Analiza I - 2013/14

Zadania domowe - seria 10

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie parametry $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \geqslant 1$ tak, aby funkcja

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} bx & \text{dla} \quad x < 1 \\ x^a e^{-x^2} & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

była różniczkowalna na całym $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. Pokazać, że dla każdego $x > 0$: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 3. Zbadać nierówności:

a) $\forall_{x \in \mathbb{R}}: \ x \cdot \operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} x - 1$;

b) $\forall_{x > 0}: \ \log\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right) < \frac{1}{x} + \log x$.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie wartości $a, b \in \mathbb{R}$ dla których funkcja:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x-2)\log(x^2 - 4) & \text{dla} \quad |x| < 2 \\ ax + b & \text{dla} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

jest ciągła.

Zadanie 5. Czy istnieją stałe $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że dla funkcji $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - ax - b$ istnieje

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Zadanie 6. Obliczyć granicę:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \log x - x}{(x^2 - 1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x \cos^2 x}{\sin^3 x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \log(1 + x)}{\log(1 + x^2)}$;

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \left(\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$;

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{\left(2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}\right)}{2}\right]^{2x}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 - 3x^3)}{4x^3}$.

Zadanie 7. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

b) $f(x) = |\log(x^2 - 1)|$ dla $|x| > 1$.

Zadanie 8. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ na $\mathbb{R}$.

Zadanie 9. Podać przedziały monotoniczności i lokalne ekstrema funkcji:

a) $f(x) = |x|(x-1)$ na $\mathbb{R}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;

c) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

d) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ dla $|x| \leqslant \sqrt{2}$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ na $\mathbb{R}$.

Zadanie 10. Zbadać liczbę rozwiązań równania $xe^x = 1$ w przedziale $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Zadanie 11. W kulę o promieniu R wpisano stożek. Jaki jest promień podstawy i wysokość stożka, którego objętość jest największa?

Zadanie 12. W zbiorze walców o ustalonej objetości V znaleźć walec o najmniejszym polu powierzchni całkowitej S. Podać promień podstawy oraz wysokość minimalnego walca, a także $S_{\min}$.