Wykłady, siódmy tydzień.

WŁASNOŚCI ODWZOROWAŃ CIĄGŁYCH NA ZBIORACH ZWARTYCH.

Twierdzenie 1. *Niech $\varphi\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym na X i niech $K \subset X$ będzie zbiorem zwartym. Wówczas jego obraz $\varphi(K)$ też jest zwarty.*

Stąd natychmiastowy wniosek:

Fakt 1. *Funkcja ciągła $f\colon X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni zwartej jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

Twierdzenie 2. *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią zwartą i niech $\varphi\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym i bijekcją. Wówczas $\varphi^{-1}\colon Y \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym (mówimy, że φ jest homeomorfizmem).*

DOWÓD. Mamy pokazać, że obraz $\varphi(U)$ zbioru otwartego $U \subset X$ jest zbiorem otwartym. Ponieważ zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest domknięte, wystarczy pokazaćc, że obraz zbioru domkniętego jest domknięty. Ale zbiór domknięty D w przestrzeni zwartej jest zwarty, a obraz zbioru zwartego przy odwzorowaniu ciągłym jest zwarty, zatem $\varphi(D)$ jest zbiorem zwartym, więc domkniętym. □

Poniższy przykład ilustruje istotność założenia zwartości w tym stwierdzeniu.

Przykład. Niech $X = [0, 2\pi[$ i $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$. Odwzorowanie

$$[0, 2\pi[\ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in S^1$$

jest ciągłą bijekcją, ale nie homeomorfizmem, bo dla $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$ mamy $\varphi(x_n) \to \varphi(0)$.

Definicja 1. *Odwzorowanie $\varphi\colon X \to Y$ nazywamy* jednostajnie ciągłym *na zbiorze $A \subset X$, jeżeli $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ takie, że $\forall\, x \in A$ oraz*

$$\forall\, x' \in X \quad (\rho(x, x') < \delta) \Rightarrow (\sigma(\varphi(x), \varphi(x')) < \epsilon).$$

Twierdzenie 3. *Niech $\varphi\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem, ciągłym na zbiorze zwartym $K \subset X$. Wówczas φ jest jednostajnie ciągłe na K.*

DOWÓD. Przypuśćmy, że φ nie jest jednostajnie ciągłe na K, czyli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $\forall\, \delta > 0\ \exists x \in K,\ x' \in X$ takie, że $\rho(x, x') < \delta$ oraz $\sigma(\varphi(x), \varphi(x')) \geqslant \epsilon$.

Istnieją więc ciągi $(x_n), (x'_n)$, gdzie $x_n \in K,\ x'_n \in X$, takie, że $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ oraz $\sigma(\varphi(x_n), \varphi(x'_n)) \geqslant \epsilon$. Ze zwartości K ciąg (x_n) ma punkt skupienia $x \in K$, więc i ciąg (x'_n) ma w x punkt skupienia. Znaczy to że oba ciągi mają podciągi (x_{n_k}) i (x'_{n_k}), zbieżne do x. Z ciągłości φ dostajemy, że ciągi $\varphi(x_{n_k})$ i $\varphi(x'_{n_k})$ są zbieżne do $\varphi(x)$. Sprzeczność, bo $\sigma(\varphi(x_{n_k}), \varphi(x'_{n_k})) > \epsilon$ i podciągi te nie mogą mieć wspólnej granicy. □

ZBIORY (PRZESTRZENIE)SPÓJNE

Definicja 2. *Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest* niespójny*, jeżeli istnieją niepuste zbiory A_1, A_2 takie, że*

(1) $A = A_1 \cup A_2$,
(2) $\overline{A_1} \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$.

Zbiór nazywamy spójnym, jeżeli nie jest niespójny.

Fakt 2. *Niech $A \subset Y \subset X$ i niech $\sigma = \rho|_{Y \times Y}$. Zbiór A jest niespojny w (X, ρ) wtedy i tylko wtedy, gdy jest niespójny w (Y, σ).*

W szczególności możemy wziąć $Y = A$.

Twierdzenie 4.

Przestrzeń (X, ρ) jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niepuste zbiory otwarte X_1, X_2 takie, że $X = X_1 \cup X_2$ i $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

DOWÓD.

(1) "$\Longrightarrow$" Niech $X = X_1 \cup X_2$, gdzie zbiory X_1, X_2 są niepuste i niech $\overline{X_1} \cap X_2 = \emptyset$, czyli $X_2 = X \setminus \overline{X_1}$. Ale zbi/or $\overline{X_1}$ jest domknięty, więc $X_2 = X \setminus \overline{X_1}$ jest zbiorem otwartym. Podobnie zbiór X_1 jest otwarty.

(2) "$\Longleftarrow$" Niech $X = X_1 \cup X_2$, gdzie $X_1,\ X_2$ są zbiorami otwartymi. Zbiór $X_1 = X \setminus X_2$ jest też domknięty, czyli $\overline{X_1} = X_1$ i $\overline{X_1} \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Podobnie $\overline{X_2} \cap X_1 = X_2 \cap X_1 = \emptyset$. □

Twierdzenie 5. $A \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem spójnym wtedy i tylko wtedy, gdy* A *jest przedziałem.*

DOWÓD.

$\Longrightarrow$ (Lemat Darboux)

Niech $a < c < b$ i niech $a, b \in A$. Pokażemy, że $c \in A$. Gdyby bowiem $c \notin A$, to zbiory $A_1 = \{x \in A \colon x < c\}$ i $A_2 = \{x \in A \colon x > c\}$ dawałyby rozkład $A = A_1 \cup A_2$ taki, że $\overline{A_1} \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Ponieważ A_1 i A_2 są niepuste ($a \in A_1, b \in A_2$) oznaczałoby to, że A jest niespójny. Zatem $c \in A$, czyli A jest przedziałem.

$\Longleftarrow$

Niech A będzie przedziałem i niech $A = A_1 \cup A_2$ będzie rozkładem takim, że $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ i $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Niech $a \in A_1,\ b \in A_2$. Przypuśśmy, że $a < b$. Zdefiniujmy

$$c = \sup\{x \in \mathbb{R} \colon b \geqslant x,\ x \in A_1\}.$$

Oczywiście $c \in \overline{A_1}$ oraz $c \in \overline{A_2}$. Ponieważ $[a, b] \subset A$ (A jest przedziałem), więc $c \in A_1$ lub $c \in A_2$, a stąd $\overline{A_1} \cap A_2 \neq \emptyset$ lub $\overline{A_2} \cap A_1 \neq \emptyset$. A nie jest niespójny. □

Twierdzenie 6. *Niech* $A \subset X$ *będzie zbiorem spójnym i niech* $\varphi \colon X \to Y$ *będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas* $\varphi(A)$ *jest też zbiorem spojnym.*

Wnioski:

(1) Niech $X = Y = \mathbb{R}$. Z twierdzenia mamy, że obraz przedziału przy odwzorowaniu ciągłym jest przedziałem. Ponieważ obraz zbioru zwartego jest zwarty, to obraz odcinka domkniętego jest odcinkiem domkniętym, a obraz dowolnego odcinka odcinkiem.

(2) Własność Darboux funkcji ciągłych.
Niech $Y = \mathbb{R}$ i niech liczby $a < c < b$ będą takie, że $a, b \in \varphi(A)$. Wówczas istnieje punkt $x \in A$ taki, /ze $\varphi(x) = c$ (funkcja ciągła na zbiorze spójnym przyjmuje wartości pośrednie.)

(3) Niech funkcja $f \colon]a, b[\ \to \ ]c, d[$ będzie ciągłą bijekcją. Wówczas f^{-1} jest też funkcją ciągłą.

ZASADA BANACHA

Definicja 3. *Odwzorowanie* $\varphi \colon X \to X$ *nazywamy* zbliżającym*, jeżeli istnieje liczba* $q < 1$ *taka, że* $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant q\rho(x, y)$ *dla wszystkich* $x, y \in X$.

Oczywiste, że q jest liczbą nieujemną i że odwzorowanie zbliżające jest ciągłe.

Twierdzenie 7. *(zasada Banacha) Odwzorowanie zbliżające w przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały, tzn. dokładnie jeden punkt* x_0 *taki, że* $\varphi(x_0) = x_0$.

DOWÓD.

Niech x_1 b/edzie dowolnym punktem w X. Konstruujemy ciąg (x_n) indukcyjnie, kładąc $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Mamy stąd i z nierówności trojkąta

$$\begin{aligned}(1)\quad \rho(x_n, x_{n+k}) &\leqslant q^{n-1}\rho(x_1, x_{k+1}) \leqslant q^{n-1}(\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_k, x_{k+1})) \\ &\leqslant q^{n-1}\rho(x_1, x_2)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}) = q^{n-1}\frac{1 - q^k}{1 - q}\rho(x_1, x_2) \leqslant q^{n-1}\frac{\rho(x_1, x_2)}{1 - q},\end{aligned}$$

czyli ciąg (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, więc jest zbieżny (przestrzeń jest zupełna). Oznaczmy $x_0 = \lim x_n$. Z ciągłosci $\lim \varphi(x_n) = \varphi(x_0)$, ale $\varphi(x_n) = x_{n+1}$, wi/ec $\lim \varphi(x_n) = x_0$. $\varphi(x_0) = x_0$.

Załóżmy, że również dla punktu y_0 mamy $\varphi(y_0) = y_0$. Zatem

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) \leqslant q\rho(x_0, y_0),$$

a stąd $\rho(x_0, y_0) = 0$ i $x_0 = y_0$.$\square$

Zasada Banacha stanowi potężne narzędzie przy dowodzeniu istnienia rozwiązań równań. W semestrze drugim zastosujemy ją przy dowodzie twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych.