+

Analiza Zespolona I, uzupełnienie

1. Zasada argumentu.

We wzorze na liczbę zer i biegunów mamy calkę z formy $\dfrac{f'}{f}\mathrm{d}z$. Zauważmy, ze forma ta jest różniczką $\mathrm{d}\log f$. Wprawdzie funkcja $\log f$ jest niejednoznaczna, to jej różniczka już jest. Z definicji logarytmu mamy $\log f(z) = \log|f(z)| + i\arg f(z)$ i stąd $\mathrm{d}\log f = \mathrm{d}\log|f| + i\mathrm{d}\arg f$. Całka z pierwszego składnika po konturze zamkniętym znika, a całka z drugiego jest równa przyrostowi argumentu $f(z)$ wzdłuż konturu. Stąd wzór na liczbę zer i biegunów możemy zinterpretowaś jako

Zasada argumentu. *Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ będzie różna od funkcji zerowej i niech Ω będzie obszarem spójnym. Jeżeli $D \subset \Omega$ jest zwartym obszarem z brzegiem takim, że ∂D nie zawiera zer ani biegunów funkcji f, to różnica sumy krotności zer funkcji f leżących w D i sumy rzędów biegunów N_p funkcji f leżących w D, jest równa zmianie argumentu $f(z)$ wzdłuż ∂D.*

2. Problemy Cousina.

Wiemy, że każdy wielomian w można przedstawić jako iloczyn dwumianów $(z - a_i)$, gdzie a_i jest pierwiastkiem w, oraz stałej. Na stałą należy patrzeć jak na wielomian, który nigdzie nie jest równy zero. Z drugiej strony, każda funkcja wymierna da się przedstawić jako suma wielomianu i ułamków prostych. Zwróćmy uwagę, że w rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste (wersja zespolona)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \sum_i \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)}$$

skladnik $\sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x-a_i)}$ jest jest częśḉia główną rozwinięcia Laurenta wokół a_i - pozostałe składniki są holomorficzne w a_i i otoczeniu. Zajmiemy się teraz podobnymi rozkładami dla funkcji holomorficznych i meromorficznych. Ponieważ będą występowały sumy i iloczyny nieskończone, trzeba najpierw uzupełnić naszą wiedzę dotyczącą przestrzeni funkcji analitycznych i meromorficznych.

2.1. Zupełność przestrzeni funkcji analitycznych. Twierdzenie Weierstrassa.

Twierdzenie 1 (Weierstrass). *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$, a $D \subset \Omega$ zwartym obszarem z brzegiem ∂D. Jeżeli ciąg $f_n \in \mathcal{A}(\Omega)$ jest zbieżny jednostajnie na ∂D, to jest też zbieżny jednostajnie na D i granica jest funkcją holomorficzną wewnątrz D.*

Dowód: Niech $f_n \to \tilde{f}$ jednostajnie na ∂D. Funkcja $f_n - f_m$ jest holomorficzna w Ω, więc $\sup_{z\in D} |f_n(z) - f_m(z)|$ jest osiągane na brzegu ∂D. Zatem (f_n) jest ciągiem Cauchy'ego w metryce jednostajnej, więc zbieżnym do funcji ciągłej f. Oczywiście $f = \tilde{f}$ na ∂D. Weźmy $z \in \operatorname{Int} D$. Z wzoru całkowego Cauchy'ego i ze zbieżności jednostajnej (f_n),

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)}\mathrm{d}\zeta \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{(\zeta - z)}\mathrm{d}\zeta = f(z).$$

Funkcja f jest więc, wewnątrz D, zadana wzorem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{(\zeta - z)}\mathrm{d}\zeta,$$

a zatem (różniczkowanie pod znakiem całki) holomorficzna. Korzystając jeszcze raz z wzoru całkowego (dla pochodnych) dostajemy, że $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ niemal jednostajnie we wnętrzu D.
■

Wniosek 1. *Jeżeli ciąg funkcji holomorficznych w Ω jest zbieżny niemal jednostajnie do f, to funkcja f jest holomorficzna w Ω i zbieżność jest niemal jednostajna wraz ze wszystkimi pochodnymi.*

Z twierdzenia o wartości średniej mamy nawet więcej: wystarczy zbieżność w sensie całki np. Lebesgue'a.

Podsumowanie:

(1) Przestrzeń $\mathcal{A}(\Omega)$ jest zupełna ze względu na zbieżność niemal jednostajną.
(2) Zbieżność niemal jednostajna jest równoważna zbieżności niemal jednostajnej ze wszystkimi pochodnymi.

Dla $\Omega = \mathbb{C}$ funkcja holomorficzna ma rozwinięcie Taylora w zerze, więc jest granicą niemal jednostajną wielomianów. Dla jednospójnego Ω mamy twierdzenie Rungego.

Twierdzenie 2 (Runge). *Niech Ω będzie obszarem jednospójnym i niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian P taki, że*

$$\sup_{z\in K} |f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Uwaga! Twierdzenia Rungego nie należy mylić z Twierdzeniem Stone'a. W twierdzeniu Stone'a (wersja dla funkcji o wartościach zespolonych) mamy przybliżanie funkcji ciągłych (więc i holomorficznych) wielomianami, ale od z i $\bar{z}$!

2.2. Rozkład na ułamki proste. Pierwszy problem Cousina.

Rozpatrzmy najpierw taki problem (**Pierwszy problem Cousina**):
Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i (a_i) ciągiem różnych punktów w Ω, bez punktu skupienia w Ω. Czy istnieje funkcja meromorficzna w Ω z biegunami w (a_i) (i tylko tam), o zadanych częściach głównych

$$P_i(z) = \sum_{k=1}^{n_i} c_{-k,i} \frac{1}{(z-a_i)^k}$$

rozwinięć Laurenta.

Pozytywną odpowiedź daje twierdzenie Mittag-Lefflera.

2.3. Dowód twierdzenia Mittag-Lefflera.

Dowód: Dowód przeprowadzimy w przypadku $\Omega = \mathbb{C}$. Dla dowolnego obszary dowód jest ideowo taki sam, ale technicznie znacznie bardziej skomplikowany. Przypadek ciągu skończonego jest trywialny: wystarczy wziąć sumę $\sum P_i$. Niech więc (a_i) będzie ciągiem nieskończonym. Możemy też założyć, że $|a_{i+1} \geqslant |a_i|$ oraz $|a_1| \neq 0$. W odróżnieniu od przypadku ciągu skończonego, suma $\sum P_i$ może być rozbieżna, będziemy więc jej składniki 'renormalizować' wielomianami by otrzymać szereg zbieżny. Funkcja P_i jest holomorficzna poza a_i, więc w kole $|z| \leqslant \frac{1}{2}|a_i|$ ma rozwinięcie Taylora. Istnieje zatem wielomian W_i taki, że

$$\sup_{2|z|\leqslant|a_i|} |W_i(z) - P_i(z)| < \frac{1}{i^2}.$$

Pokażemy, że szereg $\sum(P_i - W_i)$ jest zbieżny niemal jednostajnie w $\mathbb{C} \setminus (a_i)$. Niech $K \subset \mathbb{C} \setminus (a_i)$ będzie zbiorem zwartym. Ponieważ $|a_i| \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$, to istnieje N takie, że dla $i > N$ zbiór K jest zawarty w kole $|z| \leqslant \frac{1}{2}|a_i|$, więc dla $i > N$

$$\sup_{z\in K} |W_i(z) - P_i(z)| < \frac{1}{i^2}.$$

Stąd jednostajna zbieżność szeregu. Oznaczmy $f(z) = \sum_i (P_i(z) - W_i(z))$. Z twierdzenia Weierstrassa o zupełności przestrzeni funkcji holomorficznych f jest funkcją holomorficzną poza ciągiem (a_i). Dla każdego a_i funkcja $f - \sum_{k\neq i}(P_i - W_i)$ jest holomorficzna w a_i, więc część główna rozwinięcia Laurenta funkcji f w a_i jest równa P_i. ■

Wniosek 2 (Rozkład Mittag-Lefflera). *Każdą funkcję meromorficzną $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ można przedstawić w postaci sumy*

$$f = g + \sum_i (P_i - W_i),$$

gdzie P_i są częściami głównym rozwinięć f, W_i są wielomianami a g funkcją całkowitą.

Dowód: Uporządkujmy bieguny f według rosnącego modułu i niech P_i będzie częścią główną rozwinięcia w a_i. Punkt $z = 0$ możemy uznać za regularny, bo jeśli f ma biegun w $z = 0$, to zastąpimy f funkcją $f - P_0$, gdzie P_0 jest częścią główną rozwinięcia Laurenta w zerze. Z dowodu twierdzenia Mittag Lefflera istnieją wielomiany W_i takie, że szereg $\sum_i (P_i - W_i)$ jest zbieżny i że funkcja $g = f - \sum_i (P_i - W_i)$ jest całkowita. ■

2.4. Przykłady.

Przykład 1. Niech $f(z) = \dfrac{1}{(\sin z)^2}$. Jest to funkcja meromorficzna z biegunami drugiego rzędu w punktach $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Częścią główną rozwinięcia Laurenta w $n\pi$ jest $\dfrac{1}{(z - n\pi)^2}$. Suma części głównych jest zbieżna, więc $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(z - n\pi)^2}$ jest funkcją meromorficzną z częściami głównym rozwinięć Laurenta takimi samymi jak dla funkcji f. Funkcja $f - g$ jest zatem całkowita i okresowa o okresie π. Weźmy $z = x + iy$, gdzie $x \in [0, \pi]$. Dla $n = 1, 2, 3, \dots$ mamy

$$|z - n\pi| = \sqrt{y^2 + (x - n\pi)^2} \geqslant \pi(n - 1)$$

a dla $n = -1, -2, -3, \dots$

$$|z - n\pi| \geqslant |n|\pi.$$

Stąd

$$|g(z)| \leqslant \sum_{-m}^{m} \frac{1}{|z - n\pi|^2} + 2\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2\pi^2} .$$

Pierwszy składnik dąży do zera przy $y \to \infty$,więc

$$\lim_{y\to\infty} |g(z)| \leqslant 2\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2\pi^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

jako reszta sumy szeregu zbieżnego. Z drugiej strony, $|\sin^2 z| = \sin^2 x + \sinh^2 y$, więc

$$\frac{1}{\sin^2 z} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0 \quad \text{oraz} \quad f(z) - g(z) \xrightarrow[y\to\infty]{} 0,$$

jednostajnie ze względu na $x \in [0, \pi]$. $f - g$ jest więc funkcją całkowitą, ograniczoną, zatem stałą równą zero.

$$\frac{1}{(\sin z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \tag{1}$$

▲

Przykład 2. Funkcja meromorficzna $f(z) = \operatorname{ctg} z$ ma bieguny w punktach $z = n\pi$ z częściami głównymi $\dfrac{1}{z - n\pi}$. Szereg części głównych jest rozbieżny, ale można go 'renormalizować' (oprócz $n = 0$) wielomianami stopnia zerowego $-\dfrac{1}{n\pi}$. Funkcja

$$g(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$$

jest funkcją całkowitą, a różniczkując wyraz po wyrazie widzimy (Przykład 1), że jej pochodna jest równa zero. Jest to zatem funkcja stała w zerze równa zero,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right). \tag{2}$$

▲

2.5. Rozkład na czynniki pierwsze. Drugi problem Cousina. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i (a_i) ciągiem różnych punktów w Ω, bez punktu skupienia w Ω. Niech (p_i) będzie ciągiem liczb naturalnych.

Drugi problem Cousina: czy istnieje funkcja holomorficzna w Ω taka, że w punktach a_i (i tylko tam) ma zera krotności p_i. Pozytywną odpowiedź daje twierdzenie Weierstrassa, ale najpierw trochę o iloczynach nieskończonych.

2.6. Iloczyny nieskończone.
Iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$ nazywamy zbieżnym, jeżeli wszystkie jego czynniki są różne od zera i ciąg iloczynów częściowych $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + c_k)$ jest zbieżny do granicy $P \neq 0$. Piszemy $P = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$.

STWIERDZENIE 1. *Iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki dobór gałęzi logarytmu, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + c_n)$ jest zbieżny.*

DOWÓD: Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+c_n)$ jest zbieżny do S, to ciąg $\exp(\sum_{k=1}^{n} \log(1+c_k)) = \prod_{k=1}^{n}(1 + c_k)$ jest zbieżny do e^S.
Jeżeli iloczyn nieskończony jest zbieżny, to $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + c_k) \to P \neq 0$ i możemy wybrać (i wybieramy) gałąź logarytmu tak, by $\log P_n$ był zbieżny do $\log P$. Kładziemy $\log(1+c_1) = \log P_1$, gałąź $\log(1+c_2)$ dobieramy tak, by $\log(1+c_1)+\log(1+c_1) = \log P_2$ i.t.d. Dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n} \log(1 + c_k) = \log P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \log P.$$

■

Ze stwierdzenia wynika, że warynkiem koniecznym zbieżności iloczynu jest zbieżność do zera ciągu (c_n). Jeżeli $c_n \to 0$, to dla dużych n mamy szacowanie $|\log(1 + c_n) \leqslant 2|c_n|$. Istotnie, niech $|w| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Z definicji logarytmu (jesteśmy na gałęzi głównej logarytmu)

$$\log(1 + w) = \int_1^{1+w} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = w \int_0^1 \frac{1}{1 + tw}\mathrm{d}t$$

i stąd

$$|\log(1 + w)| \leqslant |w| \int_0^1 \frac{1}{1 - |w|}\mathrm{d}t \leqslant 2|w|.$$

Zatem ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ wynika zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+c_n)$.

2.7. Dowód twierdzenia Weierstrassa.
DOWÓD: Z twierdzenia Mittag-Lefflera istnieje funkcja meromorficzna $h \in \mathcal{M}(\Omega)$ taka, że w a_i ma biegun pierwszego rzędu z residuum p_i. Definiujemy nową funkcję

$$H(z) = \int_{z_0}^{z} h(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

gdzie droga całkowania łączy ustalony punkt z_0 z z. Funkcja H jest niejednoznaczną funkcją, holomorficzną poza (a_i). Ponieważ residua funkcji h w punktach (a_i) są liczbami naturalnymi, wartości $H(z)$ na różnych gałęziach różnią się o wielokrotność $2\pi i$. Zatem funkcja $f(z) = e^{H(z)}$ jest jednoznaczną funkcją holomorficzną poza (a_i) i jest tam różna od zera.

Co się dzieje w punkcie a_i? Mamy w otoczeniu a_i,

$$h(z) = \frac{p_i}{z - a_i} + g_i(z),$$

gdzie g_i jest holomorficzna w otoczeniu a_i. Całka

$$\int_{z_0}^{z} \frac{p_i}{\zeta - a_i} \mathrm{d}\zeta = p_i \left(\log(z - a_i) - \log(z_0 - a_i)\right) = p_i \log \frac{z - a_i}{z_0 - a_i},$$

więc

$$f(z) = \exp(p_i \log \frac{z - a_i}{z_0 - a_i}) \exp G_i(z) = (z - a_i)^{p_i} \frac{1}{(z_0 - a_i)^{p_i}} \exp G_i(z),$$

gdzie $G_i(z) = \int_{z_0}^{z} g(z)$. Funkcja $\dfrac{1}{(z_0 - a_i)^{p_i}} \exp G_i(z)$ jest różna od zera w a_i i holomorficzna w otoczeniu a_i, więc f ma w a_i zero rzędu p_i. ■

Niech $\Omega = \mathbb{C}$. Konstruując h jak w dowodzie twierdzenia Mittag-Lefflera mamy

$$h(z) = \sum_i \left(\frac{p_i}{z - a_i} - W_i(z) \right). \tag{3}$$

Oznaczając przez R_i całkę z W_i z warunkiem $R_i(z_0) = 0$, mamy

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{z - a_i}{z_0 - a_i} \right)^{p_i} e^{-R_i(z)} \right). \tag{4}$$

Wniosek 3. *Każda funkcja meromorficzna $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ jest ilorazem funkcji całkowitych.*

Dowód: Niech (b_i) będą biegunami funkcji f a (q_i) ich rzędami. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja całkowita h z zerami rzędu q_i w b_i. Funkcja $g = fh$ jest funkcją całkowitą, zatem $f = \dfrac{g}{h}$ jest ilorazem funkcji całkowitych. ■

Wniosek 4. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ nie mająca przedłużenia analitycznego poza Ω.*

Dowód: Wybierzmy ciąg $a_i \in \Omega$ taki, by nie miał on punktów skupienia w Ω, ale żeby każdy punkt z brzegu Ω był jego punktem skupienia. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja holomorficzna w Ω z zerami w punktach a_i. Gdyby funkcja f miała przedłużenie analityczne $\tilde{f}$, to pewien punkt $b \in \partial\Omega$ byłby w dziedzinie holomorficzności $\tilde{f}$. Punkt ten byłby też punktem skupienia zer $\tilde{f}$, zatem $\tilde{f}$ byłaby równa tożsamościowo zeru. ■

Jeżeli $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ nia ma przedłużenia holomorficznego poza Ω, to mówimy że Ω jest obszarem holomorficzności funkcji f. Ostatni wniosek można więc sformułować tak: każdy obszar w $\mathbb{C}$ jest obszarem holomorficzności pewnej funkcji.

2.8. Przykład. Funkcja $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ jest funkcją całkowitą z zerami w $a_n = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i każde zero ma krotność jeden. Jak w dowodzie twierdzenia Weierstrassa konstruujemy funkcję całkowitą $g(z)$ z zerami jak w funkcji f. W rozkładzie (4) wybierzmy $z_0 = 0$, więc $\left(\dfrac{z - a_n}{z_0 - a_n}\right)^{p_n} = 1 - \dfrac{z}{n\pi}$. W iloczynie (4) występuje też $1 + \dfrac{z}{n\pi}$, więc

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z^2}{(n\pi)^2}\right) e^{-R_n(z)} \right).$$

Szereg $\sum \dfrac{z^2}{(n\pi)^2}$ jest zbieżny bezwzględnie, więc można przyjąć $R_n = 0$. Zatem

$$f(z) = e^{h(z)} g(z) = e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n\pi)^2}\right), \qquad (5):$$

gdzie h jest funkcją całkowitą. Weźmy pochodne logarytmiczne stron równości (5) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = h'(z) + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2}, \qquad (6)$$

ale z rozkładu (2)

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2} \qquad (7),$$

więc porównując (6) i (7) dostajemy $h' = 0$. Ale $f(0) = 1 = e^h(0)$, więc $h = 0$. Ostatecznie

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n\pi)^2}\right). \qquad (8)$$

3. Funkcja gamma Eulera.

Rozpatrzmy całkę

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} \mathrm{d}t. \qquad (9)$$

Dla $z = x + iy$ mamy

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log t} = e^{iy \log t} e^{x-1} \log t = e^{iy \log t} t^{x-1},$$

więc całka jest zbieżna niemal jednostajnie na obszarze $x > 0$. Z różniczkowaniem możemy wejść pod znak całki, więc Γ jest w obszarze $x > 0$ holomorficzna. Całkując przez części dostajemy, dla $x > 0$,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t = z\Gamma(z), \qquad (10)$$

Relacja $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1)$ pozwala zdefiniować Γ w obszarze $x > -1,\ z \neq 0$ i, indukcyjnie, w $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Otrzymana funkcja jest holomorficzna, więc jest jedynym przedłużeniem analitycznym Φ z obszaru $x > 0$. Przy okazji,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t = 1,\ \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2,\ \dots,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

co powoduje, że funkcja Γ, zwana funkcją *gamma Eulera*, bywa uważana za uogólnienie silni. Jaką osobliwość ma Γ w $-k$? Przybliżając funkcję wykładniczą wielomianami na odcinku $[0,1]$ mamy, przy $\operatorname{Re} z > 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(e^{-t} - \sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!} t^k\right) t^{z-1} \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(\sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!} t^k\right) t^{z-1} \mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ostatnia całka zadaje funkcję całkowitą, pierwsza funkcję holomorficzną w obszarze $x > -n-1$, a środkowa jest rozszerzeniem

$$\int_0^1 \left(\sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!} t^k\right) t^{z-1} \mathrm{d}t = \sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}.$$

Zatem Γ ma tam takie same osobliwości jak

$$z \to \sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k},$$

czyli bieguny pierwszego rzędu z residuum $\frac{(-1)^k}{k!}$ w $-k$. Przechodząc do granicy $n \to \infty$ dostajemy, że Γ jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$ z biegunami pierwszego rzędu w $0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ i z $\mathrm{Res}_{-k}\,\Gamma = \frac{(-1)^k}{k!}$. W obszarze $-1 < x < 0$ funkcja Γ ma reprezentację całkową, analogiczną do (9):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = (e^{-t}-1)\frac{t^z}{z}\Big|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \int_0^\infty (e^{-t}-1)t^{z-1}\mathrm{d}t$$

i ogólniej, w obszarze $-1-n < x < -n$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(e^{-t} - \sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

3.1. Tożsamości dla funkcji gamma.

Stwierdzenie 2. *Dla* $\mathrm{Re}\, v > 0$ *i* $\mathrm{Re}\, u > 0$ *mamy tożsamość*

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Dowód: Korzystając z drugiej całki w definicji (9) mamy, używając współrzędnych biegunowych,

$$\begin{aligned}
\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2u-1}\mathrm{d}t \int_0^\infty e^{-s^2}s^{2v-1}\mathrm{d}s \\
&= 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2u+2v-1}\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\Gamma(u+v)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}\mathrm{d}\varphi \\
&= \Gamma(u+v)\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{12}$$

przy czym ostatnią równość dostaliśmy podstawiając $t = \cos^2\varphi$. ■

Stwierdzenie 3. *Zachodzi tożsamość*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \textit{w szczególności } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{13}$$

Dowód: Wystarczy wykazać pierwszą równość na obszarze $1 > \mathrm{Re}\, z > 0$. Z poprzedniego stwierdzenia, mamy w tym obszarze równość

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t = \Gamma(1)\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^z \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

Całką po prawej stronie może być obliczona metodą standardową (kontur 'dziurki od klucza'). Jeżeli na górnej 'kładce' mamy $\left(\frac{t}{1-t}\right)^z$ przy wyborze gałęzi głównej logarytmu, to na dolnej mamy $e^{-2z\pi i}\left(\frac{t}{1-t}\right)^z$, a granica $\left(\frac{t}{1-t}\right)^z$ przy $t \to \infty$ jest równa $e^{-z\pi i}$. Granica funkcji podcałkowej w ∞ jest równa zeru, więc jej residuum w ∞ jest równe granicy funkcji wymnożonej przez $-t$, zatem jest równe $-e^{-z\pi i}$. Stąd

$$(1-e^{-2z\pi i})\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t = 2\pi i e^{-z\pi i},$$

czyli

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

■

Stwierdzenie 4 (Wzór Legendre'a o podwajaniu).

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z). \tag{14}$$

Dowód: Ze Stwierdzenia 2

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t.$$

Podstawiamy $s = 4t(1-t)$ i otrzymujemy

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z}\int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = 2^{1-2z}\frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}$$

a stąd dowodzony wzór, bo $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ■

Funkcja gamma nie ma zer, więc jej odwrotność jest funkcją całkowitą z zerami pierwszego rzędu w $0, -1, -2, \ldots$. Można więc (Twierdzenie Weierstrassa, wzór (4)) przedstawić $\frac{1}{\Gamma}$ w postaci iloczynu $ze^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})\exp(-\frac{z}{n})$. Okazuje się, że funkcja g jest funkcją liniową.

Stwierdzenie 5 (Wzór Weierstrassa).

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})\exp(-\frac{z}{n}),$$

gdzie

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).$$

4. Funkcje i całki eliptyczne.

4.1. Okresy funkcji zespolonej. Funkcję f na $\mathbb{C}$ nazywamy *okresową o okresie* $\omega \in \mathbb{C}$, jeżeli $f(z+\omega) = f(z)$ dla każdego z. Jeżeli ω jest okresem, to wielokrotność ω też jest okresem. Ogólniej: kombinacja liniowa okresów, o współczynnikach całkowitych, też jest okresem. Z kolei suma, iloraz, iloczyn i pochodna funkcji o okresie ω są też funkcjami o okresie ω. Funkcja wykładnicza i pochodzące od niej funkcje trygonometryczne, hiperboliczne są przykładami holomorficznych funkcji okresowych na $\mathbb{C}$.
Uwaga! W dalszym ciągu słowo funkcja oznaczać będzie **funkcją holomorficzną z izolowanymi punktami osobliwymi**.

Stwierdzenie 6. *Jeżeli okresy funkcji f mają punkt skupienia, to f jest funkcją stałą.*

Dowód: Jeżeli ω_n są okresami f i $\omega_n \to \omega$, to ω też jest okresem f:

$$f(z+\omega) = \lim_{n\to\infty} f(z+\omega_n) = f(z),$$

więc zero też jest punktem skupienia okresów $\omega_n - \omega$. Przyjmijmy zatem, że $\omega_n \to 0$. Jeżeli z_0 jest punktem regularnym, to funkcja $f(z) - f(z_0)$ jest równa zero na ciągu $z_0 + \omega_n$. Zera tej funkcji mają punkt skupienia, więc funkcja jest równa zero. ■

Okres ω funkcji f nazywamy *fundamentalnym* jeżeli każdy okres f jest wielokrotnością ω lub $-\omega$. Funkcje posiadające okres fundamentalny nazywamy jednookresowymi. Przykładem funkcji jednookresowej jest funkcja wykładnicza.
Układ okresów $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ funkcji f nazywamy fundamentalnym, jeżeli

(1) każdy okres funkcji f jest całkowitoliczbową kombinacją $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$,
(2) układ ten jest minimalny, to znaczy żaden właściwy pozbiór $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ nie spełnia warunku (1).

Wybór okresów fundamentalnych nie jest jednoznaczny. Dla funkcji jednookresowej, jeżeli ω jest okresem fundamentalnym, to również $-\omega$ jest okresem fundamentalnym. Z kolei, jeżeli para (ω, ω') jest fundamentalnym układem okresów, to jest nim również para $(a\omega + b\omega', c\omega + d\omega')$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi i $ad - bc = \pm 1$.

Twierdzenie 3 (Jacobiego). *Warunkiem koniecznym, by układ $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ był fundamentalnym układem ukresów jest*

(1) $n = 1$ *lub* $n = 2$,
(2) *dla* $n = 2$ *iloraz* $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ *nie jest liczbą rzeczywistą.*

Dowód: Niech $P \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem okresów funkcji f i niech $0 \neq \omega \in P$. Wielokrotności ω leżą na pewnej prostej L i mamy dwie możliwości:

(1) wszystkie okresy funkcji f leżą na prostej L,
(2) nie wszystkie okresy funkcji f leżą na prostej L.

W pierwszym przypadku wszystkie okresy są postaci $t\omega$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Ponieważ okresy nie mają punktu skupienia, istnieje okres o najmniejszym module. Możemy przyjąć, że ω jest takim okresem, czyli $|t| \geqslant 1$. Przypuśćmy, że $(m+r)\omega$, gdzie m jest liczbą całkowitą i $|r| < 1$, jest okresem. Zatem okresem jest też $(m+r)\omega - m\omega = r\omega$. Ale $|r\omega| < |\omega|$, więc $r = 0$. zw jest jedynym okresem fundamentalnym, funkcja jest jednookresowa.
Niech teraz ω, ω' będą okresami i $\omega' \notin L$. W trójkącie o wierzchołkach w $0, \omega, \omega'$ mamy skończoną liczbę okresów. Jeżeli są to tylko zw i zw', to tworzą one fundamentalny układ okresów. Niech więc ω_1 będzie różnym od ω, ω' okresem. Możemy przyjąć, że $\omega_1 \neq L$ (w przeciwnym razie zamieniami rolami ω i zw'). W trójkącie $0, \omega, \omega_1$ mamy mniej okresów niż w trójkącie $0, \omega, \omega'$. Powtarzamy powyższą procedurę dla trójkąta $0, \omega, \omega_1$ itd. Po skończonej liczbie kroków dostajemy trójkąt, w którym jedynymi okresami są wierzchołki. Tworzą one fundamentalny układ okresów. ■

Funkcje z nietrywialnym okresem mogą więc być albo jednookresowe albo dwuokresowe. Meromorficzne funkcje dwuokresowe nazywane są *funkcjami eliptycznymi.* Funkcja dwuokresowa jest wyznaczona jednoznacznie przez swoje wartości w dowolnym równoległoboku okresowym, tj. równoległoboku postaci

$$\{z \,:\, z = z_0 + t\omega + s\omega', \quad 0 \leqslant s, t < 1\}.$$

Twierdzenie 4 (Liouville'a).

(1) *Funkcja eliptyczna ma bieguny.*

(2) *Funkcja eliptyczna ma zera.*
(3) *Niech f będzie funkcją eliptyczną i D domknięciem jej równoległoboku okresowego, bez biegunów na ∂D. Wówczas*

$$\int_{\partial D} f \mathrm{d}z = 0.$$

(4) *W każdym równoległoboku okresowym liczba zer (liczonych z krotnościami) jest równa liczbie biegunów (liczonych z krotnościami).*
(5) *Suma residuów funkcji eliptycznej w dowolnym równoległoboku okresowym jest równa zero.*
(6) *Niech f ma w punkcie z rząd m_z, tzn. m_z jest rzędem zera (bieguna) w punkcie z. Wówczas $\sum_z zm_z \in P$, gdzie sumowanie jest po punktach równoległoboku okresowego.*

Dowód:

(1) Dwuokresowa funkcja całkowita jest ograniczona, więc stała.
(2) Odwrotność funkcji eliptycznej jest funkcją eliptyczną, więc ma bieguny.
(3) Z okresowości f całki po przeciwległych bokach zerują się.
(4) Wybierzmy równoległobok okresowy D tak, by na jego brzegu nie było zer i biegunów. Z wzoru na liczbę zer i biegunów, w obszarze D

$$2\pi i(N_z - N_p) = \int_{\partial} \frac{f'}{f} \mathrm{d}z,$$

ale funkcja $\frac{f'}{f}$ jest też eliptyczna o okresach takich jak f, więc na mocy poprzednigo punktu całka jest równa zero.
(5) Całka z $f\mathrm{d}z$ po ∂D jest, z jednej strony, równa zero, a z drugiej strony sumie residuów w D.
(6) Zauwąmy, że funkcja $z\frac{f'}{f}$ ma bieguny pierwszego rzędu tam, gdzie f ma zera i bieguny i residuum w z jest równe zm_z.Zatem

$$\sum_z zm_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z\frac{f'}{f} \mathrm{d}z,$$

ale z okresowości f

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} z\frac{f'}{f}\mathrm{d}z - \int_{z_0+\omega'}^{z_0+\omega+\omega'} z\frac{f'}{f}\mathrm{d}z = -\omega' \int_{z_0}^{z_0+\omega} \frac{f'}{f}\mathrm{d}z = -\omega' \int_{z_0}^{z_0+\omega} \mathrm{d}\log f = 2\pi i k\omega',$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, bo $f(z_0) = f(z_0+\omega)$, więc wartości logarytmu różnią się o wielokrotność $2\pi i$. Podobnie mamy dla drugiej pary boków równoległoboku i stąd teza.

■

Z punktu (3) wynika natychmiast, że w obszarze D nie może być pojedyńczego bieguna rzędu pierwszego. Liczba biegunów, liczona z rzędami, musi być większa od 1.

4.2. Przyklady funkcji eliptycznych. Niech ω, ω' będą takie, że $\frac{\omega}{\omega'}$ nie jest liczbą rzeczywistą. Oznaczmy przez P zbiór wszystkich całkowitoliczbowych kombinacji ω i ω'. *Funkcja Weierstrassa* zdefiniowana jest wzorem

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq w\in P} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right). \tag{15}$$

Stwierdzenie 7. *Funkcja Weierstrassa jest funkcją eliptyczną z fundamentalnym układem okresów (ω, ω').*

DOWÓD: Mamy dla $|w| > 2|z|$ nierówność $|w - z| \geqslant ||w| - |z|| \geqslant \frac{1}{2}|w|$ i stąd

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| = \left|\frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2}\right| \leqslant \frac{4|z|(|z|+2|w|)}{|w|^4} \leqslant \frac{10|z|}{|w|^3}.$$

Szereg $\sum_{0\neq w\in P} \frac{1}{|w|^3}$ jest zbieżny. Istotnie, ponieważ $0, \omega, \omega'$ nie są współliniowe, to istnieje $a > 0$ takie, że $n\omega + n'\omega' \geqslant a(|n| + |n'|)$ dla wszystkich n, n'. Par (n, n') takich, że $|n| + |n'| = m$ jest $4m$, więc

$$\sum_{0\neq w\in P} \frac{1}{|w|^3} \leqslant 4a^{-3} \sum_{1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Zatem szereg (15) jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie ze względu na z. Funkcja $\wp$ jest dobrze określona i, jak łatwo zauważyć, parzysta: $\wp(-z) = \wp(z)$. Pozostaje wykazać jej okresowość. Mamy

$$\wp'(z) = -2\frac{1}{z^3} - \sum_{0\neq w\in P} \frac{2}{(z-w)^3} = -\sum_{w\in P} \frac{2}{(z-w)^3},$$

a suma po prawej stronie jest oczywiście funkcją dwuokresową z okresami ω, ω'. Zatem $\wp'(z+\omega) - \wp'(z)$ oraz $\wp'(z+\omega') - \wp'(z)$ są równe zero, czyli funkcje $z \mapsto \wp(z+\omega) - \pi(z)$ i $z \mapsto \wp(z+\omega') - \wp(z)$ są stałe. Z parzystości $\wp$ pierwsza funkcja w $-\frac{\omega}{2}$, a druga w $-\frac{\omega'}{2}$ przyjmują wartość zero. ■