Wykłady, trzeci tydzień.

Definicja 1. *Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry (z dołu) jeśli istnieje liczba rzeczywista M (m) taka, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \leq M$ $(x \geq m)$. Liczbę M (m) nazywamy ograniczeniem górnym (ograniczeniem dolnym) zbioru X. Zbór, który jest ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym.*

Definicja 2. *Kresem górnym (dolnym) zbioru $X \subset \mathbb{R}$ ograniczonego z góry nazywamy najmniejsze (największe) ograniczenie górne (dolne).*

Twierdzenie 1. *Każdy niepusty ograniczony z góry (z dołu) podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny (dolny).*

Dowód: Dowodzimy istnienia kresu górnego zbioru ograniczonego z góry. Dowód dla przypadku „dolnego" jest analogoczny. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Niech D_+ oznacza zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru A natomiast $D_- = \mathbb{R} \setminus D_+$. Warunek $x \in D_-$ zapisujemy słowami: „x nie jest ograniczeniem górnym zbioru A", co jest równoważne sformułowaniu: „istnieje $a \in A$ takie, że $a > x$". Pokażemy, że D_- jest przekrojem zbioru $\mathbb{R}$:

(1) A jest niepusty, weźmy zatem dowolny element $a \in A$. Wszystkie liczby $x < a$ nie są ograniczeniami górnymi A zatem należą do D_-. Zbiór μ_- jest więc niepusty. Zbiór D_- nie jest też równy $\mathbb{R}$, bo A ma przynajmniej jedno ograniczenie górne;

(2) Jeśli $x \in D_-$, to innymi słowy x nie jest ograniczeniem górnym A. Każda liczba $y < x$ także nie jest ograniczeniem górnym A zatem $y \in D_-$;

(3) załóżmy, że w D_- jest element największy, oznaczmy go x_0. Skoro x_0 nie jest ograniczeniem górnym A to istnieje $a \in A$ takie, że $x_0 < a$. Wówczas liczba $\frac{x_0+a}{2}$ jest mniejsza od a zatem nie jest ograniczeniem górnym A i jednocześnie jest większa od x_0, czyli x_0 nie jest największym elementem D_-.

Każdy przekrój $\mathbb{R}$ jest główny zatem D_- jest postaci $\{x \in \mathbb{R} : x \leq M_0\}$ i $M_0 \notin D_-$. Zatem $M_0 \in D_+$ i M_0 jest najmniejszym elementem D_+, czyli kresem górnym A.$\square$

Definicja 3. *Ciągiem o wartościach w zbiorze A nazywamy odwzorowanie $x : \mathbb{N} \to A$.*

Dla ciągów obowiązuje nieco inna notacja niż dla pozostałych odwzorowań. Zamiast pisać $x(n)$ piszemy x_n. Samo zaś odwzorowanie x oznaczamy $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ lub po prostu (x_n). W dalszym ciągu rozważać będziemy ciągi o wartościach rzeczywistych.

Definicja 4. *Ciąg liczbowy (x_n) nazywamy zbieżnym do $g \in \mathbb{R}$ jeśli*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n > N \;\; |x_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy

$$g = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Liczbę g nazywamy granicą ciągu.

Fakt 1. *Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę, tzn. jeśli g i g' są granicami ciągu x_n to $g = g'$.*

Fakt 2. *Liczba g jest granicą ciągu (x_n) wtedy i tylko wtedy, kiedy w każdym odcinku otwartym zawierającym g są prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n).*

„Prawie wszystkie" oznacza „wszystkie poza (być może) skończoną liczbą".

Fakt 3. *Zbiór wyrazów ciągu zbieżnego jest ograniczony.*

Fakt 4. *Operacje na ciągach zbieżnych: niech* $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0$;
(2) $\lim_{n\to\infty}(cx_n) = cx_0$ *dla* $c \in \mathbb{R}$;
(3) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = x_0 y_0$;
(4) *jeśli dla wszystkich* n $x_n \neq 0$ *i* $x_0 \neq 0$ *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_0}{x_0}$;
(5) *jeśli dla wystarczająco dużych* n $x_n \leq c$ *to* $x_0 \leq c$ *dla* $c \in \mathbb{R}$, *ponadto jeśli nawet nierówność* $x_n < c$ *jest ostra, to nierówność dla granicy musi być nieostra;*
(6) *jeśli dla wystarczająco dużych* n $x_n \leq y_n$ *to* $x_0 \leq y_0$, *ponadto przechodzenie do granicy „łagodzi" nierówność, tzn. jeśli* $x_n < y_n$ *to także* $x_0 \leq y_0$.

Twierdzenie 2. *(O trzech ciągach) Jeśli* (x_n), (y_n), (a_n) *będą ciągami takimi, że*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$$

oraz istnieje $N \in \mathbb{N}$ *takie, że dla wszystkich* $n > N$ *zachodzi*

$$x_n \leq a_n \leq y_n$$

to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

Definicja 5. *Ciąg* x_n *nazywamy rosnącym jeśli dla wszystkich* n *zachodzi* $x_{n+1} \geq x_n$. *Jeśli nierówność jest ostra to ciąg nazywamy ściśle rosnącym. Ciąg* x_n *nazywamy malejącym jeśli dla wszystkich* n *zachodzi* $x_{n+1} \leq x_n$. *Jeśli nierówność jest ostra to ciąg nazywamy ściśle malejącym. Ciągi rosnące i ciągi malejące określamy wspólnie jako monotoniczne.*

Twierdzenie 3. *(O ciągach monotonicznych i ograniczonych) Jeśli ciąg* (x_n) *jest od pewnego miejsca rosnący i ograniczony z góry to jest zbieżny. Jeśli ciąg* (x_n) *jest od pewnego miejsca malejący i ograniczony z dołu to jest zbieżny.*

Dowody powyższych faktów i twierdzeń znajdziecie w 'zielonej książeczce' "Analiza 1".
Przykładowe ciągi:

Ćwiczenie: Zbadać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $x_n = \sqrt[n]{n}$. Funkcja $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ jest rosnąca, zatem z nierówności $1 \leq n$ wynika $1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n}$. Oznaczmy $y_n = x_n - 1$, wtedy $y_m \geq 0$. Mamy więc dla $n > 2$:

$$n = x_n^n = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \binom{n}{2} y_n^2 + \binom{n}{3} y_n^3 + \cdots$$

Z powyższego rozwinięcia bierzemy tylko trzeci wyraz:

$$n \geq \binom{n}{2} y_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} y_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$$

Co po przekształceniach daje

$$y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Ostatecznie dla ciągu x_n i $n > 2$ mamy nierówność:

$$1 \leq x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ćwiczenie: Zbadać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{a}$ dla $a > 0$. Zaczynamy od $a > 1$. Mamy wtedy $a_n > 1$ i dla wystarczająco dużych n

$$a < n \quad \text{zatem także} \quad a_n = \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$$

i z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Jeśli $a < 1$ to $\frac{1}{a} > 1$ i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$$

Zatem także

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Ćwiczenie: Zbadać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Pokażemy najpierw, że ciąg e_n jest rosnący.

Niech $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Ze wzoru na potęgę dwumianu

$$(1) \quad a_n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n^n} >$$
$$1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n-1}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n-1})(1 - \frac{2}{n-1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n-1}) + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{n-1}}$$
$$= a_{n-1}.$$

Ciąg (a_n) jest więc rosnący. Ze wzoru na potęgę dwumianu mamy również, że

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Korzystaliśmy tu z nierówności $k! > 2^{k-1}$. Ciąg jest zatem ograniczony i rosnący, więc zbieżny. Jego granicę oznacza się symbolem e i nazywana *podstawą logarytmów naturalnych.* e jest liczbą niewymierną. Jej wartość w przybliżeniu to $e \simeq 2,7182818284590\ldots$.

Ciągi Cauchy'ego. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_\epsilon\ \forall\ n, m > n_\epsilon \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Jak widać z definicji, pojęcie ciągu Cauchy'ego odwołuje się tylko do odległości między wyrazami ciągu. Przypomnijmy, że w definicji zbieżności występował punkt graniczny g, na ogół nie należący do ciągu.

(1) Ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
(2) Pokazuje się, że każdy ciąg Cauchy'ego w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest zbieżny.
(3) W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, nie każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.
(4) Ponieważ każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych, możemy liczby rzeczywiste definiować jeko klasy równoważności ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych.