Wykłady, piąty tydzień.

W definicjach granicy ciągu, ciągu Cauchy'ego, punkty skupienia ciągu istotna była tylko 'odległość' między wartościami ciągu, czyli między liczbami. Sensownie jest więc rozpatrywać sytuację ogólną, gdy wartości ciągu należą do przestrzeni, w której możemy mówić o odległosci między punktami.

Definicja 1. Metryką *na zbiorze X nazywamy funkcję $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:*

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$ *dla wszystkich $x, y \in X$,*
(2) $\rho(x,y) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,*
(3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *dla wszystkich $x, y \in X$,*
(4) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ *dla wszystkich $x, y, z \in X$ ("nierówność trójkąta").*

Prykład metryki: $X = \mathbb{R}$ i $\rho(x,y) = |x-y|$.

Korzystając z tej metryki, możemy wprowadzić metrykę w $\mathbb{R}^2$ na różne sposoby:

$$\rho_\circ((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

$$\rho_\diamond((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|,$$

$$\rho_\Box((x,y),(x',y')) = \max\{|x-x'|, |y-y'|\}.$$

Metryki te są równoważne w następującym sensie:

Definicja 2. *Dwie metryki ρ i σ na przestrzeni X nazywamy* równoważnymi*, jeżeli istnieją liczby c i d takie, że*

$$\rho(x,x') \leqslant c\sigma(x,x') \quad \textit{oraz} \quad \sigma(x,x') \leqslant d\rho(x,x')$$

dla wszystkich par $(x,x') \in X \times X$.

Definicje granicy ciągu, ciągu Cauchy'ego i punktu skupienia ciągu wyglądaja jak w przypadku ciągów liczbowych:

Definicja 3. *Ciąg (x_n) nazywamy zbieżnym do $g \in X$ jeśli*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N}: \;\; \forall\, n > N \;\; \rho(x_n, g) < \varepsilon$$

Piszemy

$$g = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Ciąg (x_n) nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall\, \epsilon > 0 \; \exists\, n_\epsilon \; \forall\, n, m > n_\epsilon \;\; \rho(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definicja 4. *$x \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia ciągu (x_n) jeśli*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, N \in \mathbb{N}: \;\; \exists\, n > N \;\; \rho(x_n, g) < \varepsilon$$

Fakt 1. *Ciąg zbieżny ma dokładnie jeden punkt skupienia. Jest nim granica ciągu.*

Przestrzeń metryczną nazywamy *zupełną*, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Fakt 2. *Liczba g jest punktem skupienia ciągu (x_n) wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą pewnego podciągu ciągu (x_n).*

Oczywistym jest, że w równoważnych metrykach ciągi zbieżne, ciągi Cauchy'ego, punkty skupienia itp są takie same.

Podobnie, jak w przypadku $\mathbb{R}^2$, wprowadzamy metryki (równoważne) w iloczynie kartezjańskim dwóch przestrzeni metrycznych (X,ρ) i (Y,σ):

$$\rho_\circ((x,y),(x',y')) = \sqrt{\rho(x,x')^2 + \sigma(y,y')^2},$$

$$\rho_\diamond((x,y),(x',y')) = \rho(x,x') + \sigma(y,y'),$$

$$\rho_{\Box}((x,y),(x',y')) = \max\{\rho(x,x'),\sigma(y,y')\}.$$

Definicja 5. Kulą *(otwartą) o środku w $x \in X$ i promieniu r nazywamy zbiór*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \colon \rho(x_0, x) < r\}$$

Definicja 6. Kulą domkniętą *o środku w $x \in X$ i promieniu r nazywamy zbiór*

$$\bar{K}(x_0, r) = \{x \in X \colon \rho(x_0, x) \leqslant r\}$$

Definicja 7. *Punkt $x \in A$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru $A \subset X$, jeżeli istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r) \subset A$. Podzbiór punktów wewnętrznych zbioru A nazywamy* wnętrzem A *i oznaczamy* $\operatorname{Int} A$.

Jeżeli $A = \operatorname{Int} A$, to mówimy, że zbiór A jest *otwarty* w X.

Twierdzenie 1.
(1) *Zbiór pusty $\emptyset$ i cała przestrzeń X są zbiorami otwartymi.*
(2) *Kula otwarta jest zbiorem otwartym.*
(3) *Wnętrze dowolnego zbioru jest zbiorem otwartym.*
(4) *Jeżeli O i U są zbiorami otwartymi, to również $O \cap U$ jest zbiorem otwartym.*
(5) *Dla dowolnej rodziny $(O_\iota)_{\iota \in I}$ zbiorów otwartych suma $\bigcup_{\iota \in I} O_\iota$ jest zbiorem otwartym.*
(6) *Zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą mnogosciową kul (otwartych).*
(7) $\operatorname{Int} A$ *jest największym zbiorem otwartym, zawartym w A.*
(8) $\operatorname{Int} A$ *jest sumą wszystkich zbiorów otwartych, zawartych w A.*

Definicja 8. *Punkt $x \in X$ nazywamy* punktem skupienia *zbioru $A \subset X$, jeżeli dla każdego $r > 0$ istnieje punkt $x_r \in K(x, r)$ taki, że $x \neq x_r$ i $x_r \in A$. Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczać będziemy A^d.*

Przykład: W przestrzeni dyskretnej (odległość ma wartość 0 albo 1) zbiór punktów skupienia każdego zbioru jest pusty.

Definicja 9. *Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy* domkniętym, *jeżeli zawiera swoje punkty skupienia: $A^d \subset A$.*

Z tej definicji wynika, że jeżeli A jest zbiorem domkniętym i $x \in X \setminus A$, to x jest punktem wewnętrznym $X \setminus A$. Stąd wniosek, że A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus A$ jest otwarty.

Twierdzenie 2.
(1) *Zbiór pusty $\emptyset$ i cała przestrzeń X są zbiorami domkniętymi.*
(2) *Kula domknięta jest zbiorem domkniętym.*
(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup A_d$.
(4) *Jeżeli A i B są zbiorami domkniętymi, to również $A \cup B$ jest zbiorem otwartym.*
(5) *Dla dowolnej rodziny $(A_\iota)_{\iota \in I}$ zbiorów domkniętych przecięcie $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ jest zbiorem domkniętym.*

Zbiór $A \cup A^d$ nazywamy *domknięciem* zbioru A i oznaczamy $\overline{A}$.
Uwaga: bywa, że domknięcie kuli otwartej jest mniejsze od kuli domkniętej o tym samym promieniu.

Twierdzenie 3.
(1) *Zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdu $A = \overline{A}$.*
(2) *Kula domknięta jest zbiorem domkniętym.*
(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup A_d$.
(4) *Jeżeli $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
(5) *Dla dowolnejgo zbioru A jego domknięcie $\overline{A}$ jest zbiorem domkniętym.*
(6) $\overline{A}$ *jest najmniejszym zbiorem domkniętym, zawierającym A.*
(7) $\overline{A}$ *jest przecięciem wszystkich zbiorów domkniętych, zawierających A.*
(8) $\overline{A}$ *jest zbiorem granic ciągów o wyrazach w A.*

(9) *Zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wszystkie granice ciągów o wyrazach w A.*

I jeszcze ważna uwaga. Jeżeli ρ i σ są dwiema równoważnymi metrykami na X, to zbiory otwarte (domknięte) względem jednej metryki są otwarte (domknięte) względem drugiej. Nie jest prawdą stwierdzenie przeciwne. W $X = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ metryka indukowana z $\mathbb{R}$ i metryka dyskretna (zero-jedynkowa) nie są równoważne, ale dają te same zbiory otwarte (każdy podzbiór X jest otwarty).

Definicja 10. *Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy* ograniczonym, *jeżeli*

$$\forall\ x \in X\ \exists\ \mathbb{R} \ni r_x > 0 \text{ takie, że } A \subset K(x, r_x).$$

W powyższej definicji kwantyfikator $\forall$ można zastąpić kwantyfikatorem $\exists$. Istotnie, jeżeli dla pewnego $x_0 \in X$ i pewnego r mamy $A \subset K(x_0, r)$, to dla dowolnych $x \in X$ i $a \in A$ mamy z nierówności trojkąta

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < \rho(x, x_0) + r.$$

Zatem $a \in K(x, r_x)$, $r_x = \rho(x, x_0) + r$ i w konsekwencji, $A \subset K(x, r_x)$.