Wykłady, czwarty tydzień.

Definicja 1. *Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia ciągu (x_n) jeśli*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, N \in \mathbb{N}: \;\; \exists\, n > N \;\; |x_n - g| < \varepsilon$$

Inaczej mówiąc, w przedziale $]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$ mamy nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

Fakt 1. *Ciąg zbieżny ma dokładnie jeden punkt skupienia. Jest nim granica ciągu.*

Definicja 2. *Podciągiem ciągu (x_n) nazywamy ciąg (y_n), gdzie $y_n = x_{\varphi(n))}$ i odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest injekcją zachowująca porzadek, tzn. dla $m > n$ mamy $\varphi(m) > \varphi(n)$.*

Fakt 2. *Liczba g jest punktem skupienia ciągu (x_n) wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego podciągu ciągu (x_n).*

Fakt 3. *Dla ciągu ograniczonego zbiór punktów skupienia jest też ograniczony.*

Definicja 3. *Kres górny (dolny) zbioru punktów skupienia ciągu ograniczonego nazywamy granicą górną (dolną) ciągu.*

Granicę górną ciągu (x_n) oznaczać będziemy $\overline{\lim}\, x_n$ lub $\limsup x_n$. Granicę dolną ciągu (x_n) oznaczać będziemy $\underline{\lim}\, x_n$ lub $\liminf x_n$.

Twierdzenie 1. *Dla granic górnej i dolne mamy wzory*

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim b_n, \;\; \textit{gdzie } b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\},$$
$$\underline{\lim}\, x_n = \lim c_n, \;\; \textit{gdzie } c_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Z wzorów tych wynika, że

(1) granica dolna i granica górna są granicami podciągów, czyli są punktami skupienia ciągu;
(2) zbiór punktów skupiania ciągu (ograniczonego) jest niepusty.

Jeszcze kilka faktów o ciągach.

Twierdzenie 2. *(Stolza) Niech (b_n) będzie ciągiem ściśle rosnacym i nieograniczonym. Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że ciąg $\left(\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right)$ jest ciągiem zbieżnym do g.*

Wówczas ciąg $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ jest ciągiem zbieżnym do g.

Przykłady:

(1) Średnie arytmetyczne ciągu zbieżnego dążą do tej samej granicy;
(2) Granica $\frac{1^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ jest równa $\frac{1}{p+1}$;
(3) Niech (a_n) będzie zbieżny do $g \neq 0$ i niech $a_n \neq 0$. Ciąg średnich arytmetycznych też jest zbieżny do g. Ciąg $(\dfrac{1}{a_n})$ jest zbieżny do $\dfrac{1}{g}$, więc ciąg średnich harmonicznych

$$n \mapsto \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

jest zbieżny do g. Ze znanej nierówności

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

i z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy, że ciąg średnich geometrycznych

$$n \mapsto \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

jest zbieżny do g.