Analiza I - 2013/14

Zadania domowe - seria 4

Zadanie 1. Zbadać ograniczoność z góry i z dołu podanego zbioru:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |\,|x-1| - 1\,| < 1\}$.

b) $B = \left\{ \dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

c) $C = \left\{ \dfrac{n^2+2n-3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

d) $D = \{x \sin x : x \geqslant 0\}$.

e) $E = \left\{ \dfrac{1}{x} \sin x : x > 0 \right\}$.

f) $F = \left\{ \dfrac{x}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

W przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznaczyc odpowiednie kresy zbioru.

Zadanie 2. Zbadać ograniczoność i monotoniczność ciągu, którego wyraz ogólny ma postać: $a_n = n^{(-1)^n}$.

Zadanie 3. Korzystając z definicji granicy ciagu, udowodnić, że przy n dążącym do nieskończoności:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n^3+1} = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+5} = \dfrac{3}{2}$.

Zadanie 4. Sprawdzić zbieżność i obliczyć granicę ciągu:

a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

b) $a_n = \dfrac{4 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{5 \cdot 2^n + 4^{n+2}}$.

c) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

e) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \cos(2n-3)$.

f) $x_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^3+1} \cos(n!)$.

g) $x_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$.

h) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$.

i) $x_n = \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

j) $x_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$.

k) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$, w przypadku gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.