Wykłady, dziesiąty tydzień.

EKSTREMA LOKALNE

Wiemy już, że warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie, w którym funkcja jest różniczkowalna, jest zerowanie się pochodnej. Poszukiwanie warunku dostatecznego zaczynamy od następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $f'(x) > 0$, to istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $0 < h < \delta$ mamy*

$$f(x+h) > f(x), \quad f(x-h) < f(x).$$

Jeżeli $f'(x) < 0$, to istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $0 < h < \delta$ mamy

$$f(x+h) < f(x), \quad f(x-h) > f(x).$$

Dowód. Wystarczy udowodnić pierwszą część Stwierdzenia. Niech więc $f'(x) > 0$. Z definicji pochodnej $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(x,h)$, gdzie $\frac{r(x,h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$. Istnieje zatem $\delta > 0$ takie, że $|r(x,h)| < f'(x)|h|$ dla $|h| < \delta$. Stąd $f(x+h) - f(x) \geqslant f'(x)h - |r(x,h)| > 0$ i $f(x-h) - f(x) \leqslant -f'(x)h + |r(x,-h)| < 0$ dla $0 < h < \delta$.■

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na I i różniczkowalna na $I \setminus \{x\}$.*
Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie że $f'(x+h) > 0$ i $f'(x-h) < 0$ dla $0 < h < \delta$, to funkcja f ma minimum w x.
Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie że $f'(x+h) < 0$ i $f'(x-h) > 0$ dla $0 < h < \delta$, to funkcja f ma maksimum w x.

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w x i $f'(x) = 0$, $f''(x) \neq 0$, to f ma w x ekstremum lokalne. Minimum gdy $f''(x) > 0$ i maksimum gdy $f''(x) < 0$.*

Twierdzenie 4. *Niech $f^{(k)}(x) = 0$ dla $k = 1, \ldots, n-1$ i niech $f^{(n)}(x) \neq 0$. Jeżeli n jest nieparzyste, to f jest monotoniczna w punkcie x. Jeżeli n jest parzyste, to funkcja f ma w x ekstremum (minimum dla $f^{(n)}(x) > 0$ i maksimum dla $f^{(n)}(x) < 0$).*

Powyższe stwierdzenie nie wyczerpuje wszystkich możliwości. Może się bowiem zdarzyć, że wszystkie pochodne w x są równe zeru i badając je nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy funkcja f ma w punkcie x ekstremum lokalne.

FUNKCJE WYPUKŁE

Funkcję $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* na $]a,b[$, jeżeli dla dowolnych $x, x' \in]a,b[$ i $\theta \in [0,1]$ mamy

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(x'),$$

zaś *wklęsłą*, jeżeli

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \geqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(x').$$

Natychmiastowy wniosek z tych definicji: funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $-f$ jet wklęsła. Wystarczy więc zająć się w dalszym ciągu tylko funkcjami wypukłymi.

Twierdzenie 5. *Funkcja f jest wypukła na $]a,b[$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego, skończonego podzbioru $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset]a,b[$ i dla dowolnej rodziny liczb $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$ takiej, że $\sum_i \theta_i = 1$, mamy*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \theta_i f(x_i).$$

Twierdzenie 6. (1) *Funkcja f jest wypukła na $]a,b[$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów $x_1 < x_2 < x_3$ z $]a,b[$ mamy nierówność*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

(2) *Funkcja* f *jest wypukła na* $]a,b[$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów* $x_1 < x_2 < x_3$ *z* $]a,b[$ *mamy nierówność*

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(3) *Funkcja* f *jest wypukła na* $]a,b[$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów* $x_1 < x_2 < x_3$ *z* $]a,b[$ *mamy nierówność*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

Wniosek 1. Jeżeli funkcja f jest wypukła na $]a,b[$, to istnieją granice (*lewo- i prawostronne pochodne*):

$$f'_+ = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_- = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ponadto $f'_+ \geqslant f'_-$.

Wystarczy zauważyć, że funkcja $h \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jest monotoniczna i ograniczona, a stąd (podobnie jak dla ciągów) wynika istnienie granicy (kres górny wartości).

Wniosek 2. Funkcja wypukła na odcinku otwartym jest ciągła. Założenie otwartości odcinka jest istotne. Funkcja wypukła na odcinku domkniętym może być nieciągła na jego brzegu.

W przypadku funkcji różniczkowalnej mamy proste kryterium wypukłości.

Twierdzenie 7. (1) *Funkcja różniczkowalna na* $]a,b[$ *jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest funkcją niemalejącą.*

(2) *Funkcja dwukrotnie różniczkowalna na* $]a,b[$ *jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej druga pochodna jest nieujemna.*