},\end{aligned}$$

bo dla $\| S \| < 1$ mamy $\lim_{n\to\infty} S^{n+1} = 0$. Niech teraz A będzie elementem odwracalnym w $\mathfrak{A}$ i niech B będzie takie, że $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Stąd $\left\| A^{-1}B \right\| \leqslant \| B \| \left\| A^{-1} \right\| < 1$, więc istnieje $(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)^{-1}$. Z kolei $A + B = A(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)$, a stąd widać, że odwzorowanie $(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$ jest odwzorowaniem odwrotnym do $A + B$:

$$(1_{\mathfrak{A}} + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

Mamy więc, że $A+B$ jest odwracalny; zbiór elementów odwracalnych zawiera kulę o środku w A i promieniu $\dfrac{1}{\| A^{-1} \|}$.

■

W dalszym ciągu korzystać będziemy z dwóch podstawowych twierdzeń w teorii przestrzeni Banacha (i nie tylko): twierdzenia Hahna-Banacha i twierdzenia Banacha-Steinhausa. Podam je bez dowodu. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Funkcję $p: X \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$\begin{aligned}&p(x) \geqslant 0, \quad x \in X,\\ &p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2), \quad x_1, x_2 \in X\\ &p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X,\end{aligned}$$

nazywamy półnormą.

Twierdzenie 25 Hahna-Banacha. *Niech Y będzie podprzestrzenią X i niech f będzie funkcjonałem liniowym na Y spełniającym*

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in Y, \ \textit{dla półnormy} \ \ p,$$

to istnieje funkcjonał liniowy $\bar{f}$ na X taki, że $\bar{f} = f$ na Y i

$$|\bar{f}(x)| \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

Wniosek 3. *Jeżeli X jest przestrzenią z normą i $X \ni x_0$ jest różny od zera, to istnieje funkcjonał liniowy i ciągły taki, że $f(x_0) \neq 0$.*

Dowód: Niech Y będzie jednowymiarową podprzestrzenią rozpiętą przez x_0. Definiujemy ciągłą i liniową funkcję $f: Y \to \mathbb{K}$ kładąc $f(x_0) = \dfrac{1}{2}\|x_0\|$. Z twierdzenia Hahna-Banacha, biorąc $p(x) = \|x\|$ dla $x \in X$, dostajemy istnienie liniowej funkcji $\bar{f}: X \to \mathbb{K}$ takiej, że $\bar{f}(x_0) = f(x_0) \neq 0$ i $|\bar{f}(x)| \leqslant \|x\|$ (tzn. funkcja $\bar{f}$ jest ciągła). ■

Twierdzenie 26 Banacha-Steinhausa. *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest rodziną odwzorowań liniowych i ciągłych przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y o tej własności, że dla każdego $x \in X$ zbiór $\{F(x), \quad F \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony w Y, to $\mathcal{F}$ jest ograniczony w $L(X, Y)$.*

Przykład 5. Niech X^* będzie przestrzenią dualną (tzn. przestrzenią funkcjonałów liniowych i ciągłych) do przestrzeni Banacha X. Jest to przestrzeń Banacha i mamy injekcję

$$\mathcal{F}: X \to (X^*)^*, \quad \mathcal{F}(x)(f) = f(x).$$

Injektywność $\mathcal{F}$ wynika z Wniosku 3. Pokażemy, że $\mathcal{F}$ jest izometrią: dla $x \neq 0$

$$\|\mathcal{F}(x)\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle \mathcal{F}(x), f\rangle| = \sup_{\|f\|=1} |\langle f, x\rangle| = \|x\| \sup_{\|f\|=1} |\langle f, \frac{x}{\|x\|}\rangle|,$$

ale $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle|$, więc $\sup_{\|f\|=1} |\langle f, \frac{x}{\|x\|}\rangle| \leqslant 1$. Z Twierdzenia Hahna-Banacha mamy istnienie f takiego, że $f(\frac{x}{\|x\|}) = 1$ i $\|f\| = 1$, czyli $\sup_{\|f\|=1} |\langle f, \frac{x}{\|x\|}\rangle| = 1$ i stąd $\|\mathcal{F}(x)\| = \|x\|$. Wynika stąd, że zbiór $A \subset X$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}(A)$ jest ograniczony. Z Twierdzenia Banacha-Steinhausa dostajemy, że A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $f \in X^*$ zbiór $f(A)$ jest ograniczony.

Jesteśmy teraz gotowi do twierdzenia o podstawowych własnościach widma elementu algebry Banacha.

Twierdzenie 27. *Niech $A \in \mathfrak{A}$. Wówczas*

(a) *jeżeli* $\lambda \in \mathrm{rs}(A)$ *i* $\|(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}\| = c$, *to* $\{z: |z - \lambda| < c^{-1}\} \subset \mathrm{rs}(A)$,
(b) $\|(z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}\| \geqslant (\mathrm{dist}(z, \mathrm{sp}(A))^{-1}$,
(c) *zbiór* $\{z: |z| > \|A\|\}$ *jest zawarty w* $\mathrm{rs}(A)$,
(d) $\mathrm{sp}(A)$ *jest zwartym podzbiorem* $\mathbb{C}$,
(e) *funkcja* $z \mapsto (z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$ *zwana rezolwentą jest analityczna na* $\mathrm{rs}(A)$, *tzn. da się lokalnie rozwijać w szereg,*
(f) *rezolwenty nie można przedłużyć analitycznie poza* $\mathrm{rs}(A)$,
(g) $\|(z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}\| \to 0$ *gdy* $|z| \to \infty$,
(h) *widmo* $\mathrm{sp}(A)$ *jest zbiorem niepustym.*

Dowód:

(a) Z dowodu Stwierdzenia 7 wynika, że jeżeli $\lambda - A$ jest odwracalny, to $\lambda - A + B$, gdzie $\|B\| \leqslant \|(\lambda - A)^{-1}\|^{-1}$, jest też odwracalny. W szczególności, możemy wziąć $B = z 1_{\mathfrak{A}}$, gdzie $|z| < c^{-1}$.
(b) Z poprzedniego punktu mamy, że $\mathrm{dist}(z, \mathrm{sp}(A)) \geqslant \|(z - A)^{-1}\|^{-1}$. Stąd żądana nierówność.
(c) Jeżeli $|z| > \|A\|$, to $\|(z 1_{\mathfrak{A}})^{-1}\|^{-1} = |z| \geqslant \|A\|$ i jak w (a) dostajemy odwracalność $z 1_{\mathfrak{A}} - A$.
(d) Z (a) wynika, że $\mathrm{rs}(A)$jest zbiorem otwartym, więc $\mathrm{sp}(A)$ domkniętym. Z (b) wynika, że $\mathrm{sp}(A) \subset \{z: |z| \leqslant \|A\|\}$, czyli $\mathrm{sp}(A)$ jest zbiorem ograniczonym i domkniętym w $\mathbb{C}$, więc zwartym.
(e) Z (a) wiemy, że jeżeli $\lambda \in \mathrm{rs}(A)$ i $|z - \lambda| < c^{-1}$, to $z 1_{\mathfrak{A}} - A$ jest odwracalny. Z dowodu Stwierdzenia 7 $(z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$ jest sumą szeregu

$$(z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} = ((z - \lambda) 1_{\mathfrak{A}} + (\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A))^{-1}$$
$$= (\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} (1_{\mathfrak{A}} + (z - \lambda)(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}))^{-1} = (\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (z - \lambda)^i (A - \lambda 1_{\mathfrak{A}})^{-i}.$$

(f) Gdyby można było przedłużyć analitycznie (więc w sposób ciągły) rezolwentę poza $\mathrm{rs}(A)$, a więc do zbioru mającego niepuste przecięcie z $\mathrm{sp}(A)$, do dla pewnego ciągu $\mathrm{rs}(A) \ni z_n \to z \in \mathrm{sp}(A)$ ciąg $(z_n 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$ byłby zbieżny, co jest sprzeczne z (b).

(g) Jeżeli $|z| > \|A\|$, to $z1_{\mathfrak{A}} - A = z(1_{\mathfrak{A}} - \frac{1}{z}A)$ i

$$(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} A^j.$$

Stąd

$$\| (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{|z|} \sum_{j=0}^{\infty} |z|^{-j} \| A^j \| \leqslant \frac{1}{|z|} \sum_{j=0}^{\infty} |z|^{-j} \| A \|^j = \frac{1}{|z| - \|A\|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0.$$

(h) Niech $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ (funkcjonały liniowe i ciągłe). Funkcja $\mathrm{rs}(A) \ni z \mapsto \varphi((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) \in \mathbb{C}$ jest analityczna (holomorficzna) i dążąca do zera w nieskończoności. Jeżeli $\mathrm{rs}(A) = \mathbb{C}$, to funkcja ta jest całkowita i ograniczona, więc stała, więc zerowa. Dla każdego $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ dostajemy $\varphi((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) = 0$, więc z Wniosku 3 do Twierdzenia Hahna-Banacha $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} = 0$. Sprzeczność.

■

Prostym wnioskiem z tego twierdzenia jest

Twierdzenie 28 Gelfanda-Mazura. *Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest algebrą Banacha z jednością, której wszystkie elementy różne od zera są odwracalne, to jest ona izomorficzna $\mathbb{C}$.*

Dowód: Niech $A \in \mathfrak{A}$ i niech $z \in \mathrm{sp}(A)$ ($\mathrm{sp}(A)$ nie jest pusty), tzn. $z1_{\mathfrak{A}} - A$ nie jest elementem odwracalnym. Z założenia jest więc równy zeru i stąd $A = z1_{\mathfrak{A}}$. ■

5.3. Promień spektralny. *Promieniem spektralnym* elementu $A \in \mathfrak{A}$ nazywamy liczbę

$$\mathrm{sr}(A) = \sup_{z \in \mathrm{sp}(A)} |z|. \tag{53}$$

Z Twierdzenia 27 wynika, że $\mathrm{sr}(A) \leqslant \|A\|$. W dalszym ciągu przydatny będzie lemat o ciągach liczbowych.

Lemat 3. *Jeżeli ciąg liczbowy (c_n) spełnia relacje $c_n + c_m \geqslant c_{n+m}$, to ciąg $(\frac{c_n}{n})$ jest zbieżny i $\lim \frac{c_n}{n} = \inf \frac{c_n}{n}$.*

Dowód: Ustalmy m i niech $n = mq + r$, gdzie $r < m$. Mamy więc $c_n \leqslant c_{mq} + c_r \leqslant qc_m + c_r$ i stąd

$$\frac{c_n}{n} \leqslant \frac{q}{mq + r} c_m + \frac{c_r}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{c_m}{m.}$$

Zatem $\limsup \frac{c_n}{n} \leqslant \frac{c_m}{m}$ i $\limsup \frac{c_n}{n} \leqslant \liminf \frac{c_m}{m}$. Wynika stąd równość granicy górnej i dolnej, więc zbieżność ciągu. Ponadto $\lim \frac{c_n}{n} = \limsup \frac{c_m}{m} \leqslant \inf \frac{c_m}{m}$ i stąd dowodzona równość. ■

Twierdzenie 29 Formuła Gelfanda-Beurlinga.
Granica $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ istnieje i jest równa $\mathrm{sr}(A)$.

Dowód: Połóżmy $c_n = \log \|A^n\|$. Mamy dla tego ciągu

$$c_n + c_m = \log \|A^n\| + \log \|A^m\| = \log(\|A^n\| \|A^m\|) \geqslant \log \|A^{m+n}\| = c_{m+n}.$$

Z lematu wynika istnienie granicy $\lim \frac{c_n}{n} = \lim \log(\|A^n\|^{\frac{1}{n}})$ i stąd istnienie granicy $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Oznaczmy tą granicę przez r. Z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum z^{-1-n} A^n$ jest zbieżny bezwzględnie dla $|z| > r$ i, jak łatwo sprawdzić, jego suma jest równa $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$. Zatem $z \in \mathrm{rs}(A)$ jeśli $|z| > \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, czyli

$$\mathrm{sr}(A) \leqslant \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Niech teraz $|z| > \mathrm{sr}(A)$. Rezolwenta $z \mapsto (z-A)^{-1}$ jest funkcją analityczną na swojej dziedzinie, czyli na $\mathrm{rs}(A)$, zatem dla $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ funkcja liczbowa $\mathrm{rs}(A) \ni z \mapsto \varphi((z1_{\mathfrak{A}}-A)^{-1})$ jest holomorficzna, więc ma rozwinięcie Laurenta w pierścieniu $|z| > \mathrm{sr}(A)$. W pierścieniu $|z| > \|A\|$ rozwinięciem Laurenta rezolwenty jest szereg $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}A^k$, więc $\varphi((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1})$ ma w tym pierścieniu rozwinięcie $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}\varphi(A^k)$. Z jednoznaczności rozwinięcia Laurenta jest to też rozwinięcie w pierścieniu $|z| > \mathrm{sr}(A)$. Ze zbieżności szeregu Laurenta wynika, że ciąg $(z^{-k}\varphi(A^k))$ jest ograniczony dla każdego $\varphi \in \mathfrak{A}^*$. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa (Przykład 5) ciąg $(z^{-k}A^k)$ jest też ograniczony w normie, więc istnieje M takie, że $|z^{-k}|\|A^k\| \leqslant M$. Stąd $\|A^k\| \leqslant M|z|^k$, $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant M^{\frac{1}{k}}|z| \to |z|$ i $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant |z|$. Jest tak dla każdego $z > \mathrm{sr}(A)$, więc

$$\mathrm{sr}(A) \geqslant \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

■

5.4. Całki z funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha. Całkować będziemy funkcje $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha. Zaczynamy od funkcji schodkowych o zwartym nośniku. Mówimy, że funkcja $\mathbf{f}$ jest schodkowa, jeżeli istnieje skończony ciąg liczb $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ taki, że na przedziałach $]-\infty, c_0[, [c_0, c_1[, \ldots,]c_n, \infty[$ funkcja ta jest stała. Funkcja schodkowa ma zwarty nośnik, jeżeli na skrajnych przedziałach jest zero.

Definicja 4. Funkcję $\mathbf{f}$ nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna*, jeżeli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa $\mathbf{g}$ o zwartym nośniku taka, że

$$\overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leqslant \varepsilon$$

$\overline{\int}$ oznacza całkę górną, czyli kres dolny całek z funkcji schodkowych większych od funkcji podcałkowej. Z definicji zatem wynika, że funkcja całkowalna w powyższym sensie ma zwarty nośnik.

Stwierdzenie 8. *Funkcja $\mathbf{f}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(\mathbf{g}_n)$ funkcji schodkowych o zwartym nośniku taki, że $\overline{\int}\|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n\| \to 0$.*

Ciąg funkcji o którym mówi to stwierdzenie nazywamy *ciągiem aproksymującym.*

Stwierdzenie 9. *Niech funkcja $\mathbf{f}$ będzie ograniczona o nośniku zwartym. Jeżeli $\forall \varepsilon > 0$ istnieje funkcja całkowalna $\mathbf{g}_\varepsilon$ taka, że $\overline{\int}\|\mathbf{f} - \mathbf{g}_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$, to $\mathbf{f}$ też jest całkowalna.*

Dowód: Ponieważ funkcje $\mathbf{g}_\varepsilon$ są całkowalne, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa $\mathbf{h}_\varepsilon$ taka, że $\overline{\int}\|\mathbf{g}_{\frac{\varepsilon}{2}} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Z subaddytywności całki górnej dostajemy

$$\overline{\int}\|\mathbf{f} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \leqslant \overline{\int}\|\mathbf{f} - \mathbf{g}_{\frac{\varepsilon}{2}}\| + \overline{\int}\|\mathbf{g}_{\frac{\varepsilon}{2}} - \mathbf{h}_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon.$$

■

Stwierdzenie 10. *Funkcja $\mathbf{f}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją funkcja schodkowa $\mathbf{g}_\varepsilon$ o zwartym nośniku i funkcja rzeczywista h_ε takie, że $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}_\varepsilon\| \leqslant h_\varepsilon$ i $\int h_\varepsilon \leqslant \varepsilon$.*

Dowód: Niech $\mathbf{f}$ będzie całkowalna. Istnieje funkcja schodkowa $\mathbf{g}$ o zwartym nośniku i taka, że $\overline{\int}\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Z kolei, z definicji całki górnej, istnieje rzeczywista funkcja schodkowa h taka że $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \leqslant h$ i $\int h \leqslant \varepsilon$. W drugą stronę oczywiste. ■

Całkę z funkcji schodkowej o zwartym nośniku definiujemy w oczywisty sposób. Do definicji całki dla dowolnej funkcji całkowalnej potrzebne nam jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 30. *Niech $\mathbf{f}$ będzie całkowalna i niech $(\mathbf{g}_n)$ będzie ciągiem funkcji schodkowych o zwartym nośniku takim (ciąg aproksymujący), że*

$$\overline{\int}\|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n\| \to 0,$$

wówczas ciąg całek $\int \mathbf{g}_n$ jest zbieżny w X i granica nie zależy od wyboru ciągu $(\mathbf{g}_n)$.

Dowód: Mamy

$$\|\int \mathbf{g}_n - \int \mathbf{g}_m\| \leqslant \int \|\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_m\| \leqslant \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_n\| + \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}_m\| \to 0,$$

więc ciąg $(\int \mathbf{g}_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego, zatem zbieżnym w X. Oznaczmy granicę przez L_g. Niech teraz $(\mathbf{h}_n)$ będzie innym ciągiem aproksymującym $\mathbf{f}$ z granicą całek L_h. Utwórzmy z tych ciągów nowy ciąg $(\mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{h}_3, ...)$. Jest to też ciąg aproksymacyjny, więc odpowiedni ciąg całek jest zbieżny, powiedzmy do L. L_g, L_h są więc granicami podciągów ciągu zbieżnego, zatem są równe: $L = L_f = L_g$. ∎

Definicja 5. *Całką Riemanna* $\int \mathbf{f}$ z funkcji całkowalnej $\mathbf{f}$ nazywamy granicę całek ciągu aproksymującego.

Całkę Riemanna na przedziale zwartym I definiujemy standardowo: $\int_I \mathbf{f} = \int \chi_I \mathbf{f}$, gdzie χ_I jest funkcją charakterystyczną przedziału I.

Własności całki:

(1) Liniowość, tzn. suma funkcji całkowalnych jest całkowalna i całka z sumy jest sumą całek. Podobnie z mnożeniem przez liczbą.

Istotnie, niech $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ będą całkowalne i niech $(\mathbf{f}_n)$, $(\mathbf{g}_n)$ będą ciągami aproksymującymi. Mamy

$$\overline{\int} \|(\mathbf{f} + \mathbf{g}) - (\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n)\| \leqslant \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| + \overline{\int} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_n\| \to 0,$$

czyli na mocy Stwierdzenia 8 $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ jest funkcją całkowalną, a $(\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n)$ jej ciągiem aproksymującym. Z kolei

$$\int (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \lim \int (\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n) = \lim (\int \mathbf{f}_n + \int \mathbf{g}_n) = \int \mathbf{f} + \int \mathbf{g}.$$

(2) Addytywność względem przedziałów:

$$\int_{[a,c]} \mathbf{f} = \int_{[a,b]} \mathbf{f} + \int_{[b,c]} \mathbf{f}.$$

(3) Jeżeli funkcja $\mathbf{f}$ jest całkowalna, to funkcja rzeczywista $\|\mathbf{f}\|$ też jest całkowalna i

$$\left\| \int \mathbf{f} \right\| \leqslant \int \|\mathbf{f}\|. \tag{54}$$

Dowód: Niech $(\mathbf{f}_n)$ będzie ciągiem aproksymującym $\mathbf{f}$. Z nierówności $|\|\mathbf{f}\| - \|\mathbf{f}_n\|| \leqslant \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\|$ dostajemy, że

$$\overline{\int} |\|\mathbf{f}\| - \|\mathbf{f}_n\|| \leqslant \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| \to 0,$$

czyli funkcja $\|\mathbf{f}\|$ jest całkowalna i $\int \|\mathbf{f}\| = \lim \int \|\mathbf{f}_n\|$. Ale oczywiście $\left\|\int \mathbf{f}_n\right\| \leqslant \int \|\mathbf{f}_n\|$ i stąd teza. ∎

(4) Z poprzedniego wyniku natychmiast szacowanie

$$\int_I \|\mathbf{f}\| \leqslant |I| \sup_{t \in I} \|\mathbf{f}(t)\|. \tag{55}$$

(5) Jeżeli $F\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym, a $\mathbf{f}$ funkcją całkowalną, to $F \circ \mathbf{f}$ jest funkcją całkowalną i

$$F\left(\int \mathbf{f}\right) = \int F \circ \mathbf{f}. \tag{56}$$

Dowód: Jeżeli $\mathbf{f}$ jest funkcją schodkową, tzn. istnieje ciąg $c_0 < c_1 \cdots < c_n$ taki, że $\mathbf{f}(t) = q_i$ dla $t \in [c_{i-1}, c_i[$, to $F \circ \mathbf{f}$ też jest funkcją schodkową i

$$\int F \circ \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) F(q_i) = F\left(\sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) q_i\right) = F\left(\int \mathbf{f}\right).$$

Jeżeli teraz $(\mathbf{f}_n)$ jest ciągiem aproksymującym funkcji całkowalnej $\mathbf{f}$, to

$$\overline{\int} \|F \circ \mathbf{f} - F \circ \mathbf{f}_n\| \leqslant \overline{\int} \|F\| \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| = \|F\| \overline{\int} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_n\| \to 0,$$

czyli $F \circ \mathbf{f}$ jest funkcją całkowalną, a ciąg $(F \circ \mathbf{f}_n)$ jej ciągiem aproksymującym. Stąd i z ciągłości F

$$\int F \circ \mathbf{f} = \lim \int F \circ \mathbf{f}_n = \lim F\left(\int \mathbf{f}_n\right) = F\left(\lim \int \mathbf{f}_n\right) = F\left(\int \mathbf{f}\right).$$

■

5.5. Twierdzenie spektralne dla algebr Banacha. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Powiemy, że $f \in \mathcal{A}(K)$, jeżeli f jest holomorficzna na pewnym otoczeniu K. Niech $f \in \mathcal{A}(\mathrm{sp}(A))$ i niech γ będzie konturem będącym brzegiem obszaru D zawartego w dziedzinie holomorficzności f. Dla $\lambda \in D$ funkcja f wyraża się wzorem Cauchy'ego

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_\gamma (z - \lambda)^{-1} f(z) \mathrm{d}z.$$

Stąd idea, by zdefiniować $f(A)$ wzorem

$$f(A) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_\gamma (z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} f(z) \mathrm{d}z, \tag{57}$$

gdzie $\gamma = \partial D$ i $\mathrm{sp}(A) \subset D$. Zauważmy najpierw, że całka ta nie zależy od wyboru konturu. Istotnie, funkcja $z \to (z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} f(z)$ jest analityczna, więc dla $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ funkcja $z \to \varphi((z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) f(z)$ jest holomorficzna, czyli całka $\oint_\gamma \varphi((z 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) f(z) \mathrm{d}z$ nie zależy od konturu. Z wniosku do twierdzenia Hahna-Banacha dostajemy niezależność całki (57) od konturu. Ponadto, jeżeli mamy dwie funkcje $f, g \in \mathcal{A}(\mathrm{sp}(A)$, które są równe na przecięciu dziedzin, to całki też są równe, czyli $f(A) = g(A)$. Sensowne jest więc rozpatrywanie przestrzeni $\mathrm{Hol}(K)$ będącej przestrzenią ilorazową przestrzeni $\mathcal{A}(K)$ względem relacji równoważności

$$f \sim g \quad \text{jeżeli} \quad f = g \quad \text{na pewnym otwartym otoczeniu} \quad K.$$

Wzór (57) definiuje więc liniowe odwzorowanie $\mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A)) \to \mathfrak{A}$. Przestrzeń $\mathrm{Hol}(K)$ jest oczywiście algebrą przemienną. W następnym twierdzeniu pokażemy, między innymi, że odwzorowanie (57) jest homomorfizmem algebr.

Twierdzenie 31 (Spektralne). *Niech $A \in \mathfrak{A}$ i $f \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$. Wówczas*

(A) *jeżeli $f \equiv 1$ to $f(A) = 1_{\mathfrak{A}}$,*
(B) *jeżeli $f(z) = z$, to $f(A) = A$,*
(C) *jeżeli $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$, to $(fg)(A) = f(A)g(A)$,*
(D) *jeżeli $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$, gdzie $\lambda \in \mathrm{rs}(A)$, to $f(A) = (\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$,*
(E) *jeżeli $AB = BA$, to $f(A)B = Bf(A)$,*
(F) *jeżeli funkcja f jest zadana szeregiem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ funkcją analityczną w kole o promieniu większym od $\mathrm{sr}(A)$, to*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n,$$

i szereg jest zbieżny bezwzględnie,
(G) $\mathrm{sp}(f(A)) = f(\mathrm{sp}(A))$,
(H) *jeżeli $g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(f(A)))$, to $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,*
(I) *mamy oszacowanie $\|f(A)\| \leqslant C_{\gamma,A} \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$.*

Dowód:

(A) Jako γ możemy wziąć okrąg $\partial K(0, R)$, gdzie $R > \|A\|$. Dla $|z| > \|A\|$ mamy $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} A^k$ i stąd

$$\frac{1}{2\pi\iota} \oint_\gamma (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\iota} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \oint_\gamma z^{-k-1} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\iota} 1_{\mathfrak{A}} \oint_\gamma z^{-1} \mathrm{d}z = 1_{\mathfrak{A}}.$$

(B) Jak w poprzednim punkcie,

$$\frac{1}{2\pi\iota} \oint_\gamma (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} z \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\iota} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \oint_\gamma z^{-k} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\iota} A \oint_\gamma z^{-1} \mathrm{d}z = A.$$

(C) Niech kontur γ_g dla całki z funkcją g będzie na zewnątrz konturu γ_f dla całki z funkcją f. Mamy

$$\begin{aligned}
&\oint_{\gamma_f} f(z)(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z \oint_{\gamma_g} g(w)(w1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}w \\
=&\oint_{\gamma_f} \oint_{\gamma_g} f(z)g(w)(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}(w1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z\mathrm{d}w \\
=&\oint_{\gamma_f} \oint_{\gamma_g} f(z)g(w)(w - z)^{-1}((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} - (w1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) \mathrm{d}z\mathrm{d}w \\
=&\oint_{\gamma_f} f(z)(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z \oint_{\gamma_g} (w - z)^{-1} g(w) \mathrm{d}w \\
&+\oint_{\gamma_g} g(w)(w1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}w \oint_{\gamma_f} f(z)(z - w)^{-1} \mathrm{d}z, \qquad (58)
\end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z tożsamości (42)

$$(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}(w1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} = (w - z)^{-1}((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} - (w1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}).$$

Zauważmy, że

$$\oint_{\gamma_g} g(w)(w - z)^{-1} \mathrm{d}w = 2\pi\iota g(z), \text{ bo } z \in \gamma_f \text{ leży wewnątrz konturu } \gamma_g,$$

$$\oint_{\gamma_f} f(z)(z - w)^{-1} \mathrm{d}z = 0, \text{ bo } w \in \gamma_g \text{ leży na zewnątrz konturu } \gamma_f,$$

co kończy dowód.

(D) Kładąc $f(z) = \lambda - z$ i $g(z) = (\lambda - z)^{-1}$ mamy z (A) i (B) $f(A) = \lambda 1_{\mathfrak{A}} - A$, a z poprzedniego punktu i z (A) $f(A)g(A) = 1_{\mathfrak{A}}$.

(E) Wystarczy skorzystać z faktu, że $AB = BA$ implikuje $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}B = B(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$ dla $z \in \mathrm{rs}(A)$. Był on dowodzony w przypadku dowolnej algebry.

(F) Dla $f_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ mamy $f_n(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$. Ponieważ $f_n \to f$ niemal jednostajnie, to całka definiująca $f_n(A)$ zbiega do całki definiującej $f(A)$, czyli $f_n(A) \to f(A)$. Wystarczy teraz pokazać, że szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$ jest zbieżny bezwzględnie. Mamy z założenia o funcji f, że $(\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} > \mathrm{sr}(A)$, zatem

$$\limsup \|a_n A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \mathrm{sr}(A) \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego dostajemy zbieżność szeregu.

(G) Pokażemy najpierw, że

$$\mathrm{sp}(f(A)) \subset f(\mathrm{sp}(A)). \tag{59}$$

Niech bowiem $\mu \notin f(\mathrm{sp}(A))$, czyli funkcja $g\colon z \mapsto f(z) - \mu$ jest różna od zera na $\mathrm{sp}(A)$ i stąd funkcja $g^{-1}\colon z \mapsto \dfrac{1}{g(z)}$ jest holomorficzna w otoczeniu $\mathrm{sp}(A)$. Z (C) dostajemy

$$g^{-1}(A)g(A) = (g^{-1}g)(A) = 1_{\mathfrak{A}},$$

czyli $g^{-1}(A) = (f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1}$ i $\mu \notin \mathrm{sp}(f(A))$.

Teraz wykażemy zawieranie

$$\mathrm{sp}(f(A)) \supset f(\mathrm{sp}(A)). \tag{60}$$

Niech $\mu \notin \mathrm{sp}(f(A))$. Jeżeli $\mu \notin \operatorname{im} f$, to również $\mu \notin f(\mathrm{sp}(A))$. Niech więc $\mu = f(\lambda)$, czyli że funkcję $g\colon z \mapsto (f(z) - \mu)(z - \lambda)^{-1}$ można przedłużyć analitycznie do $z = \lambda$, $g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$. Sprawdzamy, że $(f(A) - \mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1} g(A)$ jest elementem odwrotnym do $(A - \lambda 1_{\mathfrak{A}})$. Oczywiście $(A - \lambda 1_{\mathfrak{A}}) = h(A)$, gdzie $h(z) = z - \lambda$. Stąd

$$(f(A)-\mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1} g(A)(A-\lambda 1_{\mathfrak{A}}) = (f(A)-\mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1}(gh)(A) = (f(A)-\mu 1_{\mathfrak{A}})^{-1}(f(A)-\mu 1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{A}},$$

zatem $\lambda \notin \mathrm{sp}(A)$ i $\mu \notin f(\mathrm{sp}(A))$.

(H) Mamy

$$g(f(A)) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{\gamma_g} g(w)(w1_{\mathfrak{A}} - f(A))^{-1} \mathrm{d}w \tag{61}$$

a ponieważ $w \notin \mathrm{sp}(f(A)) = f(\mathrm{sp}(A))$, to funkcja $(w - f(z))^{-1}$ jest holomorficzna w otoczeniu $\mathrm{sp}(A)$ i mamy, podobnie jak w punkcie (D),

$$(w1_{\mathfrak{A}} - f(A))^{-1} = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{\gamma_w} (w - f(z))^{-1}(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z, \tag{62}$$

przy czym kontur γ_w możemy wybrać tak, by $f(\gamma_w)$ leżał wewnątrz konturu γ_g i był wspólny dla wszystkich $w \in \gamma_g$. Niech γ będzie takim konturem. Mamy wówczas

$$\begin{aligned} g(f(A)) &= \frac{1}{(2\pi\iota)^2} \oint_{\gamma_g} g(w) \left(\oint_{\gamma} (w - f(z))^{-1}(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{(2\pi\iota)^2} \oint_{\gamma} \left(\oint_{\gamma_g} g(w)(w - f(z))^{-1} \mathrm{d}w \right) (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{\gamma} g(f(z))(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z = (g \circ f)(A). \end{aligned}$$

(I) Z nierówności (55) dostajemy, podobnie jak w zwykłej analizie zespolonej

$$\|f(A)\| \leqslant \frac{1}{2\pi}|\gamma| \sup_{z\in\gamma} \|f(z)(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}|\gamma| \sup_{z\in\gamma} \|(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}\| \sup_{z\in\gamma} |f(z)| = C_{\gamma,A} \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$$

■

5.6. Idempotenty spektralne. Niech D bedzie podzbiorem $\mathrm{sp}(A)$, otwartym i domkniętym w topologii na $\mathrm{sp}(A)$, indukowanej z $\mathbb{C}$. Mówimy, że D jest izolowany w $\mathrm{sp}(A)$. W $\mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$ wybieramy element 1_D, równy 1 w otoczeniu D i 0 na otoczeniu dopełnienia D w $\mathrm{sp}(A)$. Oczywiście $1_D^2 = 1_D$, więc element $1_D(A)$ jest idempotentny. Nazywamy go *spektralnym idempotentem* elementu A.

Zdefiniujmy zbiór $\mathfrak{A}_D = 1_D(A)\mathfrak{A}1_D(A)$. Łatwo sprawdzamy, ze jest to podalgebra algebry $\mathfrak{A}$. Jednością tej podalgebry jest $1_D(A)$. Wiemy, że dla $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$ mamy $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, więc w szczególności $f(A)1_D(A) = 1_D(A)f(A)$ i w konsekwencji

$$1_D(A)f(A)1_D(A) = f(A)1_D(A). \tag{63}$$

Stwierdzenie 11.

$$\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}_D}(A1_D(A)) = D. \tag{64}$$

Dowód: Oczywiste, że $1_D(A)$ jest jednością w $\mathfrak{A}_D$ i że

$$1_D(A) = \frac{1}{(2\pi\iota)} \oint_\gamma (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \mathrm{d}z, \tag{65}$$

gdzie γ jest konturem obejmującym D, poza którym jest pozostała część widma $\mathrm{sp}(A)$. Jeżeli $z \in \mathrm{rs}(A)$, to $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}1_D(A)$ jest elementem odwrotnym do $(z1_{\mathfrak{A}} - A)1_D(A)$. Dla $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus D$ element algebry $g(A)$, gdzie funkcja g jest dana wzorem

$$g\colon z \mapsto \begin{cases} (\lambda - z)^{-1}, & \text{w otoczeniu } D \\ 0, & \text{w otoczeniu } \mathrm{sp}(A) \setminus D, \end{cases} \tag{66}$$

jest elementem odwrotnym do $(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)1_D(A)$ w $\mathfrak{A}_D$. Wystarczy zauważyć, że

$$(\lambda - z)1_D(z)g(z) = 1_D(z).$$

Zatem $\mathrm{sp}_{\mathfrak{A}}(A) \setminus D \subset \mathrm{rs}_{\mathfrak{A}_D}(A1_D)$. Teraz trzeba pokazać, że $(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)1_D(A)$ nie jest odwracalny dla $\lambda \in D$. Oznaczmy przez D' dopełnienie D w $\mathrm{sp}(A)$. Jest to, podobnie jak D, zbiór izolowany w $\mathrm{sp}(A)$. Zamieniając rolami D i D' dostajemy, że $(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)1_{D'}(A)$ jest odwracalny w $\mathfrak{A}_{D'}$, czyli dla pewnego $B' \in \mathfrak{A}$ mamy $1_{D'}(A)(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)B'1_{D'}(A) = 1_{D'}(A)$. Gdyby $(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)1_D(A)$ był odwracalny w $\mathfrak{A}_D$, to znaczy $1_D(A)(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)B1_D(A) = 1_D(A)$ dla pewnego $B \in \mathfrak{A}$, to mielibyśmy

$$\begin{aligned}(1_D(A)B1_D(A) &+ 1_{D'}(A)B'1_{D'}(A))\,(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A) \\ &= (1_D(A)B1_D(A) + 1_{D'}(A)B'1_{D'}(A))((\lambda - A)1_D(A) + (\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)1_{D'}(A)) \\ &= 1_D(A) + 1_{D'}(A) = 1_{\mathfrak{A}},\end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z tego, że $1_D(A)1_{D'}(A) = 0$. Zatem $(\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A)$ byłby odwracalny, co jest sprzeczne z $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ i stąd $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathfrak{A}_D}(A1_D(A))$. ■

Co to wszystko oznacza, gdy $\mathfrak{A} = B(X)$? Idempotenty są rzutami. Rzut 1_D nazywany jest *rzutem spektralnym.* Operator $1_D(A)B1_D(A)$ jest rzutem B na podprzestrzeń $1_D(A)X$. Związki $1_D(A)1_{D'}(A) = 0$ i $1_D(A) + 1_{D'}(A) = 1_{\mathfrak{A}} = \mathrm{id}_X$ oznaczają, że podprzestrzenie $1_D(A)X$ i $1_{D'}(A)X$ są dopełniającymi się podprzestrzeniami w X i że $\mathrm{im}\, 1_D(A) = \ker 1_{D'}(A)$. Równość $1_D(A)f(A)1_D(A) = f(A)1_D(A)$ oznacza, że podprzestrzeń $1_D(A)X$ jest niezmienniczą podprzestrzenią dla $f(A)$.

5.7. Izolowane wartości własne. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie izolowanym punktem w $\mathrm{sp}(A)$. Oznaczmy $P := 1_\lambda(A)$ i $N := (A - \lambda 1_{\mathfrak{A}})1_\lambda(A) = (A - \lambda 1_{\mathfrak{A}})P$. Oczywiście $N = f(A)$, gdzie $f(z) = (z-\lambda)1_\lambda(z)$ i $PN = NP = N$. Mówimy, że λ jest *półprostą wartością własną* jeżeli $N = 0$.

STWIERDZENIE 12. *N jest elementem quasinilpotentnym* ($\mathrm{sp}(N) = \{0\}$) *i*

$$(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}P = (z-\lambda)^{-1}P + \sum_{j=1}^{\infty}(z-\lambda)^{-1-j}N^j. \tag{67}$$

Jeżeli N jest nilpotentny stopnia n, to istnieją $\delta > 0$ i C takie, że

$$\|(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}\| \leqslant C|z-\lambda|^{-n} \quad dla \quad z \in K(\lambda,\delta). \tag{68}$$

DOWÓD: Mamy $N = f(A)$, gdzie $f(z) = (z-\lambda)1_\lambda(z)$, więc $\mathrm{sp}(N) = f(\mathrm{sp}(A))$, ale $1_\lambda(z) = 0$ dla $z \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{\lambda\}$, czyli $f(\mathrm{sp}(A)) = \{0\}$.

Funkcja operatorowa $z \mapsto (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}$ jest analityczna w otoczeniu λ (Tw. 27), więc dla $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ funkcja $z \mapsto \varphi((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1})$ jest holomorficzna z rozwinięciem Laurenta w otoczeniu λ:

$$\varphi((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^\varphi (z-\lambda)^n,$$

gdzie

$$c_n^\varphi = \frac{1}{2\pi\iota}\oint_\gamma \varphi((\zeta 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1})(\zeta-\lambda)^{-n-1}\mathrm{d}\zeta.$$

i γ jest brzegiem otoczenia λ. Standardowe argumenty dają

$$c_n^\varphi = \frac{1}{2\pi\iota}\varphi\left(\oint_\gamma (\zeta 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}(\zeta-\lambda)^{-n-1}\mathrm{d}\zeta\right)$$

i

$$\varphi((z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}) = \varphi\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\lambda)^n\right),$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi\iota}\oint_\gamma (\zeta 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}(\zeta-\lambda)^{-n-1}\mathrm{d}\zeta. \tag{69}$$

Stąd

$$(z-A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\lambda)^n. \tag{70}$$

Dla $-n-1 \geqslant 0$ funkcja $(\zeta-\lambda)^{-n-1}$ jest holomorficzna, więc $c_n = (A-\lambda)^{-n-1}P = N^{-n-1}$ dla $n < -1$ i $c_n = P$ dla $n = -1$. Rozwinięcie (70) mamy w otoczeniu λ, ale zastępując c_n przez c_nP dostajemy rozwinięcie $(z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}P$ na całej płaszczyźnie zespolonej. Z faktu, że $(1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \to 0$ przy $|z| \to \infty$ (Tw. 27) dostajemy, że $c_nP = 0$ dla $n \geqslant 0$. Istotnie, wybierając jako kontur γ okrąg $K(\lambda, R)$, mamy szacowanie

$$\begin{aligned}\| c_nP \| &\leqslant R \sup_{|\zeta-\lambda|=R} \left\| (\zeta 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1}P(\zeta-\lambda)^{-n-1} \right\| \\ &\leqslant R^{-n} \| P \| \sup_{|\zeta-\lambda|=R} \left\| (\zeta 1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} \right\| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Szacowanie (68) dostajemy uwzględniając fakt, że w szeregu (70) wyrazem dominującym w otoczeniu λ jest wyraz o najniższej potędze. ■

Warto tu zwrócić uwagę na to, że jeżeli $\mathfrak{A} \subset B(X)$, to stopień nilpotentności jest nie większy niż wymiar $P(X)$. Istotnie, jeżeli stopień nilpotentności N jest n, to istnieje $x \in X$ taki, że $N^n(x) = 0$ i $N^{n-1}(x) \neq 0$. Połóżmy $x_1 = Px,\ x_i = N^{i-1}x,\ i = 2, \dots, n$. Łatwo sprawdzamy, że jest to układ liniowo niezależny.

5.8. Przypadek skończenie-wymiarowy. W przypadku algebry wymiaru skończonego wszystkie punkty widma są izolowane $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Niech d będzie funkcją w otoczeniu widma, równą λ_i w otoczeniu λ_i. Inaczej mówiąc, $d = \sum_i \lambda_i 1_{\lambda_i}$. Stąd $d(A) = \sum_i \lambda_i P_i$, gdzie $P_i = 1_{\lambda_i}(A)$. Jak w poprzednim paragrafie, $N_i = (A - \lambda_i 1_{\mathfrak{A}})P_i$ i definiujemy $N = \sum_i N_i$. Oczywiście $N_i = NP_i$ i są to elementy nilpotentne. Oznaczny m_i odpowiedni stopień nilpotentności. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$ mamy zatem

$$\begin{aligned} f(A)P_j &= \frac{1}{2\pi\iota}\oint_{\gamma_j} (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} f(z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\iota}\oint_{\gamma_j} \left((z-\lambda_j)^{-1}P_j + \sum_{k=1}^{m_j-1} N_j^k (z-\lambda_j)^{-k-1} \right) f(z)\mathrm{d}z \\ &= f(\lambda_j)P_j + \sum_{k=1}^{m_j-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda_j) N^k \end{aligned}$$

a stąd

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) \frac{N_j^k}{k!}.$$

5.9. Przykłady. W poniższych przykładach algebry są algebrami operatorów. Przypomnijmy, że element widma λ nazywamy *wartością własną* jeżeli $\lambda 1_{\mathfrak{A}} - A$ ma nietrywialne jądro. Zbiór wartości własnych nazywamy widmem punktowym (czysto punktowym) i oznaczamy $\mathrm{sp}_p(A)$.

PRZYKŁAD 6. Niech ℓ^p będzie przestrzenią Banacha ciągów liczbowych, sumowalnych w p-tej potędze, $p \in [1, \infty]$, $\mathfrak{A} = B(\ell^p)$. Niech (a_i) będzie ograniczonym ciągiem liczbowym. Operator $A \colon \ell^p \to \ell^p$ definiujemy wzorem

$$(Ax)_i = a_i x_i.$$

Oczywiście $\|A\| = \sup |a_i|$, $\mathrm{sp}_p(A) = \{a_i\}$ i $\mathrm{sp}(A) = \overline{\mathrm{sp}_p(A)}$.

PRZYKŁAD 7. W przestrzeni $L^p(\mathbb{Z})$ (ciągi numerowane od $-\infty$ do ∞) definiujemy operator U wzorem

$$(Ux)_i = x_{i+1}.$$

Oczywiście $\|U\| = 1$, a warunek $Ux = \lambda x$ oznacza $\lambda x_i = x_{i+1}$. Niezerowy ciąg spełniający ten warunek jest ograniczony tylko dla $|\lambda| = 1$. Stąd $|\lambda| = 1$ jest wartością własną dla $p = \infty$, a dla $p < \infty$ operator U nie ma wartości własnych. Równość $\|U\| = 1$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_0^\infty z^{-n-1}U^n$ dla $|z| > 1$ i szeregu $\sum_0^\infty z^n U^{-n-1}$ dla $|z| < 1$. Oba te szeregi są rozwinięciami $(z - U)^{-1}$, więc $\sigma(U) \subset \{z \colon |z| = 1\}$. Niech zatem $|\lambda| = 1$ i dla $N \in \mathbb{N}$ definiujemy ciąg v_N wzorem

$$(v_N)_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(2N+1)^{\frac{1}{p}}} & \text{dla } |n| \leqslant N, \\ 0 & \text{dla } |n| > N. \end{cases}$$

Mamy dla tego ciągu

$$(\lambda v_N)_n = \begin{cases} \frac{\lambda^{n+1}}{(2N+1)^{\frac{1}{p}}} & \text{dla } |n| \leqslant N, \\ 0 & \text{dla } |n| > N. \end{cases}$$

oraz

$$(Uv_N)_n = \begin{cases} \frac{\lambda^{n+1}}{(2N+1)^{\frac{1}{p}}} & \text{dla } |n+1| \leqslant N, \\ 0 & \text{dla } |n+1| > N. \end{cases}$$

Stąd

$$((\lambda - U)v_N)_n = \begin{cases} \frac{-\lambda^{-N}}{(2N+1)^{\frac{1}{p}}} & \text{dla } n = -N-1, \\ \frac{\lambda^{N+1}}{(2N+1)^{\frac{1}{p}}} & \text{dla } n = N, \\ 0 & \text{dla } n \neq -N-1, N-1. \end{cases}$$

i $\|(\lambda - U)v_N\|_p = (2/(2N+1))^{\frac{1}{p}}$. Ale $\|v_N\| = 1$, więc $\lambda - U$ nie jest odwracalny, $\lambda \in \mathrm{sp}(U)$.

Przykład 8. W przestrzeni ℓ^p rozpatrzmy operator przesunięcia w lewo (patrz Przykład 2):

$$(Lx)_i = x_{i+1}.$$

Oczywistym jest, że $\|L\| = 1$. Szukamy wartości własnych:

$$L(x) = \lambda x, \quad x_{i+1} = \lambda x_i, \quad \text{i stąd} \quad x_n = x_1 \lambda^{n-1}.$$

Ciąg taki należy do ℓ^p, $p < \infty$ jeżeli $|\lambda| < 1$ i do ℓ^∞ jeżeli $|\lambda| \leqslant 1$, czyli

$$\mathrm{sp}_p(L) = \begin{cases} \{z\colon \|z\| \leqslant 1\} & \text{dla } p = \infty \\ \{z\colon \|z\| < 1\} & \text{dla } p < \infty \end{cases}$$

Ponieważ $\mathrm{sr}(L) \leqslant \|L\| = 1$ i $\mathrm{sp}(L)$ jest zbiorem domkniętym, dostajemy

$$\mathrm{sp}(L) = \{z\colon \|z\| \leqslant 1\}$$

dla każdego p.

Przykład 9. Dla operatora przesunięcia w prawo $R\colon \ell^p \to \ell^p$

$$(R(x))_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{dla } i \geqslant 2 \\ 0 & \text{dla } i = 1 \end{cases}$$

mamy $\|R\| = 1$ i z warunku $R(x) = \lambda x$ dostajemy $x = 0$, czyli $\mathrm{sp}_p(R) = \emptyset$. Z kolei, jeżeli $y = (z - R)x$, to $y_1 = zx_1$ i $y_i = zx_i - x_{i-1}$ dla $i > 1$ a stąd, dla $|z| < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} z^{i-1} y_i = 0$. Zatem $(z - R)$ nie jest surjekcją i mamy

$$\mathrm{sp}(R) = \{z\colon \|z\| \leqslant 1\}$$

Przykład 10. Niech (a_i) będzie ciągiem zbieżnym do zera. Definiujemy operator

$$N\colon \ell^p \to \ell^p,$$
$$(Nx)_i = \begin{cases} a_{i-1}x_{i-1}, & \text{dla } i > 1 \\ 0, & \text{dla } i = 1. \end{cases}$$

Jak w poprzednim przykładzie $\mathrm{sp}_p(N) = \emptyset$. Obliczymy promień spektralny korzystając z Twierdzenia 29. Mamy

$$(N^2x)_i = \begin{cases} a_{i-1}a_{i-2}x_{i-1}, & \text{dla } i > 2 \\ 0, & \text{dla } i = 1, 2 \end{cases}$$

i $\|N^2\| = \sup |a_i a_{i+1}|$ i tak dalej dla wyższych potęg N. Uporządkujmy ciąg $(|a_i|)$ w ciąg malejący (b_i). Dostajemy oczywiste nierówności

$$\|N\| = b_1, \quad \|N^2\| \leqslant b_1 b_2, \quad \ldots, \quad \|N^k\| \leqslant b_1 b_2 \cdots b_k$$

i stąd $\lim \|N^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim b_k = 0$. Wniosek: $\mathrm{sr}(N) = 0$ i $\mathrm{sp}(N) = \{0\}$.

6. Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprzężonych w przestrzeni Hilberta.

6.1. Twierdzenie spektralne dla operatora samosprzężonego. Dla każdego operatora w przestrzeni Hiberta ma zastosowanie Holomorficzne Twierdzenie Spektralne 31. W uzupełnieniu można pokazać związki

$$\mathrm{sp}(A^\dagger) = \overline{\mathrm{sp}(A)}, \qquad f(A)^\dagger = \bar{f}(A^\dagger), \quad \text{gdzie} \quad \bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \tag{71}$$

dla funkcji $f \in \mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$.

Dowód: Równość $\mathrm{sp}(A^\dagger) = \overline{\mathrm{sp}(A)}$ jest oczywista. Oczywistym też jest, że jeżeli f jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $\mathrm{sp}(A)$, to funkcja $\bar{f}$ jest holomorficzna w otoczeniu $\overline{\mathrm{sp}(A)}$. Mamy

$$f(A) = \frac{1}{2\pi\iota}\oint_\gamma (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} f(z)\mathrm{d}z,$$

gdzie γ jest łukiem otaczającym $\mathrm{sp}(A)$. Stąd łuk $\bar{\gamma}$ otacza $\mathrm{sp}(A^\dagger) = \overline{\mathrm{sp}(A)}$. Parametryzując γ odcinkiem $[0,1]$, mamy

$$\begin{aligned}
(f(A))^\dagger &= -\frac{1}{2\pi\iota}\left(\oint_\gamma (z1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} f(z)\mathrm{d}z\right)^\dagger = -\frac{1}{2\pi\iota}\left(\int_{[0,1]} (\gamma(t)1_{\mathfrak{A}} - A)^{-1} f(\gamma(t))\dot{\gamma}\mathrm{d}t\right)^\dagger \\
&= -\frac{1}{2\pi\iota}\int_{[0,1]} (\overline{\gamma(t)}1_{\mathfrak{A}} - A^\dagger)^{-1}\overline{f(\gamma(t))}\,\dot{\bar{\gamma}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi\iota}\int_{[0,1]} (\bar{\gamma}(t)1_{\mathfrak{A}} - A^\dagger)^{-1}\bar{f}(\bar{\gamma}(t))\,\dot{\bar{\gamma}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi\iota}\oint_{\bar{\gamma}} (z1_{\mathfrak{A}} - A^\dagger)^{-1}\bar{f}(z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\iota}\oint_{\bar{\gamma}} (z1_{\mathfrak{A}} - A^\dagger)^{-1}\bar{f}(z)\mathrm{d}z = \bar{f}(A^\dagger).
\end{aligned}$$

Uwzględniliśmy tu fakt, że parametryzacja $t \mapsto \overline{\gamma(t)} = \bar{\gamma}(t)$ zadaje orientację przeciwną do kanonicznej łuku $\bar{\gamma}$. ∎

Dla operatora samosprzężonego nierówność (I) w Twierdzeniu 31 możemy zastąpić równością

$$\|f(A)\| = \sup_{z\in\mathrm{sp}(A)} |f(z)|. \tag{72}$$

Dowód: Dla samosprzężonego B mamy(Twierdzenie 3) $\|B\| = \mathrm{sr}(B) = \sup_{z\in\mathrm{sp}(B)}|z|$ oraz (Twierdzenie 1) $\mathrm{sp}(B) \subset \mathbb{R}$. Z (71) dostajemy, że $(\bar{f}f)(A)$ jest operatorem samosprzeżonym, zaś z Twierdzenia Spektralnego i Twierdzenia 2, że

$$\begin{aligned}
\|f(A)\|^2 &= \|f(A)^\dagger f(A)\| = \|\bar{f}(A)f(A)\| = \|(\bar{f}f)(A)\| \\
&= \sup_{z\in\mathrm{sp}((\bar{f}f)(A))} |z| = \sup_{z\in\mathrm{sp}(A)} |(\bar{f}f)(z)| \\
&= \sup_{z\in\mathrm{sp}(A)} |f(z)|^2 = (\sup_{z\in\mathrm{sp}(A)} |f(z)|)^2.
\end{aligned}$$

∎

Równość (72) oznacza, że odwzorowanie $\mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A)) \ni f \mapsto f(A) \in B(\mathsf{H})$ jest izometrią, jeżeli wyposażyć $\mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$ w normę $\|f\| = \sup_{z\in\mathrm{sp}(A)}|f(z)|$. Można więc je przedłużyć przez ciągłość. Na osi rzeczywistej $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$, więc z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa dla funkcji o wartościach zespolonych mamy, że domknięciem $\mathrm{Hol}(\mathrm{sp}(A))$ względem normy jednostajnej jest całe $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(A))$, więc $f(A)$ ma sens dla każdej funkcji ciągłej na $\mathrm{sp}(A)$. W szczególności, jeżeli $f \geqslant 0$, to $f = g^2$ i

$$f(A) = g(A)g(A) = g(A)g(A)^\dagger \geqslant 0.$$

Podsumowując, twierdzenie spektralne dla operatora samosprzężonego można sformułować tak:

TWIERDZENIE 32. *Niech A będzie operatorem samosprzężonym. Istnieje jedyne liniowe odwzorowanie*

$$\mathcal{C}(\mathrm{sp}(A)) \to B(\mathsf{H})\colon f \mapsto f(A),$$

które na funkcjach holomorficznych jest równe zdefiniowanemu poprzednio i posiada następujące własności:

(A) *jeżeli* $f \equiv 1$ *to* $f(A) = \mathrm{id}_{\mathsf{H}}$,

(B) *jeżeli* $f(x) = x$, *to* $f(A) = A$,

(C) $(fg)(A) = f(A)g(A)$,

(D) $(f(A))^\dagger = \bar{f}(A)$,

(E) $\|f(A)\| = \sup_{x\in\mathrm{sp}(A)} |f(x)|$,

(F) *jeżeli* $AB = BA$, *to* $f(A)B = Bf(A)$,

(G) $\mathrm{sp}(f(A)) = f(\mathrm{sp}(A))$,

(H) *jeżeli* $g \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(f(A)))$, *to* $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,

(I) *jeżeli* $f \geqslant 0$, *to* $f(A) \geqslant 0$.

WNIOSEK 4. *Jeżeli D i D' są rozłącznymi, izolowanymi podzbiorami* $\mathrm{sp}(A)$, *gdzie A jest samosprzężony, to podprzestrzenie $1_D\mathsf{H}$ i $1_{D'}\mathsf{H}$ są do siebie ortogonalne.*

DOWÓD: $1_D 1_{D'} = 0$, więc $1_D(A)1_{D'}(A) = 0$ i z $1_D(A)^\dagger = 1_D(A)$ mamy

$$0 = (1_D(A)1_{D'}(A)\mathsf{H} \mid \mathsf{H}) = (1_{D'}(A)\mathsf{H} \mid 1_D(A)\mathsf{H})\,.$$

■

6.2. Uogólnienia twierdzeń spektralnych.
Twierdzenie spektralne ma szereg wersji i uogólnień. W przypadku operatorów samosprzężonych można rozszerzyć klasę funkcji do zbioru funkcji borelowskich, ograniczonych na $\mathrm{sp}(A)$. Traci się przy tym równości (E) i (G) i trzeba się zadowolić nierównością $\|f(A)\| \leqslant \sup_{x\in\mathrm{sp}(A)} |f(x)|$ i zawieraniem $\mathrm{sp}(f(A)) \subset f(\mathrm{sp}(A))$. Z drugiej strony, Twierdzenie 32 można uogólnić na przypadek operatorów normalnych, czyli spełniających warunek $AA^\dagger = A^\dagger A$. Trzeba jedynie równość (D) zastąpić równością $(f(A))^\dagger = \bar{f}(A^\dagger)$.