Wykłady, szósty tydzień.

Definicja 1. *Zbiór $A \subset X$ nazywamy otoczeniem punktu $x \in X$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ), jeżeli istnieje $r > 0$ takie, że $A \supset K(x, r)$, tzn. jeżeli x jest punktem wewnętrznym zbioru A.*

Zwróćmy uwagę, że w tej definicji otoczenie punktu nie musi być otwarte. W szczególności kule domknięte są otoczeniami środka kuli. Rodzinę wszystkich otoczeń punktu x oznaczać będziemy $\mathfrak{A}(x)$. Z definicji otoczenia wynika natychmiast, że jeżeli $A \in \mathfrak{A}(x)$ i $A \subset B$, to $B \in \mathfrak{A}(x)$. Ponadto przecięcie skończonej liczby otoczeń punktu x jest otoczeniem tego punktu.

Twierdzenie 1. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem przestrzeni metrycznej (X, ρ) w przestrzeń metryczną (Y, σ) i niech $x_0 \in X$. Poniższe cztery warunki są równoważne:*

(1) $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ *takie, /ze* $(\rho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon)$,
(2) $\forall\ U \in \mathfrak{A}(f(x_0))\ \exists\ O \in \mathfrak{A}(x_0)$ *takie, że* $f(O) \subset U$,
(3) $\forall\ U \in \mathfrak{A}(f(x_0))\quad f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}(x_0)$,
(4) *dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x_0)$.*

Definicja 2. *Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest* ciągłe *w x_0 jeżeli zachodzi jeden z warunków wymienionych w Twierdzeniu.*

Odwzorowanie f jest *ciągłe na zbiorze $A \subset X$* jeżeli jest ciągłe w każdym $x \in A$.
W przypadku $A = X$ mamy ważną charakterystykę odwzorowań ciągłych.

Twierdzenie 2. *Odwzorowanie f jest ciągłe na X wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym.*

Fakt 1. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłe w x_0 i niech $g\colon Y \to Z$ będzie ciągłe w $f(x_0)$. Wówczas odwzorowanie $g \circ f\colon X \to Z$ jest ciągłe w x_0.*

Przykłady odwzorowań ciągłych.

(1) Niech $a \in Y$. Odwzorowanie stałe $f\colon X \to Y\colon x \mapsto a$ jest ciągłe.
(2) Odwzorowanie tożsamościowe $f\colon X \to X\colon x \mapsto x$ jest ciągłe.
(3) W iloczynie kartezja/nskim $X \times Y$ wprowadzamy standardowo metrykę. Odwzorowania
 (a) $pr_X\colon X \times Y \to X\colon (x, y) \mapsto x$,
 (b) $pr_Y\colon X \times Y \to Y\colon (x, y) \mapsto y$,
 są ciągłe.
(4) W przypadku $X = Y$ odwzorowanie diagonali Δ_X
 $\Delta_X\colon X \to X \times X\colon x \mapsto (x, x)$ jest ciągłe.
(5) Metryka, czyli odwzorowanie $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ jest ciągłe.

Działania arytmetyczne w $\mathbb{R}$ są ciągłe, a stąd wynika, że suma, iloczyn, iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. W szczególności, funkcje wymierne na $\mathbb{R}$ sa ciągłe tam, gdzie są określone.

Definicja 3. *Punkt $y \in Y$ nazywamy* granicą odwzorowania f *w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ \textit{takie, że}\ \ f(K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset K(y, \epsilon).$$

Piszemy $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Fakt 2. *Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest ciągłe w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy f ma granicę w x_0 i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

W przypadku, gdy X jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}$: $X = \emptyset \subset \mathbb{R}$, to dla dostatecznie małych δ zbi/or $K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ składa się z dwóch odcinków otwartych: $]x_0 - \delta, x_0[$ i $]x_0, x_0 + \delta[$. Jest więc sens mówic o granicach jednostronnych odwzorowania w punkcie. Mówimy, że $y \in Y$ jest *granicą lewostronną* odwzorowania f w punkcie x_0, jeżeli

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ \text{takie, że}\ \ f(]x_0 - \delta, x_0[) \subset K(y, \epsilon)$$

i piszemy $y = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$. Podobnie, $y \in Y$ jest *granicą prawostronną* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ odwzorowania f w punkcie x_0, jeżeli

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ \text{takie, że}\ \ f(]x_0, x_0 + \delta[) \subset K(y, \epsilon).$$

Odwzorowanie $f\colon \mathbb{R} \supset \emptyset \to Y$ ma granicę w x_0, jeżeli ma w tym punkcie równe sobie granice lewo- i prawostronną.

Definicja 4. *Zbiór K nazywamy* zwartym, *gdy każdy ciąg o wartościach w K ma punkt skupienia zawarty w K.*

Twierdzenie 3.
(1) *Zbiór zwarty jest ograniczony.*
(2) *Zbiór zwarty jest domknięty.*
(3) *Podzbiór domknięty zbioru zwartego jest zbiorem zwartym.*
(4) *Skończona suma zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym.*
(5) *Iloczyn kartezjański zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym.*
(6) *Jeżeli $K \subset Y \subset X$ i $\sigma = \rho|_{Y\times Y}$, to K jest zwarty w (X, ρ) wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty w (Y, σ).*

Pokażemy, że odcinek domknięty $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jest zwarty. Istotnie, ciąg o wyrazach w $[a, b]$ jest ograniczony, więc ma punkt skupienia w $\mathbb{R}$. Odcinek $[a, b]$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}$, więc punkt skupienia należy do $[a, b]$. Z Twierdzenia mamy, że iloczyn kartezjański odcinków domkniętych jest zbiorem zwarty. Każdy zbiór ograniczony w $\mathbb{R}^n$ zawarty jest w pewnym iloczynie kartezjańskim odcinków domknietych. Mamy więc ważny

Fakt 3. *Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i domknięty.*

Uwaga. Twierdzenie, że odcinek $[a, b]$ jest zbiorem zwartym znane jest w literaturze jako Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.