Wykład pierwszy.

CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

Niech X będzie dowolnym zbiorem i niech (Y, σ) będzie przestrzenią metryczną. Ciąg (T_n) odzorowań, $T_n\colon X \to Y$, jest *zbieżny punktowo* do odwzorowania T, $T \xrightarrow{p.} T$, jeżeli ciąg $T_n(x)$ jest zbieżny do $T(x)$ dla każdego $x \in X$:

$$\forall\, x\, \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, n_{x,\epsilon} \text{ takie, że } n > n_{x,\epsilon} \;\Rightarrow\; \sigma(T_n(x), T(x)) < \epsilon.$$

Ciąg (T_n) odzorowań, $T_n\colon X \to Y$, jest *zbieżny jednostajnie* do odwzorowania T, $T \xrightarrow{j.} T$, jeżeli

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, n_\epsilon \text{ takie, że } n > n_\epsilon \;\Rightarrow\; \sigma(T_n(x), T(x)) < \epsilon \forall\, x.$$

Inaczej mówiąc, $T \xrightarrow{j.} T$, jeżeli ciąg liczbowy

$$n \mapsto \sup_{x \in X} \sigma(T_n(x), T(x))$$

jest zbieżny do zera. Oczywistym jest, że ze zbieżności jednostajnej wynika zbieżność punktowa.
Przykład. Ciąg funkcji $f_n(x) = x^n,\;\; x \in [0,1]$, jest zbieżny punktowo do funkcji $f(x) = 0,\; x \in [0,1[,\; f(1) = 1$, ale nie jednostajnie.

Twierdzenie 1. *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na $[a,b]$, zbieżnym jednostajnie do funkcji f. Wowczas f jest funkcją całkowalną i*

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

DOWÓD. Niech n_ϵ będzie takie, że $\sup |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ dla $n > n_\epsilon$. Dla dowolnego podziału π przedziału $[a,b]$ i dla $n > n_\epsilon$ mamy nierówności

$$\sup_{x\in P_i} f(x) \leqslant \sup_{x\in P_i} f_n(x) + \epsilon, \quad \inf_{x\in P_i} f(x) \geqslant \inf_{x\in P_i} f_n(x) - \epsilon,$$

i stąd

$$\overline{S}(\pi, f_n) + \epsilon(b-a) \geqslant \overline{S}(\pi, f) \geqslant \underline{S}(\pi, f) \geqslant \underline{S}(\pi, f_n) - \epsilon(b-a).$$

Z tych nierówności i z całkowalności f_n dostajemy

$$\int_{[a,b]} f_n + \epsilon(b-a) \geqslant \overline{\int}_{[a,b]} f \geqslant \underline{\int}_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} f_n - \epsilon(b-a).$$

W konsekwencji

$$\overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f \leqslant 2\epsilon(b-a)$$

dla dowolnego ϵ, czyli f jest całkowalna. Z nierówności

$$\int_{[a,b]} f_n + \epsilon(b-a) \geqslant \int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} f_n - \epsilon(b-a)$$

mamy równość

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n. \;\; \square$$

Twierdzenie 2. *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły na $[a,b[$ i niech ciąg pochodnych (f_n') będzie zbieżnym jednostajnie do funkcji g. Jeżeli istnieje $x_0 \in [a,b]$ takie, że ciag $g_n(x_0)$ jest zbieżny, to ciąg (g_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji różniczkowalnej g i $g' = f$.*

DOWÓD.
Z twierdzenia podstawowego rachunku różniczkowego i całkowego mamy

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathsf{d}\varphi + f_n(x_0)$$

i, na mocy poprzedniego twierdzenia, (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathsf{d}\varphi + \lim f_n(x_0).$$

Funkcja f jest granicą jednostajną funkcji ciągłych, więc jest ciągła. Z twierdzenia podstawowego wynika różniczkowalność g i równość $g' = f$. $\square$

Ponieważ funkcje o wartościach liczbowych (i ogólniej – wektorowych) można dodawać, jest sens mówić o szeregach funkcyjnych i o zbieżności takich szeregów: jednostajnej i punktowej, zwykłej i bezwzględnej. Tak więc szeregiem funkcyjnym na przestrzeni X jest para $((f_n), (S_n))$, gdzie (f_n) jest ciągiem funkcji, zaś (S_n) jest ciągiem sum częściowych (S_n jest też funkcją na X)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Szereg jest zbieżny jednostajnie (punktowo), jeżeli ciąg (funkcyjny) sum częściowych (S_n) jest zbieżny jednostajnie (punktowo). Wiele twierdzeń dotyczących szeregów liczbowych ma swoje odpowiedniki dla szeregów funkcyjnych.

Twierdzenie 3. (Kryterium Weierstrassa) *Niech $\sum f_n$ będzie szeregiem funkcyjnym na przestrzeni X. Jeżeli istnieje zbieżny szereg liczbowy $\sum a_n$ taki, że*

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leqslant a_n,$$

to szereg $\sum f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie.

DOWÓD.
Mamy

$$\left|\sum_{1}^{n+m} f_k(x) - \sum_{1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{n+1}^{n+m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{n+1}^{n+m} a_n.$$

Ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika więc zbieżność jednostajna ciągu sum częściowych szeregu $\sum f_n$. $\square$

SZEREGI POTĘGOWE

Ważną klasę szeregów funkcyjnych na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ stanowią szeregi potęgowe, to znaczy szeregi $\sum_0^\infty f_n$, dla których $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$, gdzie $c_n, z_0 \in \mathbb{C}$.
Oznaczmy

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

($R = \infty$ jeżeli $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$). Z kryterium Cauchy'ego dla szeregów o wyrazach dodatnich dostajemy, że szereg
$\sum_0^\infty |c_n||z - z_0|^n$ jest zbieżny dla $|z - z_0| < R$ i rozbieżny dla $|z - z_0| > R$ (dla $|z - z_0| = R$ bywa różnie).

Twierdzenie 4. *Jeżeli szereg $\sum_0^\infty c_n(z - z_0)^n$ jest zbieżny dla $z = a$, to szereg ten jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w kole $|z - z_0| \leqslant r < |a - z_0|$.*

DOWÓD.
Ze zbieżności szeregu $\sum_0^\infty c_n(a - z_0)^n$ wynika, że ciąg wyrazów tego szeregu jest ograniczony, tzn. istnieje liczba M taka, że dla każdego n zachodzi nierówność $|c_n||a - z_0| < M$ i stąd $|c_n| < \dfrac{M}{|a - z_0|^n}$. Jeżeli więc $|z - z_0| \leqslant r < |a - z_0|$, to

$$|c_n(z - z_0)^n| < \frac{M}{|a - z_0|^n}|z - z_0|^n \leqslant M\frac{r^n}{|a - z_0|^n} = M\left|\frac{r}{a - z_0}\right|^n.$$

Ponieważ $\left|\dfrac{r}{a-z_0}\right| < 1$, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{r}{a-z_0}\right|^n$$

jest zbieżny. Z kryterium Weierstrassa szereg $\sum c_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny jednostajnie w kole $|z-z_0| \leqslant r$. $\square$

Podsumowanie:

- Szereg $\sum_0^\infty c_n(a-z_0)^n$ jest rozbieżny dla $|z-z_0| > R$.
- W kole $\overline{K(z_0,r)}, r < R$ szereg jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie.

Definicja 1. *Liczbę R zdefiniowaną przez równość*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

nazywamy promieniem zbieżności szeregu $\sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$, a koło $|z-z_0| < R$ jego kołem zbieżności.

Twierdzenie 5. *Promień zbieżności szeregu $\sum_1^\infty nc_n(z-z_0)^{n-1}$ jest równy promieniowi zbieżności szeregu $\sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$.*

Proof. Zauważmy najpierw, że szereg $\sum_1^\infty nc_n(z-z_0)^{n-1}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_1^\infty nc_n(z-z_0)^n = (z-z_0)\sum_1^\infty nc_n(z-z_0)^{n-1}$ jest zbieżny. Zatem ich promienie zbieżności są równe.

Mamy

$$\limsup \sqrt[n]{n|c_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

i stąd wynika teza. $\square$

Wniosek. Funkcja f zadana sumą szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_0^\infty c_n(x-x_0)^n$$

jest różniczkowalna wewnątrz koła (raczej odcinka) zbieżności i jej pochodna jest zadana szeregiem potęgowym

$$f'(x) = \sum_1^\infty nc_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Stąd dostajemy

Twierdzenie 6. *Funkcja zmiennej rzeczywistej zadana szeregiem potęgowym jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.*

Pozostaje do wyjaśnienia, co się dzieje na brzegu koła zbieżności.

Twierdzenie 7. (pierwsze Abela) *Jeżeli szereg $\sum c_n(a-z_0)^n$ jest zbieżny dla a leżącego na brzegu koła zbieżności, tzn. $|a-z_0| = R$, to szereg ten jest zbieżny jednostajnie na promieniu $[z_0,a]$.*

Wniosek. Funkcja

$$z \mapsto \sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n,$$

ograniczona do promienia $[z_0,a]$, jest ciągła jako granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych. Inaczej mówiąc, suma szeregu dla $z=a$ jest granicą (przy $z \to a$) sum szeregów na promieniu $[z_0,a]$.

Przykład. Jako zastosowanie powyższego twierdzenia obliczymy sumę szeregu anharmonicznego. Rozpatrzmy funkcję $f\colon x \mapsto \log(1+x)$. Jej pochodna $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ jest na odcinku $|x| < 1$ sumą szeregu potęgowego

$$\sum_0^\infty (-1)^n x^n.$$

Mamy zatem

$$\log(1+x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Z twierdzenia Abela szereg ten jest zbieżny jednostajnie na odcinku $[0,1]$ do funkcji ciągłej. Ponieważ log też jest funkcją ciągłą mamy równość obu stron również dla $x = 1$, czyli

$$\log 2 = \log(1+1) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Obliczyliśmy w ten sposób, korzystając z Pierwszego Twierdzenia Abela, sumę szeregu anharmonicznego!