Wykłady, drugi tydzień.

Liczby naturalne $\mathbb{N}$: Definicje jak na Algebrze (patrz materiały dostępne na stronie P. M. Hajaca). W uzupelnieniu Zasada Indukcji:

Fakt 1. Jeżeli $A \subset \mathbb{N}$ taki, że $1 \in A$ i mamy wynikanie $(k \in A) \Rightarrow (k+1 \in A)$, to $A = \mathbb{N}$.

Fakt ten stosowany jest w dowodach indukcyjnych:

Jeżeli $\varphi \colon n \mapsto \varphi(n)$ jest funkcją zdaniową na $\mathbb{N}$, $\varphi(1)$ jest prawdą i $\varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1)$, to $\varphi(n)$ jest prawdą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

liczby wymierne $\mathbb{Q}$: Definicja i podstawowe własności jak na algebrze. Mówiąc po ludzku zbiór liczb wymiernych jest zbiorem wszystkich ułamków zwykłych. Opiszmy teraz strukturę tego zbioru:

(1) *W zbiorze $\mathbb{Q}$ określone jest dodawanie i mnożenie.* (i) Dodawanie jest przemienne $p+q = q+p$, łączne $(p+q)+r = p+(q+r)$, ma element neutralny 0 taki, że $p+0 = p$ i każdy element q ma element przeciwny p taki, że $p+q = 0$, p oznaczamy $-q$. Wszystkie te warunki dotyczące dodawania można zapisać w skrócie $(\mathbb{Q}, +)$ jest grupą przemienną. (ii) Mnożenie też jest przemienne $pq = qp$, łączne $(pq)r = p(qr)$, ma element neutralny 1 taki, że $1p = p$ i każdy różny od zera element $q \in \mathbb{Q}$ ma odwrotność, tzn istnieje p takie, że $pq = 1$. Takie p oznaczamy p^{-1}, albo $\frac{1}{p}$. Innymi słowy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ jest grupą przemienną. (iii) Działania dodawania i mnożenia są zgodne, tzn. zachodzi warunek rozdzielności mnożenia względem dodawania.
$$p(q+r) = pq + pr$$
(iv) Ponadto $1 \neq 0$. Warunki i-iv oznaczają, że $\mathbb{Q}$ jest ciałem.

(2) Zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo, tzn. mamy relacje „$\leq$" o następujących własnościach (i) każde dwa elementy są porównywalne, (ii) jeśli $p \leq q$ i $q \leq p$ to $p = q$.

(3) Dodawanie i mnożenie są zgodne z porządkiem, tzn (i) dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$ jeśli $p \leq r$ to $p+q \leq p+r$, ponadto (ii) dla nieujemnych p i q zachodzi $pq \geq 0$.

(4) Spełniony jest aksjomat Archimedesa:
$$\forall\, a > 0 \;\; \forall\, b \geq 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad b \leq na.$$

Powyższe cztery własności ma także zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jest jednak istotna różnica między tymi zbiorami: $\mathbb{Q}$ jest dziurawe:

Fakt 2. Nie istnieje liczba wymierna p taka, że $p^2 = 2$.

W miejscu przeznaczonym na rozwiązanie tego równania jest istotna dziura! Definiujemy dwa zbiory
$$A = \{q \in \mathbb{Q} : \; q > 0 \;\text{ i }\; q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : \; q \leq 0\}, \qquad B = \{q \in \mathbb{Q} : \; q > 0 \;\text{ i }\; q^2 > 2\}$$
Zbiory te są rozłączne, a ich suma daje całe $\mathbb{Q}$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$.

Definicja 1. *Zbiór $X \subset \mathbb{Q}$ nazywamy ograniczonym z góry (z dołu) jeśli istnieje liczba wymierna M (m) taka, że dla każdego $p \in X$ zachodzi $p \leq M$ $(p \geq m)$. Liczbę M (m) nazywamy ograniczeniem górnym (ograniczeniem dolnym) zbioru X. Zbiór, który jest ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym.*

Zbiór A jest ograniczony z góry, a zbiór B z dołu. Ponadto każdy element zbioru A jest ograniczeniem dolnym B i odwrotnie każdy element zbioru B jest ograniczeniem górnym A.

Fakt 3. W A nie ma elementu największego, w B nie ma elementu najmniejszego.

Oznacza to, że między zbiorami A i B jest istotna dziura. Wypełnienie tych dziur to istota konstrukcji zbioru $\mathbb{R}$.

Definicja 2. *Podzbiór D zbioru liczb wymiernych nazywamy przekrojem (Dedekinda), jeśli*

(1) *$D \neq \emptyset$ i $D \neq \mathbb{Q}$;*

(2) *jeśli $p \in D$ i $q < p$ to $q \in D$;*

(3) *w D nie ma elementu największego*

Jeśli D jest postaci $D = \{p \in \mathbb{Q} : \ p < r_0\}$ dla pewnego $r_0 \in \mathbb{Q}$ to D nazywamy przekrojem głównym i oznaczamy D_{r_0}.

A jest przekrojem, ale nie głównym. W zbiorze wszystkich przekrojów wprowadzamy relację porządku i operacje dodawania i mnożenia w następujący sposób:

Definicja 3. *Niech D_1, D_2 będą przekrojami, jeśli istnieje liczba wymierna q taka, że $q \in D_2$ i $q \notin D_1$, to mówimy, że $D_1 < D_2$. Piszemy $D_1 \leq D_2$ jeśli $D_1 < D_2$ lub $D_1 = D_2$.*

Niech teraz

$$D_1 + D_2 = \{p \in \mathbb{Q} : \ \ p = a + b \text{ i } a \in D_1, b \in D_2\}$$

Należy pokazać, że $D_1 + D_2$ jest przekrojem oraz, że tak wprowadzone dodawanie spełnia wszystkie potrzebne warunki.

Dla $D_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$ definiujemy zbiór

$$D_1 D_2 = \{p \in \mathbb{Q} : \ p \leq 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : p = ab, \ a \in D_1, a > 0, b \in D_2, b > 0 \ \}$$

Należy pokazać, że $\alpha\beta$ jest przekrojem. Definicja mnożenia przekrojów różnego znaku wymaga nieco więcej pracy.

Zbiór przekrojów zbioru liczb wymiernych wyposażony w dodawanie i mnożenie oznaczamy $\mathbb{R}$ i nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych. W tym zbiorze nie ma już takich dziur. Np. $A = \sqrt{2}$.

Własności zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$:

(1) $\mathbb{R}$ jest ciałem;
(2) Istnieje relacja porządkując $\leq$;
(3) Relacja $\leq$ jest zgodna z działaniami dodawania i mnożenia (tak jak dla liczb wymiernych).

Teraz podstawowe twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Każdy przekrój zbioru liczb rzeczywistych jest główny.*

Dowód: Niech α będzie przekrojem zbioru liczb rzeczywistych. Przypomnijmy sobie, że każda liczba rzeczywista jest przekrojem zbioru liczb wymiernych. Umówmy się, że liczbę rzeczywistą x będziemy oznaczać na dwa sposoby: x gdy traktujemy ją jak liczbę a $\tilde{x}$ gdy traktujemy ją jak przekrój zbioru liczb wymiernych, czyli jako pewien zbiór. Liczby wymierne odpowiadają przekrojom głównym liczb wymiernych a liczby niewymierne przekrojom nie-głównym. Czyli w szczególności jeśli $q \in \mathbb{Q}$ to

$$\tilde{q} = \{p \in \mathbb{Q} : \ \ p < q\}$$

Oznaczmy α_Q zbiór $\alpha \cap \mathbb{Q}$. Pokażemy najpierw, że zbiór α_Q jest przekrojem zbioru $\mathbb{Q}$.

(1) Uzasadniamy, że $\alpha_{\mathbb{Q}}$ jest niepusty: zbiór α jest niepusty, więc zawiera jakąś liczbę x a wraz z nią wszystkie mniejsze od niej, wśród tych mniejszych jest całe mnóstwo wymiernych. Uzasadniamy, że nie $\alpha_{\mathbb{Q}}$ jest on całym zbiorem $\mathbb{Q}$: α jest ograniczony z góry, zatem $\alpha_{\mathbb{Q}}$ też jest ograniczony z góry.

(2) Drugi warunek w definicji przekroju liczb wymiernych mówi, że jeśli p należy do przekroju, to także każda liczba wymierna mniejsza od p też do niego należy. Sprawdźmy czy tak jest w przypadku $\alpha_{\mathbb{Q}}$: Niech p będzie liczbą wymierną należącą do α_Q, i niech $q \in \mathbb{Q}$ i $q < p$. Wtedy $q \in \alpha$ (bo α jest przekrojem), a skoro $q \in \mathbb{Q}$ to także $q \in \alpha_{\mathbb{Q}}$.

(3) Pokażemy teraz, że w $\alpha_{\mathbb{Q}}$ nie ma elementu największego. Załóżmy *ad absurdum*, że p_0 jest największym elementem $\alpha_{\mathbb{Q}}$. Oczywiście $p_0 \in \alpha$, zatem istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x > p_0$ i $x \in \alpha$. Pamiętajmy, że x jest liczbą rzeczywistą czyli przekrojem liczb wymiernych. Ponieważ $p_0 < x$ to $p_0 \in \tilde{x}$. Z własności liczby x jako przekroju wynika, że istnieje $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $q > p_0$ i $q \in \tilde{x}$, bo w $\tilde{x}$ nie ma elementu największego. Skoro $q \in \tilde{x}$ (x jako przekrój) to także $q < x$ (x jako liczba) i zatem $q \in \alpha$. Znaleźliśmy więc w przekroju α liczbę wymierną większą od p_0. Jest to sprzeczne z założeniem, że p_0 jest największą liczbą w $\alpha_{\mathbb{Q}}$.

Udowodniliśmy, że $\alpha_{\mathbb{Q}}$ jest przekrojem. Jako przekrój zbioru liczb wymiernych definiuje on pewną liczbę rzeczywistą. Oznaczmy tę liczbę rzeczywistą x_0. Pokażemy, że

$$\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < x_0\}.$$

Niech x będzie dowolnym elementem α. Jako liczba rzeczywista x jest reprezentowany przekrojem liczb wymiernych. $\tilde{x}$ zawarty jest w α_Q zatem jako liczby $x \leq x_0$. Czy może być $x = x_0$? Nie, bo wtedy x_0 byłoby największym elementem α. Istotnie, jeśli $y > x_0$ i $y \in \alpha$ to (traktujemy x_0 i y jako przekroje liczb wymiernych) istnieje wymierne q takie, że $q \in \tilde{y}$ i $q \in \tilde{x}_0$. Ale skoro $y \in \alpha$ to $y \subset \alpha_{\mathbb{Q}}$, zatem $y \leq x_0$. Mamy więc sprzeczność.

W ten sposób pokazaliśmy, że każda liczba rzeczywista należąca do α jest ostro mniejsza niż x_0. $\square$

Własności 1-3 oraz powyższe twierdzenie można przyjąć jako aksjomaty liczb rzeczywistych. Trzeba tylko wyjaśnić, jaka jest istota relacji $\leq$.

Definicja 4. Zbiór A wraz z relacją $\preceq$ nazywamy *zbiorem uporządkowanym*, jeżeli spełnione są następujące warunki

(1) $a \preceq a$ dla każdego $a \in A$ (zwrotność),
(2) jeżeli $a \preceq b$ i $b \preceq a$ to $a = b$ (antysymetria),
(3) jeżeli $a \preceq b$ i $b \preceq c$ to $a \preceq c$ (przechodniość),
(4) dla dowolnych $a, b \in A$ mamy $a \preceq b$ lub $b \preceq a$ (lub jedno i drugie).

Mając relację porządkującą możemy zdefiniować przekroje Dedekinda.

Przekrojem Dedekinda zbioru uporządkowanego $(A, \preceq)$ nazywamy niepusty podzbiór D zbioru A taki, że

(1) jeżeli $a \in D$ i $b \preceq a$, to $b \in D$,
(2) D nie ma elementu maksymalnego.

Każdy element $x \in A$ wyznacza przekrój Dedekinda zbioru A:

$$D_x = \{a \in A \colon a \prec x\}.$$