Wykłady, ósmy tydzień.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Niech I będzie otwartym przedziałem w $\mathbb{R}$ i niech $f\colon I \to \mathbb{R}$.

Definicja 1. *Mówimy, że funkcja f jest* różniczkowalna *w $x \in$, jeżeli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, ze*

$$f(x+h) = f(x) + a \cdot h + r_f(x,h),$$

gdzie r_f spełnia warunek $\lim_{h\to 0} \dfrac{r_f(x,h)}{h} = 0$. Inaczej mówiąc, funkcja $h \mapsto \dfrac{r(x,h)}{h}$ ma granicę w zerze i ta granica jest równa zero.

Jeżeli liczba a, o której mowi definicja istnieje, to jest ona wyznaczona jednoznacznie. Terminologia:

(1) "-" a nazywamy *pochodną funkcji f* w punkcie x i oznaczamy $f'(x)$,

(2) "-" $r(x,h)$ nazywamy resztą. Ogólnie, *resztą* nazywamy funkcję $w(h)$ taką, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{w(h)}{h} = 0.$$

(3) "-" ah nazywamy wartością różniczki funkcji f dla przyrostu argumentu h i oznaczamy często $\mathsf{d}f(x;h)$ lub $\mathsf{d}f(x)h$.

(4) "-" Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in A \subset I$, to mówimy, że f jest *różniczkowalna na A*.

Twierdzenie 1. *Funkcja różniczkowalna w punkcie x jest ciągła w tym punkcie.*

Twierdzenie 2. *Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Granica ta jest równa pochodnej $f'(x)$.

REGUŁY RÓŻNICZKOWANIA

Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x. Wówczas

(1) Suma funkcji $f+g$ jest różniczkowalna w x i $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(2) Iloczyn funkcji fg jest różniczkowalny w x i

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Wzór ten znany jest pod nazwą *reguły Leibniza.*

(3) Jeżeli $f(y) \neq 0$ dla $y \in I$, to $\dfrac{1}{f}$ jest funkcją różniczkowalną w x i

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

(4) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w x i funkcja g jest różniczkowalna w $f(x)$, to funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna w x i

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

PODSTAWOWE TWIERDZENIA

Definicja 2. *Mówimy, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni metrycznej (X,ρ) ma w punkcie x* ekstremum lokalne*, jeżeli istnieje $r > 0$ takie, że $\forall\, y \in K(x,r)$ $f(x) \geqslant f(y)$ (maksimum lokalne) lub $\forall\, y \in K(x,r)$ $f(x) \leqslant f(y)$ (minimum lokalne).*

Twierdzenie 3. *Jeżeli $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x i ma w x ekstremum lokalne, to $f'(x) = 0$.*

Twierdzenie 4. (Darboux) *Jeżeli* f *jest różniczkowalna na* $[a, b] \subset I$ *i* $f'(a) \neq f'(b)$*, to dla każdej liczby* α *zawartej między* $f'(a)$ *i* $f'(b)$*, istnieje* $c \in]a, b[$ *takie, że* $f'(c) = \alpha$*.*

Własność, o której mówi twierdzenie (funkcja na odcinku przyjmuje wszystkie wartości pośrednie) nosi nazwę *własności Darboux*. Mówimy, że pochodna ma własność Darboux. Własność taką mają również funkcje ciągłe

Twierdzenie 5. (Rolle'a) *Niech funkcja* f *będzie ciągła na odcinku* $[a, b]$ *i różniczkowalna w* $]a, b[$*. Je/zeli* $f(a) = f(b)$*, to istnieje* $c \in]a, b[$ *takie, że* $f'(c) = 0$*.*

Twierdzenie 6. (Lagrange'a) *Niech funkcja* f *będzie ciągła na odcinku* $[a, b]$ *i różniczkowalna w* $]a, b[$*. Istnieje* $c \in]a, b[$ *takie, że*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Twierdzenie 7. (o funkcji odwrotnej) *Jeżeli* $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna i dla każdego* $x \in]a, b[$ *mamy* $f'(x) \neq 0$*, to istnieje różniczkowalna funkcja odwrotna* f^{-1} *i* $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$*.*

Twierdzenie 8. (wzór Cauchy'ego) *Niech* f, g *będą funkcjami ciągłymi na* $[a, b]$ *i różniczkowalnymi na* $]a, b[$*. Istnieje* $c \in]a, b[$ *takie, że*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$