Wykłady, dziewiąty tydzień.

WZÓR TAYLORA

Zbiór funkcji różniczkowalnych k razy na I i takich, że k-ta pochodna jest funkcją ciągłą na I oznaczamy $\mathcal{C}^k(I)$. Jeeli $f \in \mathcal{C}^k(I)$, to mówimy że funkcja f jest k-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły na I lub, że jest klasy $\mathcal{C}^k$ na I.

Niech $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$ i załóżmy, że $f^{(n)}$ istnieje na odcinku $]a, b[$, gdzie $a, b \in I$ (przypomnijmy, że I jest przedziałem). Zdefiniujmy funkcj/e $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Funkcja ta jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $]a, b[$ oraz

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Wynika stąd, że dla dowolnego naturalnego k funkcja

$$\Phi_k(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-x)^k$$

spełnia załżenia twierdzenia Rolla dla odcinka $[a, b]$ i w konsekwencji istnieje $\xi \in]a, b[$ takie, że

$$\Phi'(\xi) = 0 = -\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) + \frac{k\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-\xi)^{k-1}.$$

Stąd

$$\varphi(a) = \frac{(b-a)^k}{(n-1)!k}(b-\xi)^{n-k} f^{(n)}(\xi).$$

Kładąc $x = a$ i $h = b - a$ dostajemy **wzór Taylora**

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_{n-1}(x, h),$$

gdzie

$$R_{n-1}(x, h) = \frac{h^k}{k(n-1)!}(x+h-\xi)^{n-k} f^{(n)}(\xi)$$

jest *resztą w postaci Schlömlicha*. Często zapisuje się też ξ w postaci $\xi = x + \theta h$, $\theta \in]0, 1[$.

Szczególne przypadki:

Dla $k = n$ dostajemy

$$R_{n-1}(x, h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

resztę w postaci Lagrange'a.

Dla $k = 1$ dostajemy

$$R_{n-1}(x, h) = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

resztę w postaci Cauchy'ego.

Przykład. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Wzór Taylora dla $x = 1$ wygląda tak:

$$f(1+h) = 1 + \binom{\alpha}{1} h + \binom{\alpha}{2} h^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n-1} h^{n-1} + R_{n-1}(1, h),$$

gdzie $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Zapisując resztę w postaci Lagrange'a mamy

$$R_{n-1}(1, h) = \binom{\alpha}{n} \left(\frac{h}{1+\theta h}\right)^n (1+\theta h)^\alpha.$$

REGUŁY de l'HOSPITALA

Twierdzenia, o których teraz będzie mowa są wykorzystywane przy obliczaniu granic funkcji. Tradycyjnie twierdzenia te zwane są regułami.

Twierdzenie 1. (pierwsza reguła dla odcinka) *Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnymi na $]a, b[$ i niech*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+0} g(x).$$

Załóżmy ponadto, że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad L \in \overline{\mathbb{R}}$$

(L może być równe $\pm\infty$), to istnieje granica $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest równa L.

Twierdzenie 2. (pierwsza reguła dla przedziału nieskończonego) *Niech f, g będą funkcjami rżniczkowalnymi na $]a, \infty[$ i niech*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x).$$

Załóżmy ponadto, że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, \infty[$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad L \in \overline{\mathbb{R}}$$

(L może być równe $\pm\infty$), to istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest równa L.

Twierdzenie 3. (druga reguła dla odcinka) *Załóżmy, że funkcje f, g są różniczkowalne na $]a, b[$ i $g'(x) \neq 0, \quad x \in]a, b[$. Niech ponadto*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty = \lim_{x\to a+0} g(x).$$

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad L \in \overline{\mathbb{R}},$$

to istnieje granica $\lim_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest równa L.

Mamy też, podobnie jak w przypadku pierwszej reguły, drugą regułę dla przedziału nieskończonego