Analiza I - 2013/14

Zadania domowe - seria 5

Zadanie 1. Ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest rekurencyjnie:

$$x_0 = a > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wykazać, że ciąg (x_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność ciagu:

a) $a_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}{n^4}$, $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

b) $b_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}{n^3} - \dfrac{n}{4}$, $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność ciagu:

a) $x_n = \dfrac{n^3}{3^n}$, $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

b) $y_n = \dfrac{2^n \cdot n^n}{n!}$, $(n \in \mathbb{Z}_+)$.

Zadanie 4. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Wykazać, że jeśli ciąg $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ jest zbieżny, to zbieżny jest także ciąg $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Zadanie 5. Wykazać zbiezność ciagu o wyrazie ogólnym: $c_n := \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ i znaleźć jego granicę.