Analiza I - 2013/14

Zadania domowe - seria 2

Zadanie 1. Dla odwzorowania $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ wyznaczyć przeciwobraz $f^{-1}(A)$ podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli
a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad A = [1,2[$.
a) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad A = [-1,1]$.
a) $f(x,y) = x^2 + y + 1, \quad A = [1,3[$.

Zadanie 2. Zbadać, czy dane odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest injekcją?, surjekcją?, bijekcją?, jeśli
a) $f(x) = x^3 + x + 1$.
b) $f(x) = x^3 - x + 1$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|} \in \mathbb{R}$ jest różnowartościowe.
Opisać obraz $X := f(\mathbb{R})$ oraz znaleźć wzór na odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Udowodnić że odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy,
gdy istnieje odwzorowanie $g\colon Y \to X$ takie że $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ oraz $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Zadanie 5. Dane są trzy odzorowania: $S : X \longrightarrow Y, \quad T : Y \longrightarrow Z, \quad U : Z \longrightarrow W$.
Wykazać, że jeśli odwzorowania: $T \circ S$ i $U \circ T$ sa bijekcjami to
również wszystkie trzy odwzorowania S, T i U sa bijekcjami.

Zadanie 6. Zbadać, czy podana relacja jest relcją równoważności, jeśli:
a) $\mathcal{R} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x = \sin y\}$.
b) $\mathcal{R} := \{((m,n),(m',n')) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : mn' = nm'\}$.
c) $\mathcal{R}_Z := \{(A,B) \in 2^X \times 2^X : A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq Z\}$,
gdzie Z jest ustalonym podzbiorem zbioru X.
W przypadku pozytywnej odpowiedzi opisz klasy równoważności.

Zadanie 7. Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze czteroelementowym $X = \{a,b,c,d\}$?
Zilustruj je w postaci tabelek oraz podaj klasy równoważności.