1. Elementy logiki i teorii zbiorów.

„Na początku było słowo".

Dla nas na początku jest zdanie".

1.1. Rachunek zdań.

Załóżmy, że zdanie ma wartość logiczną

- 1 zdanie jest prawdziwe
- 0 " " nieprawdziwe

Mając zdanie (zdania) możemy zbudować z nich inne zdania.

- negacja (zaprzeczenie) $\sim p$, p'

p	0	1
$\sim p$	1	0

- alternatywa (suma logiczna) $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- koniunkcja (iloczyn logiczny) $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- implikacja (wynikanie) $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- równoważność $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Jeżeli zdanie złożone jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznej zdań, z których zostało zbudowane, to mamy do czynienia z tautologią (prawo rachunku zdań).

Przykłady tautologii:

- $p \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

$(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'$, $(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$ prawo de Morgana

Funkcje zdaniowe.

X – zbiór. Dla każdego $x \in X$ mamy przypisane zdanie $\varphi(x)$.

N.p. $X = \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) \equiv x > 2$

Funkcja zdaniowa φ wyróżnia podzbiór X

$$A = \{ x \in X : \varphi(x) = 1 \}$$

$\varphi(x)$ ma wartość logiczną 1.

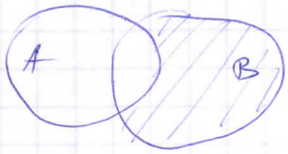
Jak i dla zdań, możemy budować z funkcji zdaniowych nowe:

$(\sim\varphi)(x) = \sim\varphi(x)$ $\qquad A^c$ – dopełnienie zbioru A

$(\varphi \wedge \psi)(x) = \varphi(x) \wedge \psi(x)$ $\qquad A \cap B$ – ~~suma~~ iloczyn zbiorów

$(\varphi \vee \psi)(x) = \varphi(x) \vee \psi(x)$ $\qquad A \cup B$ – suma zbiorów

$\varphi \Rightarrow \psi$ $\qquad A^c \cap B$



Prawa de Morgana: $\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Z funkcji zdaniowej możemy utworzyć zdanie

$\forall \quad \bigwedge_x \varphi(x)$ – dla każdego x $\varphi(x)$

$\exists \quad \bigvee_x \varphi(x)$ – istnieje x, że $\varphi(x)$

Przykład. $\quad \varphi(x) \equiv x > 2 \qquad \forall_x \varphi(x) = 0$

$\qquad \exists_x \varphi(x) = 1$

$\varphi(x) \equiv x > 6 \Rightarrow x > 2$

$(\forall x \; \varphi(x)) = 1$

Zapiszmy w sposób formuły twierdzenie:

Tw Każda liczba naturalna podzielna przez 6 jest podzielna przez 2.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} (6|n) \Rightarrow (2|n)$$

Tw Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy:

$$\forall T\subset \mathbb{N} \quad T\neq\emptyset \Rightarrow (\exists y\in T \quad \forall x\in T \quad y\leq x)$$

Pewne reguły wnioskowania (prawa rachunku zdań)

$$(p \wedge (p\Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

$$(\sim p \Rightarrow (q\wedge\sim q)) \Rightarrow p$$ (dowód nie wprost)

Narysujmy.

$p \sim A$

~~Paradoksy teorii mnogości.~~

Iloczyn kartezjański.

A, B - zbiory, $A\times B = \{(a,b) : a\in A \wedge b\in B\}$

(Zbiór uporządkowanych par).

Różnica zbiorów $A\setminus B = A\cap B^c$

Różnica symetryczna $A \div B = A\setminus B \cup B\setminus A$

Funkcje, odwzorowania, relacje.

$R : X \longrightarrow Y$ $\qquad$ xRy

Dziedzina $\qquad$ przeciwdziedzina

$A \subset X \qquad R(A) = \{y \in Y : \exists_{x \in A} \text{ że } xRy\}$

$R^t \; (R^{-1}) : Y \longrightarrow X$ - relacja transponowana!

$yR^t x \equiv xRy$

Obraz relacji $\quad R(X)$

Przeciw-obraz relacji $\quad R^t(Y)$

Odwzorowania (funkcje) -
- przeciwobraz relacji jest całym X
- $\forall x \in X \quad R(x)$ jest zbiorem jednopunktowym.

Specjalne rodzaje funkcji.
- injekcja (różnowartościowe): $x_1 \neq x_2 \Rightarrow R(x_1) \neq R(x_2)$
- surjekcja $\quad R(X) = Y$
- bijekcja - injekcja i surjekcja.

Składanie relacji.

$R : X \longrightarrow Y, \quad S : Y \longrightarrow Z$

$S \circ R : X \longrightarrow Z$

$x(S \circ R)z \equiv \exists y \in Y$, że xRy i ySz

— Równoliczność - liczby kardynalne.

Przykłady: liczba naturalna

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0$

$\mathbb{Q}$ " " wymiernych $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$

Inaczej mówiąc, liczby wymierne można ustawić w ciąg.

~~Relacje równoważności~~,

Wykres relacji – podzbiór $X \times Y$

$G_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in X \times Y : \ x \mathcal{R} y\}$

często utożsamia się relację z jej wykresem.

Relacje równoważności.

$\mathcal{R} : X \longrightarrow X$ (dziedzina i przeciw-dziedzina są równe)

jest relacją równoważności, jeżeli:

1) $\forall_{x \in X} \quad x \mathcal{R} x$ (zwrotność)

2) $\forall_{(x,y)} \ x \mathcal{R} y \Longrightarrow y \mathcal{R} x$ (symetria)

3) $\forall_{(x,y,z)} \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Longrightarrow x \mathcal{R} z$ (przechodniość)

Relacja równoważności dzieli podział zbioru X na rozłączne „klasy abstrakcji".

$x \in X$, to $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X : x \mathcal{R} y\}$

Fakty:

1) $y \in [x]$, to $x \in [y]$ (z symetrii) i $[x] = [y]$

2) klasy abstrakcji (klasy równoważności) są rozłączne, czyli $[x] = [y]$ lub $[x] \cap [y] = \emptyset$

Dowód: Niech $z \in [x] \cap [y]$ tzn. $x \mathcal{R} z$ i $y \mathcal{R} z$

Z symetrii $z \mathcal{R} y$ i z przechodniości $x \mathcal{R} y$, czyli $[x] = [y]$.

Przykład. Relacja równoliczności jest relacją równoważności. Klasa równoważności tej relacji – liczba kardynalna.

Np: $0, 1, 2, \ldots$ ~~$\aleph_0$~~ $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$ – continuum, liczba kardynalna zbioru liczb rzeczywistych